Año XCI. - Núm. 2739 • **Revista de Obras Públicas** • 1 de julio de 1943

CÁLCULO MECÁNICO DE LÍNEAS ELÉCTRICAS

POR JOSÉ MARÍA GONZÁLEZ DEL VALLE, INGENIERO DE CAMINOS

Se trata de un estudio original del autor sobre el tema del epígrafe, que publicaremos en dos artículos, y que ha de tener indudable valor práctico por las simplificaciones que propone, y cuya aproximación suficiente justifica en todos los casos.

Advertencia preliminar.

El estudio de la catenaria no tiene más fin que el hallar las propiedades de esta curva, en cuanto puedan ser útiles en los casos usuales. El desarrollo en serie de las fórmulas obtenidas permite la sustitución de las fórmulas trascendentes por otras algébricas cuyo grado de aproximación es muy suficiente en todos los casos.

Los vanos oblicuos se reducen a vanos con apoyos a nivel, ya que el desarrollo, flecha y tensión de estos últimos resultan ser proyecciones del vano oblicuo. Las variaciones producidas por cambio de régimen se estudian así más fácilmente, y las fórmulas deducidas se exponen de manera que deje a las claras la influencia de las variaciones térmicas y elásticas.

El tomar como unidad de longitud la luz horizontal del vano hace más cómodos los cálculos y permite resolver el problema de los cambios de régimen con un diagrama de tamaño aceptable, que se presta a tanteos y comprobaciones.

Por último, dedicamos unos párrafos al curioso problema de los apoyos flexibles o deslizantes.

I. La catenaria.

1. *Ecuación de la catenaria.* — La catenaria es la forma de equilibrio de un hilo perfectamente flexible e inextensible suspendido en dos puntos fijos y sometido a la acción de su peso propio, que es uniforme por unidad de longitud.

Designemos por p el peso del hilo por unidad de longitud, y por φ el ángulo que la tangente a la catenaria forma con el eje de las X.

Un elemento cualquiera infinitésimo, ds, está en equilibrio bajo la acción de su propio peso, $p \, . \, ds$, y las tensiones en sus extremos. Los ejes coordenados están situados en el plano vertical que pasa por los puntos de amarre, el de las X es horizontal, y el de las Y, vertical. Expresando que la suma de proyecciones de las tres fuerzas sobre los ejes es nula, tendremos:

$$-T\cos\varphi + (T + dT)\cos(\varphi + d\varphi) = 0$$
$$-T\,\mathrm{sen}\,\varphi + (T + dT)\,\mathrm{sen}(\varphi + d\varphi) - p \, . \, ds = 0,$$

que, despreciando infinitésimos de segundo orden, pueden ser puestas en la forma:

$$T \, . \, d\cos\varphi + dT\cos\varphi = d(T\cos\varphi) = 0$$
$$T \, . \, d\,\mathrm{sen}\,\varphi + dT\,\mathrm{sen}\,\varphi = d(T\,\mathrm{sen}\,\varphi) = p\,ds$$

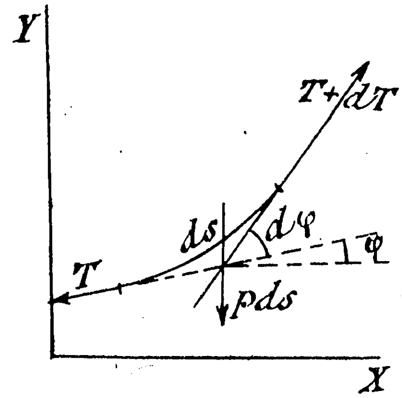

Figura 1.ª

La integración de estas ecuaciones y la eliminación de T entre ambas nos dará la ecuación buscada. De la primera de ellas se deduce:

$$T \, . \cos\varphi = \text{constante} = p \, . \, a,$$

siendo p el peso del hilo, y a, una longitud arbitraria. Sacando de esta expresión el valor de T y llevándolo a la segunda, tendremos:

$$d(p \, . \, a \, . \, \mathrm{tg}\,\varphi) = p \, . \, ds,$$

y como $\mathrm{tg}\,\varphi = \dfrac{dy}{dx}$, la ecuación diferencial de la catenaria será:

$$d\left(a\,\frac{dy}{dx}\right) = ds = dx\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = a \, . \, dy',$$

que escrita en la forma:

$$\frac{dx}{a} = \frac{dy'}{\sqrt{1 + y'^2}},$$

da por integración $\dfrac{x}{a} = \text{arg. Sh}\,y'$, o sea $y' = \mathrm{Sh}\,\dfrac{x}{a}$

Sin constante de integración, porque tomamos como eje de las Y la vertical que pasa por el punto más bajo ($y' = 0$ para $x = 0$).

La integración de esta última ecuación da:

$$y = a \, \text{Ch} \frac{x}{a}, \qquad [1]$$

haciendo nula la constante de integración, lo cual equivale a situar el eje de las X a la distancia a por debajo del vértice. La magnitud a, que es una longitud, es el parámetro de la catenaria.

La ecuación [1] es independiente de p. Por lo tanto, la forma de equilibrio del hilo es independiente de su peso.

La catenaria ofrece dos particularidades que nos interesan para este estudio:

1.ª *La componente horizontal de la tensión es constante,* como se deduce de la primera ecuación de equilibrio. Su valor es $p \cdot a$, o sea el peso de una longitud de hilo igual al parámetro.

2.ª Integrando la primera ecuación diferencial:

$$T = \frac{p \cdot a}{\cos \varphi} = p \cdot a \frac{d\,s}{d\,x} = p \cdot a \sqrt{1 + \left(\frac{d\,y}{d\,x}\right)^2} =$$

$$= p \cdot a \sqrt{1 + \text{Sh}^2 \frac{x}{a}} = p \cdot a \, \text{Ch} \frac{x}{a} = p \cdot y,$$

que demuestra que *la tensión en un punto cualquiera es igual al peso de una longitud de hilo igual a la ordenada.*

Además de estas propiedades, cuyo conocimiento es útil en los cálculos que siguen, podemos añadir que la catenaria, que se identifica con la cosinusoide hiperbólica, es simétrica respecto al eje vertical y queda determinada por tres condiciones, puesto que disponemos de tres constantes arbitrarias que son: el parámetro a, la distancia del eje de simetría al eje de las Y, y, por último, la del vértice al eje de las X.

