APLICACIONES DE LA TERMODINÁMICA EN EL ESTUDIO DE LA DEFORMACIÓN DE LAS ESTRUCTURAS

POR FÉLIX VALDÉS PATAC, INGENIERO DE CAMINOS

Terminamos en el presente artículo el notable trabajo comenzado en nuestro número anterior, en el que se acaba de desarrollar este tema, que ofrece indudables e interesantes novedades.

(Continuación.)

El segundo término del segundo miembro de [46] tiene muy poca importancia, como veremos al tratar del coeficiente de elasticidad para una transformación adiabática, por lo que se puede poner muy aproximadamente $C\mathcal{T} \simeq C_z$, que además supondremos constante.

La función $W(z\,T)$ es, en este caso,

$$W(z\,T) = \int_L^Z P\,dz = -\frac{E\,S}{L}\,\frac{(z-L)^2}{2}, \qquad [47]$$

y para la energía libre resulta:

$$F(z\,T) = E_0 + Cz(T - T_0) - T S_0 - C z\,T\,L\,\frac{T}{T_0} + \frac{E\,S}{L}\,\frac{(z-L^2}{2}, \qquad [48]$$

y para la entropia:

$$S(z\,T) = S_0 + C_z\,L\,\frac{T}{T_0} - \left[-\frac{E\,S}{L^2}\,\frac{(z-L)^2}{L_2} - \frac{E\,S}{L}(z-L)\right]\frac{\partial L}{\partial T}, \qquad [49]$$

o sea:

$$S(z\,T) = S_0 + C_z\,L\,\frac{T}{T_0} + \frac{E\,S}{L^2}\,.\,\alpha\,L_0\,.\,\frac{(z^2 - L^2)}{2}. \qquad [50]$$

Para calcular T en función de z, en una transformación adiabática, podemos suponer que $L \simeq L_0$, y se tendrá para T:

$$T = K\,l^{-\frac{\alpha}{c_z}\times\frac{E\,S}{L_0}\,\frac{(z^2 - L^2_0)}{2}} \qquad [51]$$

en la que la constante K depende de T_0 y $(S - S_0)$, pues es $K = T_0\,l^{\frac{S - S_0}{cz}}$.

Para el coeficiente de elasticidad isotérmico, se tiene:

$$\varepsilon = \frac{\partial P}{\partial_2} = -\frac{E\,S}{L}, \qquad [52]$$

y el adiabático según [39]:

$$\varepsilon_{ad} = -\frac{E\,S}{L} - \frac{T}{C_z}\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)^2 = -\frac{E\,S}{L} - \frac{T}{C_z}\left(\frac{E\,S}{L^2}\,\alpha\,L_0\,z\right)^2. \qquad [53]$$

Esta expresión puede transformarse como sigue:

$$\varepsilon_{ad} = -\frac{E\,S}{L}\left(1 + \frac{T}{C_z}\,\frac{E\,S}{L^3}\,\alpha^2\,L^2_0 \times z^2\right). \qquad [54]$$

Para apreciar la diferencia entre ambos coeficientes, supondremos que las condiciones son las iniciales, es decir, $z = L_0$ y $T = T_0$, pues en general, como se ve, dependen del estado elástico actual de la barra, definido por el valor de z, o longitud de la barra, ya que T, por la [51], es función de z.

La capacidad calorífica se refiere al volumen total, $S\,L_0$, y en función del calor específico, o capacidad por metro cúbico, será $C_z = S\,L_0\,C$, y considerando el coeficiente de elasticidad por unidad de sección y de longitud, se tendrá:

$$E_{ad} = \frac{L}{S}\,\varepsilon_{ad} = -E\left(1 + \frac{T_0}{c}\,E\,\alpha^2\right). \qquad [55]$$

Aplicándolo al hierro, se tiene:

$$E = 2 \times 10^7\ \text{Tn./m.}^2;\ \alpha = 10^{-5}$$

por grado. La temperatura inicial supondremos que sea de 15°; o sea $T_0 = 273 + 15 = 288$. La capacidad del hierro, en calorías por Kg., es de 0,114, que expresada en kilográmetros (1 $K\,C <> 427$ Kg. m.), será $0{,}114 \times 427 \simeq 48{,}7$, y tomando como densidad del hierro 7,8, resulta para la capacidad por m.³ (expresada en Tn. × m.) $C \simeq 380$, quedando para el valor del segundo término del [55]:

$$\frac{288}{380} \times 2 \times 10^7 \times 10^{-10} = 1{,}5 \times 10^{-3},$$

que representa una variación de 3×10^4 Tn./m.² en más sobre el valor obtenido isotérmicamente, que es, prácticamente, inapreciable.

Para un cálculo aproximado de la variación de la temperatura, se deduce para el exponente de la expresión [51], teniendo en cuenta la expresión [43']:

$$z^2 = L^2 \left[1 - 2\frac{P}{ES} + \left(\frac{P}{ES}\right)^2\right],$$

y despreciando $\left(\frac{P}{ES}\right)^2$, resulta $\frac{z^2 - L^2}{z} = -L^2\frac{P}{ES}$ y para el exponente:

$$\frac{\alpha}{c^2} \times \frac{ES}{L_0} L^2_0 \frac{P}{ES} = \frac{\alpha}{c} \times \frac{P}{S};$$

y como $\alpha = 10^{-5}$, $C = 380$, suponiendo $\frac{P}{S} = 10$ kilogramos por mm.^{2}, resulta, finalmente,

$$T = T_0 l^{2,6 \times 10-4},$$

y desarrollando la exponencial:

$$T - T_0 = T_0 \times 2,6 \times 10^{-4} = 288 \times 2,6 \times 10^{-4} = 0,075^\circ.$$

La variación no llega, pues, a una décima de grado, siendo elevación, si se ejerce una compresión, y un descenso, si una tracción.