La longitud del desarrollo del arco, a partir del punto más bajo, viene dada por:

$$s = a \, \text{Sh} \frac{x}{a}$$

2. *Posiciones del eje y del vértice.* — Supongamos determinada la catenaria por los dos puntos de amarre y la longitud de su desarrollo. Designemos por d, el desarrollo; por L, la luz horizontal del vano, y por h, el desnivel entre los puntos de amarre. Si llamamos z la distancia del vértice a la vertical del amarre inferior (z es positiva cuando el vértice cae dentro del vano), tendremos:

$$d = \int_{-z}^{L-z} d\,s = \left(a \cdot \text{Sh} \frac{x}{a}\right)_{-z}^{L-z} = a \left(\text{Sh} \frac{L-z}{a} + \right.$$

$$\left. + \text{Sh} \frac{z}{a}\right) = 2\,a \cdot \text{Sh} \frac{L}{2\,a} \, \text{Ch} \frac{L-2\,z}{2\,a}.$$

O bien, haciendo

$$\frac{L}{2\,a} = \Phi; \qquad \frac{L-2\,z}{2\,a} = \psi; \qquad d = 2\,a \, \text{Sh}\,\Phi \cdot \text{Ch}\,\psi. \qquad [2]$$

Es cómodo sustituir las magnitudes lineales por su relación a la luz, L (horizontal), del vano, haciendo $\alpha \cdot L = a$; $\delta \cdot L = d$, etc., y escribir:

$$\delta = 2\,\alpha \, \text{Sh}\,\Phi \, \text{Ch}\,\psi = \frac{\text{Sh}\,\Phi}{\Phi} \text{Ch}\,\psi \qquad [2]$$

Hallemos ahora las expresiones de la suma y diferencia de las ordenadas extremas y_S e y_I:

$$y_S + y_I = a \left(\text{Ch} \frac{L-z}{a} + \text{Ch} \frac{z}{a}\right) = 2\,a \, \text{Ch}\,\Phi \, \text{Ch}\,\psi$$

$$h = y_S - y_I = 2\,a \, \text{Sh}\,\Phi \, \text{Sh}\,\psi.$$

Restando el cuadrado de esta ecuación del cuadrado de la [2] eliminamos ψ y tendremos:

$$d^2 - h^2 = 4\,a^2 \, \text{Sh}^2 \Phi;$$

que, dividida por L^2 y extrayendo la raíz cuadrada, da:

$$\sqrt{\delta^2 - \text{tg}^2 \gamma} = \frac{\text{Sh}\,\Phi}{\Phi}; \qquad \delta = \sqrt{\frac{\text{Sh}^2 \Phi}{\Phi^2} + \text{tg}^2 \gamma}. \qquad [3]$$

Sustituyendo en la expresión de la suma de ordenadas $\text{Ch}\,\psi$ por su valor sacado de [2], obtenemos:

$$y_S + y_I = d \, \text{Coth}\,\Phi. = d.\,\text{Coth}\,\Phi \qquad [4]$$

La ecuación [3], resuelta por tanteos, nos da el valor de Φ, y la [4], la distancia del eje de las X al punto medio de la cuerda.

Por último, eliminando por división Φ entre las expresiones del desarrollo y de la diferencia de ordenadas:

$$\frac{h}{d} = \text{Th}\,\psi = \text{Th} \frac{L-2\,z}{2\,a}; \quad \frac{\text{tg}\,\gamma}{\delta} = \text{Th}\left(\frac{1}{2\alpha} - \frac{\zeta}{\alpha}\right); \qquad [5]$$

de la cual se deduce inmediatamente la distancia del vértice a la vertical del amarre inferior:

$$z = \frac{1}{2} L - a \cdot \text{arg.}\,\text{Th} \frac{h}{d}.$$

Estas relaciones expresan todo lo necesario para definir la catenaria y su posición. En cuanto a la significación de Φ y ψ, la primera de estas cantidades representa la semiluz del vano, tomando como unidad el parámetro de la catenaria. Su valor es independiente del desnivel de los apoyos. El valor de ψ interviene cuando los apoyos se encuentran a diferente nivel y define las distancias entre los ejes del vano y de la catenaria.

Si en la ecuación [3] desarrollamos en serie el valor de Sh Φ del segundo miembro vale:

$$\frac{\text{Sh}\,\Phi}{\Phi} = 1 + \frac{\Phi^2}{3\,!} + \frac{\Phi^4}{5\,!} + \ldots$$

Esta expresión es necesariamente mayor que la unidad y, por lo tanto, $d^2 > L^2 + h^2 = c^2$, como es evidente, porque el desarrollo ha de ser mayor que la cuerda IS. A medida que decrece el desarrollo decrece también el valor de $\Phi = L/2\,a$, o sea que aumenta a y todas las tensiones en el vano.

El examen de las ecuaciones [4] y [5] hace ver que, cuando d tiende a su valor mínimo, el eje de las X se aleja del punto medio de la cuerda, y el eje de simetría, de la catenaria del amarre superior.

La posición más próxima que el vértice puede alcanzar respecto del amarre superior es el punto medio de la luz, y como a no puede ser nulo, esto solamente puede ocurrir cuando los apoyos están a nivel.

3. Es problema frecuente en la práctica la determinación de una catenaria definida por los dos puntos de amarre y la tensión máxima, o sea la del amarre superior. El producto de la carga de trabajo por la sección ω del hilo, nos da la tensión total, y el cociente de esta tensión total por el peso unitario, la longitud de la ordenada y_s del amarre superior. Eliminando d entre [3] y [4], tenemos:

$$\sqrt{\left(\frac{y_S + y_I}{L}\right)^2 \text{Th}^2\,\Phi - \frac{h^2}{L^2}} = \frac{\text{Sh}\,\Phi}{\Phi}, \qquad [6]$$

que da el valor de Φ por tanteos.

Esta ecuación demuestra que el desarrollo del vano inclinado es hipotenusa del triángulo formado por el desnivel y el desarrollo de la catenaria que salvase la misma luz con el mismo parámetro y los apoyos a nivel, es decir, que puede ser puesta en la forma

$$\delta_n = \sqrt{\delta^2 - \text{tg}^2\,\gamma}.$$

Esta ecuación puede tener dos soluciones, una, o ninguna (contando solamente las positivas). Una de las soluciones corresponde a la catenaria más tendida; la otra, a la catenaria de flecha muy grande y desarrollo mucho mayor que la de la primera solución. Obsérvese que el primer término bajo el radical varía solamente con Th Φ y, por lo tanto, su curva representativa tiene una asíntota paralela al eje Φ. El valor del radical parte, pues, de un valor nulo para

$$\Phi = \frac{\text{tg}\,\gamma}{\eta_S + \eta_I}.$$

En este punto la tangente es perpendicular al eje φ.

El segundo miembro vale la unidad para $\varphi = 0$ y crece indefinidamente con φ. Ambas curvas pueden ser, pues, exteriores, en cuyo caso el problema no tiene solución, o cortarse (dos soluciones, de las cuales interesa solamente la de menor valor de φ), o bien ser tangentes, y la solución es única. La condición para que el problema tenga solución solamente puede expresarse en el caso de $h = 0$, es decir, cuando los apoyos están a nivel.