Esta variación de temperatura no es prácticamente observable, y quedará seguramente encubierta por la variación debida al calor desarrollado por histeresis elástica.

En las estructuras, fundándose en la ley de Hooke, se determinan los desplazamientos (y^i) como funciones lineales de las fuerzas (Y_i) aplicadas. De estas expresiones se pueden despejar las (Y_i) en función lineal de las y, es decir, que, dados los desplazamientos, se pueden calcular las fuerzas que los producen.

En las (Y_i) se comprende tanto las fuerzas horizontales como las verticales, así como los momentos, representando las (y^i) los desplazamientos correspondientes, o los giros.

Los puntos en que no varíen las (y^i), los llamaremos puntos hiperestáticos. Para hacer la estructura isostática, supondremos que todas las y^i son variables, excepto seis.

Designaremos: por y^i_0, las variables que definen la estructura para el estado inicial, o de construcción, en el que la temperatura es T_0, y no existe ningún esfuerzo, si no hay fuerzas exteriores aplicadas. Por y_T el valor de las variables, cuando la temperatura es T, y se considera la estructura isostática y sin fuerzas exteriores aplicadas. Y, por último, por y_{TH} cuando se considere la estructura a la temperatura T y sostenida hiperestáticamente y sin fuerzas exteriores.

Para la temperatura T_0 las n fuerzas exteriores, incluídas las reacciones, podrán expresarse en función de las deformaciones por las n ecuaciones lineales, en las que están comprendidas las de la estática,

$$Y_i = \varepsilon^0{}_{ir}(y^r - y^r{}_0), \qquad [56].$$

dependiendo las $\varepsilon^0{}_{ir}$ de T_0.

Si se suponen m puntos hiperestáticos, existirán m desplazamientos, $y^r = y^r{}_0$ conocidos, y $n - m$ desconocidos, y entre las fuerzas $n - m$ conocidas, que son las aplicadas, y m desconocidas, que son las reacciones, y por lo tanto, de [56] podrán calcularse las m fuerzas y los $n - m$ desplazamientos desconocidos, en función de las $n - m$ fuerzas y los m desplazamientos conocidos.

Para la temperatura T se tendrán de una manera semejante:

$$Y'_i = \varepsilon_{ir}(y^r - y^r_T), \qquad [57]$$

dependiendo las ε_{ir} de T, así como las y^r_T.

Para calcular las reacciones hiperestáticas, debidas sólo a un cambio de temperatura, tendremos que hacer en [57] m desplazamientos y^r iguales a $y^r{}_0$, y $n - m$ fuerzas en el primer miembro iguales a cero y resolver el sistema calculando las m reacciones y los $n - m$ desplazamientos y_{TH} desconocidos en función sólo de T. Llamando R_i a las reacciones debidas a la temperatura, se tendrá:

$$R_i = \varepsilon_{ir}(y^r_{TH} - y^r_T). \qquad [58]$$

(En [58], m y'^r_{TH} son iguales a las $y^r{}_0$, y $n - m$, R_i iguales a cero).

Para obtener las reacciones debidas sólo a las fuerzas exteriores, basta restar de las [57] las expresiones [58], y haciendo $Y_i = Y'_i - R_i$, resulta:

$$Y_i = \varepsilon_{ir}(y^r - y^r_{TH}), \qquad [59]$$

siguiendo en [59] un método análogo al usado para determinar las R_i.

Lo que corrientemente se hace para determinar las R_i en [58], es considerar las ε_{ir} iguales a las $\varepsilon^0{}_{ir}$, o sea, los coeficientes correspondientes a la temperatura T_0, e igualmente en [59], para determinar las reacciones debidas a las fuerzas exteriores.

Para la función $W(y\,T)$, que interviene en la energía libre y que representa el trabajo isotérmico, se tendrá:

$$W(y\,T) = \int_{y_{TH}}^{y} \varepsilon_{ir}(y^r - y^r_{TH})\, dy^i = \qquad [60]$$

$$= \frac{1}{2}\varepsilon_{ir}(y^i - y^i_{TH})(y^r - y^r_{TH}).$$

La capacidad calorífica de la estructura, o sea, el calor necesario que hay que suministrar a la estructura para elevar su temperatura un grado, depende de la manera de estar sustentada, según indica la fórmula [26], pues en el caso de que esté sostenida isostáticamente y las fuerzas exteriores sean nulas, las $\left(\frac{d y^i}{d T}\right)_x$ que en ella figuran serán las derivadas de las $y^i{}_T$ respecto a T. En cuanto a las $\frac{\partial Y_i}{\partial T}$, se obtendrán de [57], considerando a las (y^r) constantes, y en las expresiones obtenidas, haciendo $y^r = y^r{}_T$ que corresponden al valor cero de las Y_i.

Para el caso hiperestático, las $\left(\frac{d y^i}{d T}\right)_x$ son $\left(\frac{d y^i_{TH}}{d T}\right)$ y en las $\frac{\partial Y_i}{\partial T}$ habrá que hacer $y^r = y^r{}_{TH}$.

Esta última capacidad calorífica es la que, en la determinación de la energía libre, se designó por $C_{\mathfrak{T}}$, que, en general, dependerá de T, y que muy aproximadamente puede considerarse igual a C_y, o sea, a la capacidad para desplazamientos nulos, que es igual al calor específico del material, multiplicado por el peso específico y por el volumen total de la estructura.

Con estas convenciones se obtienen, para la energía libre de la estructura, haciendo $C_{\mathfrak{T}} = C =$ const.:

$$F(y\,T) = E_0 + C\,(T - T_0) - S_0\,T - C\,L\,\frac{T}{T_0} - \\ - \frac{1}{2}\,\varepsilon_{i\,r}\,(y^i - y^i_{TH})\,(y^r - y^r_{TH}), \qquad [61]$$

y para la entropia:

$$S = S_0 + C\,L\,\frac{T}{T_0} + \frac{1}{2}\,\dot{\varepsilon}_{i\,r}\,(y^i - y^i_{TH})\,(y^r - y^r_{TH}) - \\ - \varepsilon_{i\,r}\,(y^i - y^i_{TH})\,\dot{y}_{TH}. \qquad [62]$$

(Los puntos superiores indican derivación respecto a T).

La expresión [62], que da la variación de la temperatura en las adiabáticas, en general resulta complicada, no pudiendo llegar a una expresión explícita, a no ser introduciendo hipótesis simplificadoras.

Para determinar la expresión de Φ, energía libre a fuerzas constantes, se tiene que añadir a F la expresión $Y_i\,y^i$, y eliminar las (y^i), expresándolas en función de las (Y_i).

Para determinar la expresión de las (y^i) en función de las (y_i), basta resolver el sistema [59], y suponiendo que ε^{ir} son los menores normalizados del determinante $|\varepsilon_{i\,r}|$, se tendrá:

$$y^i = y^i_{TH} + \varepsilon^{i\,r}\,Y_r, \qquad [63]$$

y para la expresión de Φ, será:

$$\Phi = F + Y_i\,y^i = f(T) - \frac{1}{2}\,\varepsilon^{i\,r}\,Y_i\,Y_r + \\ + Y_i(y^i_{TH} + \varepsilon^{i\,r}\,Y_r); \qquad [64]$$

o sea:

$$\Phi = f(T) + \frac{1}{2}\,\varepsilon^{i\,r}\,Y_i\,Y_r + Y_i\,y^i_{TH}, \qquad [65]$$

en la que se comprueba fácilmente que $\frac{\partial \Phi}{\partial Y_i} = y^i$ y que $\frac{\partial \Phi}{\partial T} = - S$.

En las expresiones [61] y [65] no intervienen, explícitamente, las reacciones que producen un trabajo nulo; su intervención en la energía del sistema sólo es indirecta, por medio de la capacidad calorífica, que varía con el modo de sustentación.

En los puntos isostáticos, o puntos fijos que han servido para determinar las $(y^i{}_T)$, se tiene $y^i = y^i_T = y^i_{TH} = y^i_0$, y resolviendo las ecuaciones [58], que sirven para determinar las reacciones térmicas, se tiene, para los puntos isostáticos:

$$\varepsilon^{i\,r}\,R_r = 0. \qquad [66]$$

Las ecuaciones [66] son en número de seis y representan las ecuaciones de la estática que han de verificar la reacción R_i

En los puntos hiperestáticos se tiene $y^i = y^i{}_{TH} = y^i{}_0$, y resolviendo las ecuaciones [59], resulta:

$$\varepsilon^{i\,r}\,Y_r = 0. \qquad [67]$$

El número de ecuaciones en [67] es m, y sirven para determinar las m reacciones debidas a las fuerzas exteriores, en función de las mismas, y en ellas están incluídas las ecuaciones de la estática.

Las leyes de la termodinámica permiten también estudiar la estabilidad de los sistemas, o condiciones necesarias de equilibrio, o sea, cuando se producirá el pandeo.

Para ello, consideremos una ampliación del concentro de la entropia o del segundo principio de la termodinámica, empezando por la noción de evolución reversible general.

Si en el ejemplo de la carga eléctrica suponemos que al principio de su movimiento se aplica una fuerza exterior menor que la fuerza interna, la carga se acelerará, adquiriendo energía cinética, y si antes de llegar al punto final se aplica una fuerza exterior mayor que la interna, que frene la carga, podremos llegar al final sin velocidad, y por lo tanto, se obtiene el mismo trabajo que por el primer procedimiento, pero el sentido de movimiento no se puede aquí alterar por una variación pequeña de las condiciones exteriores.

En este caso se dice que la evolución es reversible, pero no directa, como en el primer caso.

En los sistemas térmicos ocurre algo parecido, diciéndose que una evolución del estado 1 al 2 es reversible, si el trabajo recogido al pasar de 1 a 2 es suficiente para hacer volver el sistema del 2 al 1, aunque no sea por el mismo camino, en lo que se distingue de la reversibilidad directa, en la que puede volverse por el mismo camino, recogiéndose en cada punto de la evolución de retroceso un calor y un trabajo iguales a los recogidos en la ida, pero de signos contrarios.