4. *Reacciones en los apoyos.* — Hemos visto al hallar la ecuación de la catenaria que la componente horizontal de la tensión es constante $= p\,.\,a$

$$H_s = H_i = p\,.\,a = p\,.\,L\,.\,\alpha. \qquad [7]$$

Para determinar el valor de la componente vertical, observemos que $V = H\,\frac{d\,y}{d\,x}$, con lo cual tendremos:

$$V_s = p\,.\,a\,.\,\text{Sh}\,\frac{L - z}{a}$$

$$V_i = p\,.\,a\,.\,\text{Sh}\,\frac{z}{a}.$$

La suma de estas dos reacciones es $p\,.\,d$, es decir, el peso del hilo. Cada amarre soporta el peso de la rama que se extiende desde él hasta el vértice.

El valor de V_s es siempre positivo, porque (véase la ecuación [5]) $z < \frac{1}{2}\,L$, mientras que el valor de V_i tiene el signo de z; es decir, que está dirigido hacia arriba cuando el vértice cae fuera del vano.

La condición para que la tensión del hilo en el amarre inferior no tenga componente dirigida hacia arriba es que el vértice caiga dentro del vano, lo cual se expresa poniendo la condición $z > 0$:

$$a \text{ arg. Th}\,\frac{h}{d} \lesseqgtr \frac{1}{2}\,L; \quad \frac{h}{d} \lesseqgtr \text{Th}\,\frac{L}{2\,a} = \text{Th}\,\Phi;$$

o, en coordenadas aritméticas:

$$\text{tg}\,\gamma \lesseqgtr \delta\,\text{Th}\,\Phi.$$

5. *Flecha en el centro del vano.* — Es el segmento de vertical comprendido entre la catenaria y el punto medio de la cuerda. La designamos $f\,(= \varphi\,L)$:

$$f = \frac{y_s + y_i}{2} - y_c = a\,(\text{Ch}\,\Phi\;\text{Ch}\,\psi - \text{Ch}\,\psi) =$$

$$= y_c\,(\text{Ch}\,\Phi - 1) = 2\,y_c\,\text{Sh}^2\,\frac{1}{2}\,\Phi;$$

de [5] y [3] se deduce:

$$y_c = \frac{a}{\sqrt{1 - \text{Th}^2\,\Phi}} = \frac{d}{2\,\text{Sh}\,\Phi} = \frac{d}{4\,\text{Sh}\,\frac{1}{2}\,\Phi\;\text{Ch}\,\frac{1}{2}\,\Phi},$$

con lo cual tenemos:

$$f = \frac{1}{2} d \,.\, \mathrm{Th}\, \Phi = \frac{1}{2} d\, \mathrm{Th} \frac{1}{4a} = 2a\, \mathrm{Sh}^2 \frac{\Phi}{2}\, \mathrm{Ch}\, \psi =$$

$$= 2a\, \mathrm{Sh}^2 \frac{L}{4a}\, \mathrm{Ch}\, \psi. \qquad [9]$$

La expresión de la distancia vertical máxima entre la catenaria y la cuerda es de una expresión tan complicada como inútil.

6. *Caso particular de apoyos a nivel.* — Si en las fórmulas deducidas hacemos $h = 0$, tendremos $\mathrm{Ch}\, \psi = 1$ y $z = \frac{1}{2} L$, y hechas simplificaciones:

$\delta_n = \frac{\mathrm{Sh}\, \Phi}{\Phi}$

$$d_n = 2a\, \mathrm{Sh}\, \Phi \qquad \delta_n = 2a\, \mathrm{Sh}\, \Phi \qquad [2_n]$$

$$T_{\text{máx.}} = \frac{1}{2} p \,.\, L \frac{\mathrm{Ch}\, \Phi}{\Phi} \qquad [6_n]$$

$$f_n = 2a\, \mathrm{Sh}^2 \frac{\Phi}{2} \qquad \varphi_n = 2a\, \mathrm{Sh}^2 \frac{\Phi}{2} \qquad [9_n]$$

En el segundo miembro de la ecuación $[6_n]$, el valor de

$$\frac{\mathrm{Ch}\, \Phi}{\Phi} = \frac{1}{\Phi} + \frac{\Phi}{2} + \frac{\Phi^3}{24} + \ldots$$

crece indefinidamente cuando Φ tiende a cero o crece indefinidamente. Tiene por lo tanto un mínimo que viene dado por la condición $\Phi\, \mathrm{Th}\, \Phi = 1$, que se satisface con el valor de $\Phi = 1{,}2$, y llevado este valor a $[6_n]$ ha de tenerse:

$$T_{\text{máx}} \gtreqless 0{,}967\, p \,.\, L, \quad \text{o sea:} \quad y_s \gtreqless 0{,}767\, L.$$

La ecuación $[6_n]$ tiene, en general, dos soluciones, de las cuales interesa solamente la menor, que es la de flecha más reducida.

7. *Caso en que la flecha sea dato.* — Si la flecha es dato, la solución se tiene eliminando d entre [3] y [9], con lo cual tendremos una relación entre f y $\Phi = \frac{1}{2a}$, que se resuelve por tanteos.

8. *Procedimiento gráfico.* — Si dibujamos en un papel cuadriculado una catenaria (de 10 cm. de base, por ejemplo) y numeramos sus abscisas y ordenadas, podemos considerarla como dibujo de cualquier catenaria, sin más que tener en cuenta la escala que resultare para cada caso. Para utilizar este diagrama se dibujan en papel transparente dos rectas que formen entre sí el mismo ángulo que la recta que une los amarres con la horizontal, o sea el ángulo que hemos denominado γ. La recta inclinada se gradúa en la misma escala con que fué dibujada la catenaria.

La longitud de la cuerda es uno de los datos. El otro puede ser la ordenada máxima, la flecha en un punto determinado de la luz, etc. Por lo tanto, se tiene en cada caso la relación de la cuerda a otra magnitud. El papel transparente se mueve hasta conseguir que la cuerda y la recta que representa la otra magnitud guarden la relación prefijada, y, una vez hallada esta posición, queda fijada la escala del dibujo, y, por lo tanto, el valor del parámetro a, y con él toda la catenaria.

9. *Procedimiento mecánico* (del Dr. Segurola Amarrátegui). — La semejanza de máquinas aplicada a la catenaria se reduce a simple semejanza geométrica cuando los pesos y tensiones se expresan en longitudes de hilo. Los puntos de amarre se materializan en sendos clavillos clavados en una pared. Elegida una escala conveniente, se utiliza la cadena del perro, la de la cisterna del retrete u otra cualquiera, a gusto del escamado lector. Uno de los extremos se empalma con un trocito de bramante que se hace pasar por una polea, y de él se cuelgan pesos, cuya equivalencia en metros de cadena se halla inmediatamente. El otro extremo de la cadena es fijo. Una vez conseguido el equilibrio se conocen las ordenadas extremas y el desarrollo, y con estos valores se deduce el del parámetro. Si el vértice queda dentro del vano, el valor del parámetro se deduce inmediatamente.

Ejemplo. — Se trata de determinar una catenaria que cumpla las siguientes condiciones:

Luz = 100 m.; desnivel = 80 m.; tensión máxima = 12 Kg./mm.²; diámetro del hilo = 4 mm.; sección = 12,5 mm.². Peso máximo del hilo, el propio más el de un manguito de nieve de 10 cm. de diámetro y densidad 0,1 que, sumados, dan 0,112 + + 0,785 = 0,897 Kg./m.

La ordenada del amarre superior es

$$\frac{12{,}5 \times 12}{0{,}897} = 167 \text{ m.}$$

La del amarre inferior = 167 — 80 = 87 m. La suma de las ordenadas unitarias es, pues,

$$\frac{167 + 87}{100} = 2{,}54.$$

De los datos se deduce también:

$$\mathrm{tg}\, \gamma = \frac{80}{100} = 0{,}8.$$

La ecuación que da el valor de Φ [6] es, pues,

$$\sqrt{(2{,}54\, \mathrm{Th}\, \Phi)^2 - 0{,}8^2} = \frac{S\, \Phi}{\Phi}.$$

Los valores del segundo miembro se leen en la tabla de valores de δ (v. apéndice), y como siempre son mayores que la unidad, empezaremos por determinar el valor de Φ que produce el valor 1 para la radical, y hallamos $\Phi = 0{,}55$.

Para $\Phi = 0{,}60$, el radical vale 1,1, mientras que el segundo miembro vale, según la tabla, 1,06. El valor buscado se encuentra entre ambos. Repetidos los tanteos para varios valores, tenemos:

Φ	δ (tabla)	$\sqrt{(2{,}54\ \mathrm{Th})^2 - 0{,}64}$
0,57	1,055	1,035
0,58	1,057	1,060
0,59	1,059	1,082

Tomamos por interpolación $\Phi = 0{,}579$, o sea:

$$\alpha = \frac{1}{2\,\Phi} = 0{,}865.$$

Las tablas dan $\delta_n = 1{,}0569$. El desarrollo vale (V. ec. [4]) $2{,}54\ \mathrm{Th}\ 0{,}579 = 1{,}325$.

Para calcular ahora la posición del vértice, tenemos:

$$\mathrm{Th}\,\psi = \frac{0{,}8}{1{,}325} = 0{,}602 \qquad \psi = 0{,}693.$$

La distancia (unitaria) del vértice al amarre inferior es, pues ([5]), $0{,}500 - 0{,}865 \times 0{,}693 = -0{,}100$, valor negativo que indica que el vértice se halla fuera del vano. Las abscisas de los apoyos, contadas a partir del vértice, son, por lo tanto, 0,100 y 1,100. Las ordenadas se calculan por la ecuación [1]:

$$\xi \begin{cases} 0{,}100 \\ 1{,}100 \end{cases} \qquad \frac{\xi}{\alpha} \begin{cases} 0{,}127 \\ 1{,}275 \end{cases} \qquad \mathrm{Ch}\,\frac{\xi}{\alpha} \begin{cases} 1{,}008 \\ 1{,}93 \end{cases} \qquad \eta \begin{cases} 0{,}87 \\ 1{,}67 \end{cases}$$

Las ordenadas de los amarres difieren, efectivamente, en 0,80, y las ordenadas geométricas son los productos por la luz = 100. Las ordenadas intermedias se deducen de las tablas de cosenos hiperbólicos para $\xi = 0{,}1\,\alpha$, $0{,}2\,\alpha$, etc.

Régimen elástico.

Hemos supuesto hasta ahora el hilo perfectamente inextensible; y con esta hipótesis hemos hallado que la tensión en cada punto es proporcional al peso del hilo, y la forma de equilibrio, independiente de él; pero si varía el peso por unidad de longitud, la alteración del régimen de tensiones implica, en los casos reales, un alargamiento o acortamiento (según que el peso haya aumentado o disminuído), del desarrollo, lo cual implica variación en el parámetro que define la catenaria y, con él, todo el régimen de tensiones.

Cuando varía la temperatura, también varía la longitud del desarrollo y, por consiguiente, el parámetro que define la nueva forma de equilibrio y el régimen de tensiones. Esta variación del régimen de tensiones implica, a su vez, variación en el desarrollo por la elasticidad del material. Estudiaremos sucesivamente ambos casos.

10. *Variación de sobrecargas.* — Supongamos el hilo en equilibrio bajo la acción del peso inicial, p_1, por unidad de longitud. Supongamos, para fijar ideas, que este peso inicial fuese suma del peso propio y de una sobrecarga que se hace desaparecer. El nuevo peso, p_2, del hilo produce tensiones menores que el primitivo, p_1, y, por lo tanto, un acortamiento elástico en el desarrollo, que vale:

$$d_2 - d_1 = d_1\,(T_2 - T_1)/E\,\omega. \qquad [11]$$

En la cual E es el coeficiente de elasticidad del hilo, y ω su sección, y T_2 y T_1 las tensiones inicial y final. Estas tensiones son valores medios para cada una de las catenarias que, aplicadas uniformemente a lo largo del hilo, producirían la misma variación elástica, en todo el desarrollo, que las tensiones reales variables de un punto a otro.

La ecuación [11], que liga los elementos de las catenarias inicial y final, exige la determinación previa de las tensiones medias, T, y como en la catenaria las tensiones son proporcionales a la ordenada, hallaremos su expresión en la forma pY; es decir, el peso de una cierta ordenada, Y, media de las del vano.