Para expresar el verdadero contenido del segundo principio, consideremos el sistema que evoluciona según un ciclo, que simbólicamente se representa por el A 1, B 2 A de la figura 2.

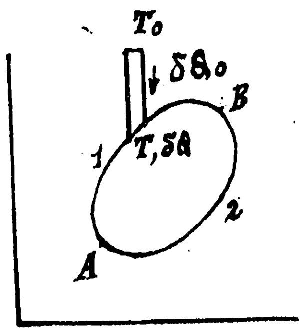

Figura 2.ª

En cada punto del ciclo es necesario suministrar una cantidad de calor, δQ, a la temperatura T, variable de un punto a otro del ciclo, haciendo, por lo tanto, falta una infinidad de focos caloríficos a diferentes temperaturas.

Para obviar esta infinidad de focos, consideremos un foco único, f_0, de capacidad infinita, o sea, que su temperatura no varía cuando se le quite o ceda calor en cantidad finita, a la temperatura T_0, y una serie de aparatos ideales, que funcionen según un ciclo de Carnot, que, tomando del foco f_0, la cantidad de calor δQ_0, a la temperatura T_0, suministren al sistema la cantidad de calor, δQ, a la temperatura T, que corresponde a la del foco que sustituye. Para cada punto del ciclo existirá un aparato auxiliar, y se tendrá, para cada uno:

$$\frac{\delta Q_0}{T_0} = \frac{\delta Q}{T}$$

por las propiedades del ciclo de Carnot.

Y para el ciclo completo:

$$\frac{Q_0}{T_0} = \int_0 \frac{\delta Q}{T}. \qquad [68]$$

Q_0 es, pues, el calor suministrado por el foco f_0, a la temperatura constante T_0, al conjunto del sistema y de los aparatos auxiliares, por intermedio de éstos.

Una vez recorrido el ciclo, tanto los aparatos auxiliares como el sistema, han vuelto a su posición primitiva, y tendrán la misma energía interna que al principio del mismo, y en virtud del primer principio se tendrá, llamando $\mathcal{T}_0$ al trabajo efectuado por el conjunto:

$$Q_0 = \mathcal{T}_0. \qquad [69]$$

Pueden presentarse tres casos, según el signo de $\mathcal{T}_0$, o sea, según que sea mayor, igual o menor que cero.

Si $\mathcal{T}_0$ fuera mayor que cero, se habría recogido un trabajo en beneficio del exterior, a expensas del calor suministrado por un foco "único", de temperatura constante. La posibilidad de este caso es la que niega el segundo principio de la termodinámica, y es su contenido general.

Si este principio no fuera cierto, se podría, por ejemplo, aprovechar el calor contenido en el agua del mar para mover los barcos que navegaran por él, y otras cosas por el estilo, que harían cómodo y beneficioso el que no se verificara.

Resulta, en virtud de este principio, que para cualquier evolución de un sistema, $\mathcal{T}_0 \leqq 0$, y de [69], también $Q_0 \leq 0$.

Si se verifica $\mathcal{T}_0 = Q_0 = 0$, la evolución entre dos puntos cualesquiera del ciclo será reversible, pues puede volver cuando, por ejemplo, el sistema evolucione de A 1 B, al punto de partida sin consumir trabajo del exterior. Y teniendo en cuenta [68] para este caso de reversibilidad, resulta:

$$\int_0 \frac{\delta Q}{T} = \int_{A1B} \frac{\delta Q}{T} + \int_{B2A} \frac{\delta Q}{T} = 0; \qquad [70]$$

o sea:

$$\int_{A1B} \frac{\delta Q}{T} = \int_{A2B} \frac{\delta Q}{T}; \qquad [71]$$

luego el valor de la integral $\int_A^B \frac{\delta Q}{T}$, para una evolución reversible cualquiera, directa o no, es independiente del camino seguido, y sólo función, por lo tanto, de las coordenadas de los puntos A y B.

Esto, como ya hemos hecho anteriormente, define la función entropia por la relación

$$S_B - S_A = \int_A^B \frac{\delta Q}{T}. \qquad [72]$$

Inversamente, si $\int_0 \frac{\delta Q}{T}$ es cero, el ciclo es reversible en virtud de [68] y [69].

Si $\mathcal{T}_0$ es negativo, lo que indica que ha habido que suministrar trabajo del exterior para hacer recorrer al sistema el ciclo, y que se transformó en calor que se cedió al foco f_0, la evolución en todo o en parte del ciclo ha sido irreversible.

Consideremos ahora una evolución cualquiera, reversible o no, del sistema del punto A al B, por ejemplo, la A 1 B, y luego hagamos volver al sistema del punto A por una evolución reversible, tal como la $B\,2\,A$, formándose un ciclo para el cual se tendrá:

$$\oint \frac{\delta Q}{T} \leq 0; \qquad [73]$$

o sea:

$$\int_{A1B} \frac{\delta Q}{T} + \int_{B2A} \frac{\delta Q}{T} \leq 0. \qquad [74]$$

Pero por ser la $B\,2\,A$ reversible, se tendrá, en virtud de [72]:

$$\int_{A1B} \frac{\delta Q}{T} \leq S_B - S_A. \qquad [75]$$

El signo menor es válido si la evolución $A\,1\,B$ es irreversible, y el igual, si es reversible.