Hallemos primeramente el valor del alargamiento elástico: Un elemento de longitud $d\,s = a\,\mathrm{Ch}\,\frac{x}{a}\,dx$, que estaba sometido a la tensión $T_1 = p_1 \cdot y = p_1\,a\,\mathrm{Ch}\,\frac{x}{a}$, pasa a estarlo a la $T_2 = p_2 \cdot y$. La variación de longitud del elemento será:

$$\Delta\,s = a\,(p_2 - p_1)\,\mathrm{Ch}^2\frac{x}{a}\,/\,E\,\omega;$$

y la del hilo entero:

$$\int_{-z}^{L-z} a\,\frac{p_2 - p_1}{E\,\omega}\,\mathrm{Ch}^2\frac{x}{a}\,d\,x =$$

$$= a^2\,\frac{p_2 - p_1}{E\,\omega}\,\frac{1}{2}\left[\mathrm{Sh}\,\frac{x}{a}\,\mathrm{Ch}\,\frac{x}{a} + \frac{x}{a}\right]_{-z}^{L-z}.$$

Igualando este valor a $Y\,(p_2 - p_1)\,d_1/E\,\omega$, obtendremos el de

$$Y = \frac{a^2}{2\,d_1}\left(\mathrm{Sh}\,\frac{L-z}{a}\,\mathrm{Ch}\,\frac{L-z}{a} + \right.$$

$$\left. + \mathrm{Sh}\,\frac{z}{a}\,\mathrm{Ch}\,\frac{z}{a} + \frac{L}{a}\right)$$

y como

$$a\,\mathrm{Ch}\,\frac{L-z}{a} = y_s \qquad \text{y} \qquad a\,\mathrm{Ch}\,\frac{z}{a} = y_i = y_s - h,$$

tendremos:

$$Y = \frac{a}{2\,d}\left[y_s\left(\mathrm{Sh}\,\frac{L-z}{a} + \mathrm{Sh}\,\frac{z}{a}\right) - h\,.\,\mathrm{Sh}\,\frac{z}{a} + L\right],$$

y, finalmente:

$$Y = \frac{1}{2}\left(y_s + \frac{a\,L}{d} - \frac{a\,h}{d}\,\mathrm{Sh}\,\frac{z}{a}\right). \qquad [12]$$

El primer término produce una deformación $p\,.\,y_s\,.\,d$ con la tensión en el punto más alto y en toda la longitud del desarrollo. El segundo representa la deformación en una longitud igual al vano con la intensidad de la tensión en el vértice, y el tercero es la deformación producida por una tensión igual al peso de una longitud de hilo igual al desnivel que actúa solamente en la rama comprendida entre el vértice y el apoyo inferior. Cuando el vértice queda fuera del vano, este término no es sustractivo, sino aditivo.

Hallado el valor de la tensión media, podemos escribir la ecuación [11] así:

$$d_2 - d_1 = \frac{d_1}{E\,\omega}\,(p_2\,Y_2 - p_1\,Y_1). \qquad [13]$$

Esta ecuación ha de ser resuelta por tanteos, ensayando valores del parámetro a_2 de la catenaria final.

11. *Variación de temperatura.*— Supongamos que la temperatura aumente; el desarrollo crece hasta el valor:

$$d_1\,(1 + D\,(t_2 - t_1))\,;$$

en la cual D es el coeficiente de dilatación del hilo y t_2 y t_1 las temperaturas final e inicial. Como consecuencia de la reducción de tensiones producida por el aumento de temperatura se produce un acortamiento elástico, cuyo valor viene expresado por la ecuación [13], y el desarrollo final será:

$+1$

$$d_2 = d_1\left[\left(1 + D\,(t_2 - t_1)\right)\left(\frac{1}{E\,\omega}\,(p\,.\,Y_2 - p\,.\,Y_1)\right)\right]$$

y prescindiendo del producto de dos cantidades muy pequeñas que representa la variación elástica del alargamiento térmico, tendremos:

$$d_2 = d_1\left[1 + \frac{Y_2 - Y_1}{E\,\omega}\,p + D\,(t_2 - t_1)\right]; \qquad [14]$$

que es la ecuación buscada y que, como la [13], se resuelve por tanteos.

12. *Aplicación de los casos reales.* — El estudio de los cambios de estado por variaciones térmicas o de sobrecargas, solamente es de interés cuando la variación del desarrollo unitario, δ, produce variación sensible en valor del parámetro α, que define la catenaria.

Las variaciones en el desarrollo unitario son debidas a la que experimenta el hilo por cambios en su carga de trabajo o por diferencia de temperatura. Ahora bien: de los materiales corrientemente empleados, el más deformable, elástica y térmicamente, es el aluminio, cuyos coeficientes de elasticidad y dilatación son, respectivamente: $E = 7.260$ Kg./mm.², y $D = 23{,}8 \times 10^{-6}$ (los del cobre son $E = 12.000$ Kg./mm.² y $D = 17 \times 10^{-6}$).

La mayor variación elástica que consideraremos es la del aluminio, cuando su carga de trabajo por tracción varía en 15 Kg./mm.² La variación unitaria de longitud es: $15/7.260 = 0{,}00206$. La dilatación por aumento de temperatura en 50° sería $50 \times 23{,}8 \times 10^{-6} = 0{,}00119$, menor que la anterior.

Como límite de tolerancia en el error con que se halla el parámetro final, α, tomaremos 5 por 100. Para determinar el valor mínimo de α que cumpla esta condición, desarrollemos en serie el valor de δ, suponiendo los apoyos a nivel, y tendremos:

$$= 1 + \frac{\Phi^2}{6} + \frac{\Phi^4}{120} + \ldots = 1 + \frac{1}{24\,\alpha^2} + \frac{1}{3840\,\alpha^4} + \ldots$$

La derivada aproximada es:

$$\frac{\Delta\,\delta}{\Delta\,\alpha} = \frac{-1}{12\,\alpha^3} = \frac{-0{,}00206}{0{,}05} = -0{,}0412$$

y de ella se deduce:

$$\alpha = \sqrt[3]{\frac{1}{12 \times 0{,}0412}} = 1{,}264 \quad (\Phi = 0{,}395)$$

que corresponde al desarrollo unitario $\delta = 1{,}0264$.

Introduciendo este valor de $\alpha = 1{,}26$ en la expresión del desarrollo, resulta valer una diezmilésima el término despreciado de cuarto grado en α.

Es, pues, superfluo el cálculo de los cambios de estado para $\alpha < 1{,}26$, y para los mayores son suficientemente aproximadas las fórmulas algebraicas, de más fácil manejo, que exponemos a continuación.

Fórmulas aproximadas.

13. Acabamos de ver que es superfluo el cálculo de los cambios de estado cuando el valor $\alpha = a/L$ es inferior a 1,26, y que cuando es mayor es posible la sustitución de las funciones trascendentes hiperbólicas por funciones algebraicas, de manejo más fácil y de aproximación suficiente en la práctica. Las fórmulas que establecemos a continuación están expresadas en magnitudes geométricas (letras latinas) o por la relación de estas magnitudes lineales a la luz del tramo, medida horizontalmente (letras griegas).

Ecuación de la curva de equilibrio.— Del desarrollo en serie del coseno hiperbólico tomemos solamente el primer término variable, y tendremos de la ecuación [1]:

$$y = a\left(1 + \frac{x^2}{2\,a^2}\right) = a + \frac{x^2}{2\,a};$$
$$\eta = \alpha + \frac{\xi^2}{2\,\alpha} = \frac{1}{2\,\Phi} + \Phi\,\xi^2. \qquad [1, a]$$

Las abscisas se cuentan a partir de la vertical que pasa por el vértice, o sea a partir del eje de simetría de la parábola. Las ordenadas, multiplicadas por el peso por metro lineal, dan el valor de la tensión en cada punto.

Flecha. — El valor de la flecha se deduce de la expresión $f = 2\,y_c\,\mathrm{Sh}^2\,\frac{1}{2}\Phi$, que obtuvimos para llegar a la ecuación [9], suponiendo

$$\mathrm{Sh}\,\frac{1}{2}\Phi = \frac{1}{2}\,\Phi, \quad \text{y} \quad \mathrm{Ch}\,\psi = \frac{1}{\cos\gamma};$$
$$f = \frac{c\,L}{8a} = \frac{L^2}{8\,a\cos\gamma}; \quad \varphi = \frac{f}{L} = \frac{L}{8\,a\cos\gamma}. \qquad [9, a]$$

Si interesa no solamente conocer la flecha (que corresponde al centro del vano), sino las demás ordenadas, pueden obtenerse sin la determinación previa de la distancia del amarre inferior al vértice; para ello basta trasladar el origen de coordenadas a dicho amarre inferior, y se obtiene así la ecuación que exponemos en varias formas:

$$\left.\begin{aligned} y &= \frac{x^2}{2\,a} + \left(\frac{h}{L} + \frac{L}{2\,a}\right)x; \\ \eta &= \frac{\xi^2}{2\,\alpha} + \left(\mathrm{tg}\,\gamma - \frac{1}{2\,\alpha}\right)\xi; \\ \eta &= \xi\left[\mathrm{tg}\,\gamma + \frac{1}{2\,\alpha}(\xi - 1)\right] = \Phi\,\xi^2 + (\mathrm{tg}\,\gamma - \Phi)\,\xi. \end{aligned}\right\} \quad [1, b]$$

Abscisa del vértice. — La distancia del amarre inferior al vértice se obtiene igualando a cero la derivada de la ecuación [1, *b*]:

$$z = \frac{1}{2}L - a\,\frac{h}{L} \qquad \zeta = \frac{1}{2} - \alpha\,\mathrm{tg}\,\gamma. \qquad [5, a]$$

La condición para que la tensión del hilo no tenga componente dirigida hacia arriba en el amarre inferior es que el vértice caiga dentro del vano, o sea que z sea positivo y, por lo tanto, $\alpha\,\mathrm{tg}\,\gamma < \frac{1}{2}$.

Desarrollo. — Se deduce inmediatamente de la ecuación [2], suponiendo, como siempre, $\mathrm{Ch}\,\psi = \frac{1}{\cos\gamma}$ y tomando el desarrollo en serie de Sh Φ los dos primeros términos:

$$d = \frac{L}{\cos\gamma}\left(1 + \frac{L^2}{24\,a^2}\right); \quad \delta = \frac{1}{\cos\gamma}\left(1 + \frac{1}{24\,\alpha^2}\right). \qquad [2, a]$$

El valor de δ difiere poco de la unidad cuando los apoyos están a nivel, y una variación pequeña de su valor puede producir variaciones de importancia en el valor de α y, por tanto, en el régimen de tensiones y en la flecha. Por esta razón es cómodo en los cálculos de cambios de estado por variación de sobrecargas o de temperatura manejar, no el valor de δ, sino el del exceso de δ sobre la unidad que designaremos por $\varepsilon = \frac{1}{24\,\alpha^2}$, y que en la práctica ha de ser calculado hasta las diezmilésimas.

Ordenada media. — Un valor aproximado de la ordenada media, *Y*, se deduce de la expresión calculada en la página 295 para la ordenada central y_c suponiendo que esta ordenada central sea la ordenada media y que el desarrollo sea igual a la cuerda:

$$Y = \frac{a\,c}{L} = \frac{a}{\cos\gamma}; \quad \eta = \frac{\alpha}{\cos\gamma} = \alpha\sqrt{1 + \mathrm{tg}^2\,\gamma}. \qquad [12, a]$$

La ordenada media, *Y*, es aquella cuyo producto por el peso unitario, *p*, produce una tensión que, aplicada uniformemente a todos los puntos del cable, produciría la misma deformación elástica total que las tensiones reales variables de un punto a otro.

El valor que da la fórmula [12, *a*] es menor que el real, si bien el error es muy pequeño. Si se desea mayor aproximación, puede adoptarse el:

$$Y = c\left(a + \frac{L^2}{23\,a}\right); \qquad \gamma = \frac{1}{\cos\gamma}\left(\alpha + \frac{1}{23\,\alpha}\right), \qquad [12, b]$$

deducido con la condición de que su valor para $\alpha = 1{,}25$ sea exacto hasta las diezmilésimas. Como se ve, equivale a sumar a la ordenada central una fracción de la flecha.

Influencia de la inclinación. — Las expresiones halladas de desarrollo, flecha y ordenada media hacen ver que en un vano inclinado son respectivamente proyectantes de otro cable tendido con la misma luz horizontal y el mismo parámetro *a*.

La consecuencia inmediata de esto es que un vano calculado como horizontal puede repetirse con cualquier inclinación, conservando la misma distancia entre amarres, sea cual fuere el desnivel. La única precaución que ha de tomarse es la de comprobar la tensión en el punto más alto, cuyo valor $\left(Y + f + \frac{1}{2} h\right) p$ es sensiblemente superior al calculado para el vano horizontal Yp.

14. *Precisión de las fórmulas aproximadas.* — El grado de aproximación de las fórmulas que acabamos de establecer crece con el valor de α, cuyo límite inferior hemos fijado (pág. 298) en 1,25. Para este valor calculemos los exactos y aproximados de la flecha, tensión media y desarrollo.

a) *Apoyos a nivel.*

El valor exacto de la flecha, según la ecuación [9], para $= 1{,}25$ ($\Phi = 0{,}4$) es 0,101, mientras que el de la fórmula aproximada, [9, *a*], es 0,100.

El orden de aproximación es, por lo menos, 1 por 100, y la flecha real mayor que la aproximada.

De este mismo orden de aproximación son los valores de las ordenadas de la curva de equilibrio que da la ecuación [1, *b*].

Ordenada media. — El error al tomar $Y = a$ para $\alpha = 1{,}25$ es [12, *b*] $1/23 \times 1{,}25 = 0{,}035$.

Desarrollo. — El primer término despreciado en el valor del desarrollo es (pág. 298) $\frac{1}{3840\,\alpha^4}$, que para $\alpha = 1{,}25$ vale una diezmilésima. Esto en cuanto al valor absoluto del desarrollo, cuyo interés es secundario, porque lo que importa es la exactitud en la diferencia de los dos desarrollos para el cálculo del régimen elástico (pág. 297).