Conociendo el estado A y B del sistema, se puede calcular en cada uno el valor de la función S, y conocer el valor de $(S_B - S_A)$, mientras que, para conocer el valor del primer miembro de [75], tendremos que medir el calor intercambiado realmente por el sistema, en cada punto de la evolución $A\,1\,B$, a la temperatura T. Si entre los dos valores así calculados existe desigualdad, la evolución $A\,1\,B$ es irreversible, y si igualdad, reversible.

Si la evolución es una adiabática, resultará, ya que $\delta Q = 0$:

$$S_B - S_A \geq 0; \qquad [76]$$

luego en una evolución adiabática, la entropia aumenta o permanece constante. Si, además, es una evolución reversible, la entropia permanece constante y, por lo tanto, las adiabáticas reversibles son isentrópicas.

Se deduce también de [75] que, si la entropia en B es menor que en A, para pasar del estado A al B ha de intercambiarse necesariamente calor con el exterior.

Considerando una evolución infinitamente pequeña, se deduce de [75]:

$$d\,S \geq \frac{\delta Q}{T}; \qquad [77]$$

o sea:

$$T\,d\,S \geq \delta Q. \qquad [78]$$

El signo mayor es válido para una evolución irreversible, y el igual, para una reversible, indicando la relación [78] que, en una evolución reversible, el calor intercambiado con el exterior es mayor que en una irreversible entre los mismos estados.

En virtud del primer principio, se tiene:

$$d\,E = \delta Q - \delta \mathfrak{T}; \qquad [79]$$

y combinando [78] y [79], resulta:

$$d\,E \leq T\,d\,S - \delta \mathfrak{T}; \qquad [80]$$

o sea, recordando la definición de energía libre $F = E - S\,T$:

$$d\,F + S\,d\,T \leq - \delta \mathfrak{T}; \qquad [81]$$

y de aquí se deduce:

$$\delta \mathfrak{T} \leq - d\,F - S\,d\,T. \qquad [82]$$

La expresión [82] contiene los dos principios de la termodinámica en toda su generalidad, para evoluciones reversibles, en las que se verifica el signo igual, e irreversibles, con el signo menor.

En la expresión [82], el primer miembro $\delta \mathfrak{T}$, está expresado en función de las fuerzas exteriores realmente aplicadas al sistema, mientras que el segundo miembro es una expresión en función de lo que denominamos fuerzas internas o de reacción del sistema. Recordaremos que se designa por Y^e_i las fuerzas externas, que pueden ser funciones de las (y^i), que definen el estado del sistema, y simplemente por (Y_i), las fuerzas internas, estando sus sentidos positivos dirigidos en sentidos contrarios.

El sistema térmico suele estar relacionado mecánicamente con otros sistemas externos, que imponen el trabajo externo realmente efectuado por él.

El trabajo suministrado al sistema externo depende de las fuerzas que éste ejerza sobre el sistema térmico. En general, estas fuerzas dependerán también de las variables de desplazamiento, y sólo consideraremos el caso en que además deriven de un potencial.

Estos sistemas externos los denominaremos sistemas acumuladores, pues cuando vuelven al punto de partida devuelven al sistema térmico el trabajo de él recogido. Tales son, por ejemplo, la atmósfera que actúa por su presión sobre la cara externa de un émbolo en el caso de un gas, el peso propio de una estructura, así como cualquier fuerza que permanezca constante.

Además de este sistema acumulador pueden existir mecanismos que recojan el trabajo que produce el sistema, sin devolvérselo. Este trabajo se denomina trabajo técnico, pues es el que realmente se aprovecha.

Por lo tanto, el trabajo total del sistema podrá escribirse:

$$\delta \mathfrak{T} = d\,A + \delta_t\,\mathfrak{T}, \qquad [83]$$

representando $d\,A$ el trabajo acumulado, y $\delta_t\,\mathfrak{T}$, el técnico.

La relación [82] podrá, por lo tanto, escribirse:

$$d\,F + d\,A + S\,d\,T \leq - \delta_t\,\mathfrak{T}. \qquad [84]$$

Consideremos ahora el equilibrio del sistema térmico, suponiendo que sólo se trata de posiciones o estados de equilibrio relativo respecto a los estados infinitamente próximos.

Los posibles desplazamientos infinitésimos del sistema tendrán que satisfacer a las condiciones exteriores de evolución del sistema.

Dos son los tipos de evoluciones más importantes: las isotérmicas y las adiabáticas.

Supondremos primeramente las evoluciones isotérmicas en las que constantemente $d\,T = 0$, y, además, que el sistema térmico esté unido solamente a un sistema acumulador, o sea, $\delta_t \mathcal{T} = 0$.

Los desplazamientos infinitésimos tendrán entonces que satisfacer a la relación, llamando $F + A = \Phi$:

$$\Delta\,\Phi = \delta\,\Phi + \delta^2\,\Phi + \ldots \leq -\,\delta_t\,\mathcal{T}, \qquad [85]$$

poniendo de manifiesto los términos de diferentes órdenes infinitésimos, y representando $\delta\ \mathcal{T}$ el trabajo realmente efectuado, si existiera, otro que el acumulado, que es impuesto al sistema por las condiciones exteriores.