Para hacer el cálculo del error supondremos los incrementos finitos iguales a las diferenciales, y tendremos (derivando 2 *a*) $\Delta\,\alpha = -12\,\alpha^3\,\Delta\,\delta$. La derivada del término despreciado es $\frac{-4}{3840\,\alpha^5}$ y, por lo tanto, podemos escribir el valor del error debido a la diferencia de desarrollos:

$$\frac{12\,\alpha^3\,\Delta\,\delta}{960\,\alpha^5} = \frac{\Delta\,\delta}{80\,\alpha^2};$$

que para $\alpha = 1{,}25$ y $\Delta\,\delta = 20 \times 10^{-4}$ (véase página 298) vale $0{,}16 \times 10^{-4}$. El producto de esta cifra por el coeficiente de elasticidad del aluminio da el error de la carga de trabajo del hilo, que resulta ser $0{,}0016 \times 7.260 = 0{,}11$ Kg./mm.² La aproximación es la misma para el hilo de cobre.

b) *Vanos inclinados.*

En el párrafo **3**, página 295, queda establecido que el desarrollo del vano horizontal es proyección del vano inclinado; por lo tanto, el error en la ecuación [2, *a*] es solamente debido al factor entre paréntesis que acaba de ser estudiado.

En cuanto a la flecha y ordenada media, hemos supuesto $\mathrm{Ch}\,\psi = \sec\gamma$, que se deduce de suponer el desarrollo igual a la cuerda L.

En efecto:

$$\mathrm{Th}\,\psi = \frac{h}{d};$$

y, por lo tanto,

$$\mathrm{Ch}\,\psi = \frac{1}{\sqrt{1 - \mathrm{Th}^2\,\psi}} = \frac{c}{\sqrt{c^2 - h^2}} = \frac{c}{L} = \frac{1}{\cos\gamma}.$$

Como valor extremo de la inclinación supondremos la de 45°, cuya secante es 1,414, y tendremos:

α	δ	Ch ψ	Error abs.	Error
1,25	1,026	1,380	0,034	2 %
2,0	1,0105	1,400	0,014	1 %
3,0	1,0053	1,407	0,007	1/2 %

El valor real de $\mathrm{Ch}\,\psi$ es menor que el $\sec\gamma$; por lo tanto, el error está en sentido contrario del deducido para la flecha y la ordenada media.

Ejemplo:

Distancia entre postes = 40 m.
Desnivel " " = 24 m.

Hilo de cobre de 3 mm. de diámetro. Sección = 7,05 mm.² Sobrecarga: manguito de nieve de 8 centímetros de diámetro y densidad = 0,1. Carga máxima de trabajo = 10 Kg./mm.²

De los datos se deduce:

$$\mathrm{tg}\,\gamma = \frac{24}{40} = 0{,}6;$$

$$\sec\gamma = \sqrt{1 + 0{,}6^2} = 1{,}17; \quad \cos\gamma = 0{,}86.$$

El peso propio del hilo (densidad = 9) es:

$$0{,}0705 \times 100 \times 9 = 63{,}5 \text{ g./m.}$$

El de la sobrecarga es:

$$8^2 \times \frac{3{,}14}{4} \times 100 \times 0{,}1 = 505 \text{ g./m.}$$

El peso total es $0{,}063 + 0{,}505 = 0{,}568$ Kg./m.

Ordenada máxima. — La tensión total en el amarre superior es $7{,}05 \times 10 = 70{,}5$ Kg., y, por tanto, la ordenada máxima:

$$y_s = \frac{70{,}5}{0{,}568} = 124 \text{ m.}$$

Ordenada en el centro del vano. — Es, evidentemente, igual (pág. 299) a la máxima, menos la mitad del desnivel, menos la flecha. Como la flecha tiene valor pequeño en comparación de las ordenadas, calcularemos un valor aproximado (no hay inconveniente, para estos fines, en estimarlo a ojo). Eliminado a entre [9, a] y [12, a], se tiene $f = L^2/8\,Y \cos^2 \gamma$; y tomando como valor provisional de Y la ordenada del centro de la cuerda $= 124 - 12 = 112$ metros, el valor provisional de la flecha resulta ser $= 2{,}4$ m. y el definitivo de $Y = 112 - 2{,}4 = 109{,}6$ metros.

Característica. — De la ecuación [12, a] se deduce inmediatamente $a = Y \cos \gamma = 109{,}6 \times 0{,}86 = 94$ m., del cual se deduce

$$\alpha = \frac{94}{40} = 2{,}35; \qquad \Phi = \frac{1}{2\,\alpha} = 2{,}35.$$

Flecha. — Su valor viene dado por [9, a], y es:

$$\frac{40^2}{8 + 94 + 0{,}86} = 2{,}48 \text{ m.}$$

Ordenadas intermedias. — Para que nos formemos idea de la posición del hilo con respecto al terreno, calculemos los desniveles entre el amarre inferior y el hilo para distancias de 10 y 30 m. Estos valores se obtienen de la ecuación [1, b], en la cual:

$$\frac{h}{L} = \operatorname{tg} \gamma = 0{,}6; \quad \frac{L}{2\,a} = \Phi = 0{,}213\ \gamma - \Phi = 0{,}387$$

$$10 \text{ m.}: \frac{100}{188} + 0{,}387 \times 10 = 4{,}40 \text{ m.}$$

$$20 \text{ m.}: \frac{900}{188} + 0{,}387 \times 30 = 16{,}40 \text{ m.}$$

Abscisa del vértice. — De [5, a] se saca:

$$z = 20 - 94 \times 0{,}6 = -36{,}5 \text{ m.};$$

valor negativo que indica que el vértice está fuera del vano y, por tanto, el amarre inferior está sometido a tiro ascendente.

15. *Variación de sobrecargas.*—La línea que estaba sometida al peso p_1 por metro lineal pasa a estarlo al p_2. La tensión total del hilo pasa de $Y_1\, p_1$ a $Y_2\, p_2$. Y_1 e Y_2 son las ordenadas medias en cada una de las dos hipótesis y sus valores han sido calculados en la página 299.

Designando, respectivamente, por E y ω el coeficiente de elasticidad y la sección del conductor, podemos escribir la ecuación [13] (pág. 298), después de dividirla por L, en la forma:

$$\delta_2 - \delta_1 = \delta_1 \left(\frac{\alpha_1\, L\, p_2}{\cos \gamma} - \frac{\alpha_1\, L\, p_1}{\cos \gamma} \right) \frac{1}{E\,\omega} \qquad [13, a]$$

Ahora bien: $\dfrac{\delta\, L}{\cos \gamma} = \text{desarrollo} = d$, y si hacemos $p \,.\, d = P =$ peso total del hilo en el vano, y tenemos en cuenta (véase pág. 299) $\delta = 1 + \varepsilon$, podemos escribir la ecuación [13, a] en la forma:

$$\varepsilon_2 - \varepsilon_1 = \frac{1}{E\,\omega} (\alpha_2\, P_2 - \alpha_1\, P_1) \qquad [13, b]$$

o bien, sustituyendo ε_2 por su valor $\dfrac{1}{24\,\alpha^2_2}$:

$$\alpha_2 = \sqrt{\frac{E\,\omega}{24}} \times \frac{1}{\sqrt{E\,\omega\,\varepsilon_1 + \alpha_2\, P_2 - \alpha_1\, P_1}}. \qquad [13, c]$$

Esta ecuación se resuelve rápidamente por tanteos, suponiendo como primera aproximación $\alpha_1 = \alpha_2$.