Considerando los términos de primer orden, resulta, ya que $\delta_t\ \mathcal{T} = 0$:

$$\delta\,\Phi \leq 0. \qquad [86]$$

Si a partir del punto de equilibrio existen desplazamientos de manera que las variaciones $\delta\,y^i$, que las representa, satisfacen [86] con el signo menor, serán desplazamientos irreversibles y el sistema no podrá volver al punto de equilibrio, sin trabajo exterior, no siendo, por lo tanto, un punto de equilibrio estable.

Luego los puntos de equilibrio estables sólo se encontrarán en aquellos puntos a partir de los cuales todos los desplazamientos infinitésimos posibles sean reversibles, equivalente a que en [86] se verifique la igualdad, cualquiera que sean las $\delta\,y^i$.

Esto exige que en el punto de equilibrio se verifiquen las ecuaciones

$$\frac{\partial\,\Phi}{\partial\,y_i} = 0; \qquad [87]$$

o sea:

$$\frac{\partial\,F}{\partial\,y_i} + \frac{\partial\,A}{\partial\,y_i} = -\ Y_i + Y_i^e = 0, \qquad [88]$$

que expresa que las fuerzas exteriores han de ser iguales a las interiores en el punto de equilibrio, y de sentido contrario, por la convención que hemos hecho sobre los signos de las mismas.

Estas condiciones son necesarias, pero no suficientes. Para determinar éstas, consideremos los términos de segundo orden $\delta^2\,\Phi$, que es una forma cuadrática en las variaciones $\delta\,y^i$.

Si $\delta^2\,\Phi$ es definida y negativa, resulta que para cualquier desplazamiento $\delta^2\,\Phi < 0$, y serán desplazamientos irreversibles, no existiendo equilibrio estable.

Lo mismo ocurre si $\delta^2\,\Phi$ es una forma indefinida, pues existirán desplazamientos para los que $\delta^2\,\Phi < 0$.

Si $\delta^2\,\Phi$ es definida y positiva, se tendrá para cualquier desplazamiento $\delta^2\,\Phi > 0$, y la relación [85] exige que $\delta_t\ \mathcal{T}$ sea negativa; es decir, que tendrá que producir un trabajo al exterior, para un desplazamiento del sistema, y como éste, por hipótesis, es nulo, no existirá tal desplazamiento, siendo la posición de equilibrio estable.

La condición suficiente es, pues, que Φ sea mínimo para el punto de equilibrio estable.

La expresión de $\delta^2\,\Phi$, es:

$$\delta^2\,\Phi = \left(\frac{\partial^2 F}{\partial\,y^i\,\partial\,y^r} + \frac{\partial^2 A}{\partial\,y^i\,\partial\,y^r}\right)\delta\,y^i\,\delta\,y^r. \qquad [89]$$

De la relación [88] se deducen los valores de y^i en función de T, o bien si las Y_i^e son constantes, en función de estos valores y de T. Sustituídos estos valores en los coeficientes de la forma cuadrática [89], hace que sus coeficientes sean funciones sólo de T, o bien de T y de las (Y_i^e).

Las condiciones para que [89] sea definida y positiva, se deducen, según la teoría de formas cuadráticas, de la consideración de los signos del determinante

$$H_n = \left|\ \frac{\partial^2 F}{\partial\,y^i\,\partial\,y^r} + \frac{\partial^2 A}{\partial\,y^i\,\partial\,y^r}\ \right|, \qquad [90]$$

y de la cadena de monres principales H_i, que se obtienen de H_n, suprimiendo las $(n - i)$ últimas líneas y columnas.

Estas condiciones, en número de n, son que todos los H_i sean positivos.

Para valores de T que hagan negativo uno de los H_i, sobreviene el pandeo térmico, y si las Y_i^e son constantes, para un conjunto de valores de las Y_i^e, que hagan una H_i negativo, sobreviene un pandeo mecánico.

Para el caso en que las Y_i^e sean constantes, podemos considerar en el espacio de las Y^e las variedades, en número de n:

$$H_i = 0, \qquad [91]$$

que dividen el espacio de las Y_i^e en regiones, en alguna o algunas de las cuales tendrá que estar el punto representativo del conjunto de las Y_i^e para que el equilibrio sea estable, y que al traspasar sus fronteras sobreviene el pandeo.

Para el caso de estructuras y fuerzas exteriores constantes, H_n se convierte en

$$H_n = |\ -\ \varepsilon_{ir}\ |, \qquad [92]$$

en las que las ε_{ir} sólo dependen de T, y el pandeo será solamente térmico, y seguramente excepcional, pues en él no intervienen los valores ni las funciones que representan las fuerzas exteriores.

Para establecer, en este caso, un pandeo mecánico, en el que intervengan los valores de las fuerzas exteriores, es necesario establecer unas hipótesis de deformaciones en las que éstas no sean funciones lineales de las fuerzas, como ocurre en el pandeo de una barra por compresión.

Otra diferencia con el pandeo, tal como se estudia en la teoría de las estructuras, es que las fuerzas no están aplicadas en puntos fijos, sino que pueden ocupar una posición cualquiera dentro de ciertas partes de la estructura, como, por ejemplo, una fuerza normal en una barra, que puede ocupar una posición cualquiera en su longitud.

Esta fuerza no dependerá de un índice fijo, como Y_i, sino de un parámetro α, que fija la posición de la fuerza, siendo, por lo tanto, función de α_1 $Y = Y(\alpha)$. Para asimilarlo al caso de índice fijo, basta considerar un número N, muy grande, de fuerzas en los puntos correspondientes a N valores del parámetro α.

En los sistemas de ecuaciones lineales [58] y [59], figurarán un gran número de ecuaciones y de incógnitas, y cuando N tienda a infinito, estos sistemas tienden a sistemas con ecuaciones integrales.

En los razonamientos anteriores se ha supuesto que los desplazamientos eran los normales; pero puede también sobrevenir el pandeo porque aparezcan desplazamientos, o deformaciones, que no se tenían en cuenta primeramente. Tal es el caso del pandeo de una barra comprimida, en la que para estudiar el pandeo se supone que puede flectar.

Vamos a considerar este caso de la barra sometida a compresión.

Sabemos que la fuerza longitudinal es:

$$P = -\frac{ES}{e}(z - e),$$

y la condición de estabilidad, en este caso, es:

$$-\frac{\partial P}{\partial z} > 0,$$

o sea:

$$\frac{ES}{e} > 0,$$

lo que se satisface siempre para cualquier carga.

Esto indica que, dada la expresión de P, la estabilidad longitudinal de la barra está siempre asegurada.

Pero si se considera que la barra puede flectar, en su plano de simetría, entonces el estado de la barra no queda determinado por el conocimiento de z y T, sino que hace falta dar su directriz deformada, o sea la $y = f(x)$, que depende de P y de las posibles cargas normales que tuviera la barra.

Normalmente, se considera que P interviene en la flexión, produciendo en cada punto un momento igual a $-P\,y$. Para simplificar, consideraremos, aunque no sea un caso real, pero que sirve para ilustrar el procedimiento, que la influencia de P en la flexión de la barra está dada por un momento, localizado en un punto de abscisa α, y dado por $-P\,y^{1}$, siendo y_α la ordenada de la elástica en ese punto. Supondremos, además, que en ese punto existe una fuerza normal Y_α.

La barra se supone empotrada en un extremo y articulada en el otro, pudiendo deslizar; es decir, las condiciones en los límites son:

$$x = 0 \left.\begin{matrix} y = 0 \\ y' = 0 \end{matrix}\right\} \qquad x = 1 \left.\begin{matrix} y = 0 \\ M = 0 \end{matrix}\right\}$$

La elástica vendrá dada (A y M, fuerza y momento de reacción para $x = 0$).

Para $x < \alpha$:

$$E\,I\,y = A\frac{x^3}{\underline{|3}} + M\frac{x^2}{\underline{|2}},$$

y para $x > \alpha$:

$$E\,I\,y = A\frac{x^3}{\underline{|3}} + M\frac{x^2}{\underline{|2}} - Y_\alpha\frac{(x-\alpha)^3}{\underline{|3}} - P\,y_\alpha\frac{(x-\alpha)^2}{\underline{|2}},$$

y las condiciones en $x = 1$, para determinar A y M, son:

$$A\frac{e^3}{\underline{|3}} + M\frac{e^2}{\underline{|2}} - Y_\alpha\frac{(e-\alpha)^3}{\underline{|3}} - P\,y_\alpha\frac{(e-\alpha)^2}{\underline{|2}} = 0$$

$$A\,e + M - Y_\alpha(e-\alpha) - P\,y_\alpha = 0,$$

y llamando $\xi = \frac{e-\alpha}{e}$, se tiene:

$$M = Y_\alpha\,e\,.\,\frac{\xi^3 - \xi}{2} + P\,y_\alpha\frac{3\xi^2 - 1}{2}$$

$$A = Y_\alpha\left(\frac{3}{2}\xi - \frac{\xi^3}{2}\right) + P\,y_\alpha\frac{3}{2}(1 - \xi^2).$$

Para expresar Y_α en función de y_α y z, se tiene la condición que la ordenada en el punto $x = \alpha$ es $y = y_\alpha$, y se tendrá:

$$E\,I\,y_\alpha = A\frac{\alpha^3}{\underline{|3}} + M\frac{\alpha^2}{\underline{|2}},$$

y en función de Y_α y de P, se tiene:

$$E\,I\,y_\alpha = Y_\alpha\,A + P\,y_\alpha\,.\,B;$$

o sea:

$$Y_\alpha = \frac{1}{A}(E\,I\,y_\alpha - B\,.\,P\,y_\alpha).$$

La A tiene por expresión, en función de ξ:

$$A = -\frac{e^3(1-\xi)^3\,\xi^2\,(3+\xi)}{12} = -e^3 A_1,$$

siendo $A_1 \geq 0$, puesto que $0 \leq \xi \leq 1$, y, por lo tanto, A es una cantidad esencialmente negativa.

Para B se tiene:

$$B = e^2 \frac{\xi (1-\xi)^2}{4} (\xi^2 + 2\xi - 1).$$

B tiene diferentes signos, según el valor ξ, que son:

$$0 < \xi < \sqrt{2} - 1, \quad B_1 < 0$$
$$\sqrt{2} + 1 < \xi < 1 \quad , \quad B_1 > 0.$$

De la expresión de Y_α se deduce:

$$\frac{\partial Y_\alpha}{\partial z} = -\frac{B_1}{e^3 A_1} y_\alpha \times \frac{\partial(-P)}{\partial z} = -\frac{B_1 e^2}{e^3 A_1} \times \frac{ES}{e} \times y_\alpha,$$

y en cambio $\frac{\partial P}{\partial y_\alpha} = 0$, y como $\frac{\partial Y_\alpha}{\partial z} = \frac{\partial P}{\partial y_\alpha}$, se tendrá que modificar la expresión de P para que se cumpla esta relación, exigida por el teorema de la entropia.