El primer sumando bajo el radical del denominador representa el exceso inicial del desarrollo, y el conjunto de los otros dos, la variación del desarrollo debida a la diferencia de pesos y a la elasticidad del material.

16. *Variación de temperatura.* — Designemos por $\Delta\, t$ la diferencia de temperaturas (positiva o negativa) y por D el coeficiente de dilatación del hilo. La ecuación que liga los desarrollos inicial y final es:

$$d_2 = d_1 \left(1 + D\,\Delta\, t + p\, \frac{Y_2 - Y_1}{E\,\omega} \right).$$

El segundo término dentro del paréntesis valúa la dilatación térmica del hilo, y el tercero, su acortamiento elástico, debido a la variación de tensión. Este término es de signo contrario al anterior.

Hemos visto (pág. 299) que la ordenada media $Y = a/\cos \omega$, con lo cual la ecuación puede ser puesta en la forma:

$$d_2 - d_1 = d_1 \left(D\,\Delta\, t + \frac{p}{E\,\omega}\, \frac{a_2 - a_1}{\cos \gamma} \right);$$

$p\, d_1 = P$ es el peso total del hilo en el vano $\dfrac{d \cos \gamma}{L} - 1 = \varepsilon = 1/24\,\alpha^2$. Sustituyendo valores y despejando el de α_2, tendremos:

$$\alpha_2 = \sqrt{\frac{E\,\omega}{24}} \times \frac{1}{\sqrt{E\,\omega\,\varepsilon_1 + E\,\omega\,\delta\, D\,\Delta\, t + P\,(\alpha_1 - \alpha_2)}} \quad [14, a]$$

Esta ecuación se resuelve por tanteos, suponiendo como primera aproximación $\alpha_2 = \alpha_1$, y en ella representa ε_1 el exceso del desarrollo inicial sobre la cuerda; el segundo sumando, lo que aumentó ese exceso por incremento de temperatura, y el término último, el acortamiento elástico debido a la diferencia de tensiones inicial y final.

Ejemplo: Vano horizontal de 50 m. de luz. Flecha máxima, 1,60 m. Hilo de cobre de 4 mm. de diámetro. Sección = 12,56 mm.^{2} Coeficiente de elasticidad, E = 12.000 Kg./mm.^{2} Coeficiente de dilatación, $D = 17 \times 10^{-6}$.

Hipótesis de solicitación:

1.ª Peso propio, más el del manguito de nieve de 8 cm. de diámetro y densidad 0,1. Temperatura —10°.

2.ª Peso propio y temperatura — 10°.
3.ª " " " + 15° (tendido).
4.ª " " " + 40°

(Se prescinde de la acción del viento por ser inferior a la del manguito de nieve.)

Primera hipótesis: De la ecuación [9, *a*] (página 299) se deduce:

$$a = L^2/8f = \frac{2.500}{8 \times 1,5} = 208 \text{ m.}$$

Peso por metro lineal; propio $= 0,1256 \times 9 = 0,113$ Kg.
" " " nieve $100 \times 3,14 \times 0,08^2/_4 = 0,500$ "

0,613 "

Tensión máxima $= 208 \times 0,613 = 128$ Kg.
Tensión unitaria $= 128/12,56 = 10,2$ Kg./mm.^{2}

Segunda hipótesis: En la ecuación [13, *c*] (página 301) los valores numéricos son los siguientes:

$$\alpha_1 = 208/50 = 4,16; \quad E\,\omega = 12.000 \times 12,56 = 150.000 \text{ Kg.}$$

$$\sqrt{\frac{150.000}{24}} = 79; \quad \varepsilon_1 = \frac{1}{24 \times 4,16^2} = 24,3 \times 10^{-4}$$

$$E\,\omega\,\varepsilon_1 = 15 \times 24,3 = 364 \text{ Kg.}; \quad P_1 = 50 \times 0,613 = 30,6 \text{ Kg.}$$

$$P_2 = 50 \times 0,113 = 5,6 \text{ Kg.}$$

Como primera aproximación se supone $\alpha_1 = \alpha_2$,

$$P_1\,\alpha_1 = 30,6 \times 4,16 = 127,5 \text{ Kg.}; \quad P_2\,\alpha_1 = 5,6 \times 4,16 = 23,3 \text{ Kg.}$$

y el primer tanteo da:

$$\frac{79}{\sqrt{364 - 127,5 + 23,3}} = 4,9 = \alpha_2; \quad P_2\,\alpha_2 = 4,9 \times 5,6 = 27,4 \text{ Kg.},$$

valor que, introducido de nuevo en la ecuación, nos da otro de $\alpha_2 = 4,87$, que tomamos como definitivo.

El valor de la flecha en este caso es:

$$f = 50/8 \times 4,87 = 1,29 \text{ m.}$$

Tercera hipótesis:

$$\text{Peso total} = P = 5,6 \text{ Kg.}; \quad t_2 - t_1 = \Delta t = 25°;$$
$$\varepsilon = 1/24 \times 4,87^2 = 17,6 \times 10^{-4};$$
$$E\,\omega\,\delta\,D\,\Delta t = 150.000 \times 17 \times 10^{-6} \times 25 = 64 \text{ Kg.}$$

(Suponemos que el desarrollo unitario proyectado sobre la horizontal δ es la unidad en lugar de ser 1,0017.)

Primer tanteo (alfas iguales):

$$\alpha_2 = \frac{79}{\sqrt{262 + 64}} = 4,37; \quad \alpha_1 - \alpha_2 = 0,5; \quad P(\alpha_2 - \alpha_1) = -2,6 \text{ Kg.}$$

Con este nuevo valor calculamos de nuevo el de α_2, y hallamos 4,4, que tomamos como definitivo.

La flecha correspondiente a la temperatura de 15° es $f = 50/8 \times 4,4 = 1,42$ m.

Cuarta hipótesis: Se calcula lo mismo que la anterior, doblando la diferencia de temperaturas, que es ahora de 50°.

$$\frac{79}{\sqrt{262 + 128}} = 4,0.$$

La aproximación siguiente se toma ya como valor definitivo de α_2, y es 4,02, al cual corresponde flecha de 1,56 m.

(*Continuará.*)