Pondremos:

$$\frac{\partial P}{\partial y_\alpha} = -\frac{e^2 B_1}{e^3 A_1} \times \frac{ES}{e} y_\alpha,$$

y por integración se deduce $P = -\frac{B_1}{e A_1} \times \frac{ES}{e} \times \frac{y_\alpha^2}{z} + f(z)$, pudiendo ponerse, para expresión de P:

$$P = -\frac{ES}{e}\left(\frac{B_1}{e A_1} \; \frac{y_\alpha^2}{2} + z - e\right).$$

El término $\frac{B_1}{e A} \; \frac{y_\alpha^2}{z}$ representa la influencia, sobre la variación de la longitud de la barra, de la flexión.

En este caso, el hessiano resulta:

$$H_2 = \begin{vmatrix} -\frac{\partial Y}{\partial y} & -\frac{\partial Y}{\partial z} \\ -\frac{\partial P}{\partial y} & -\frac{\partial P}{\partial z} \end{vmatrix}$$

y las condiciones de estabilidad serán $-\frac{\partial P}{\partial z} > 0$, ó sea $\frac{ES}{e} > 0$, que se verifica siempre, y además,

$$\frac{\partial Y}{\partial y} \times \frac{\partial P}{\partial z} - \left(\frac{\partial Y}{\partial z}\right)^2 > 0,$$

que, desarrollada, da:

$$\frac{1}{e^3 A_1} (EI - e^2 B_1 P) > 0.$$

Si suponemos $B_1 > 0$, ó sea $\xi > 0{,}41$, se tendrá como condición:

$$\frac{EI}{e^2 B_1} > P.$$

Si P es negativa, caso de tracción, la estabilidad está asegurada, y si P es positivo, compresión, su valor absoluto tiene que ser menor que $\frac{EI}{e^2 B_1}$.

Esto puede verse también sobre la expresión de Y_α, pues suponiendo a P constante y dando una variación a y_α, se tiene para la variación de Y_α:

$$\delta Y_\alpha = -\frac{1}{e^3 A_1} (EI - e^2 B_1 P) \delta y_\alpha.$$

Si el paréntesis es positivo, al desplazar la barra en el punto $x = \alpha$ normalmente en δy_α, aparece una fuerza de reacción interna, que tiene sentido contrario al desplazamiento δy_α, y la barra vuelve a su posición primitiva. Por el contrario, si el paréntesis es negativo, la reacción interior tiende a hacer mayor el desplazamiento δy_α, pues tiene su mismo sentido. Las conclusiones anteriores son válidas, aunque existiera una flexión de la barra, producida por una fuerza normal Y_α.

Si el paréntesis es nulo, Y_α puede ser cero, sin que lo sea la y_α, y es un caso indeterminado que estudiaremos más adelante.

Para $B_1 = 0$ existe siempre estabilidad, pues se tiene $EI > 0$; pero este caso no corresponde a ningún caso real. Lo mismo ocurre cuando $B_1 < 0$, pues entonces la condición es, haciendo $B^1{}_1 = -B_0$, $EI + e^2 B'_1 P > 0$, ó sea $P > -\frac{EI}{e^2 B'_1}$, que significa que la compresión es siempre estable, mientras que la tracción es inestable para valores absolutos de $|P| > \left|\frac{EI}{e^2 B'_1}\right|$, lo que no corresponde a ningún caso conocido.

Esta aproximación y discusión sólo sirve, como se ha dicho, para ilustrar el método. Si consideramos $\xi = \frac{1}{2}$, se obtiene para $B_1 = \frac{1}{128}$, que daría una fuerza de pandeo unas seis veces mayor que la dada por el método de Euler, para el cual es $B_1 \approx \frac{1}{20{,}1}$.

En el caso en que $P = \frac{EI}{e^2 B_1}$, o sea para el valor crítico de la fuerza de compresión, se dice que existe un equilibrio indiferente, pues para este valor de P, aunque Y_α sea cero, existen dos formas de equilibrio, en una de las cuales $y_\alpha = 0$ y es una recta, o bien $y_\alpha \neq 0$ y es una figura flectada.

Para hacer el estudio comparativo de estas dos figuras de equilibrio, y estudiar la estabilidad de cada una de ellas, es necesario considerar más términos en el desarrollo de $\Delta \Phi$, además de los $\delta \Phi$ y $\delta^2 \Phi$.

Por ser el valor de P constante, se tiene entre las variaciones de y_α y z (se supone de ahora en adelante que $B_1 > 0$, $\xi > 0.41$), $\frac{B_1}{e A_1} y_\alpha \, \delta y_\alpha + \delta z = 0$, ó sea:

$$\delta z = - \frac{B_1}{e A_1} y_\alpha \, \delta y_\alpha.$$

Las derivadas de Φ son, ya que:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y_\alpha} = - Y_\alpha \quad y \quad \frac{\partial \Phi}{\partial z} = - P$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y_\alpha^2} = \frac{e}{e^2 A_1} (E I - P e^2 B_1) + \frac{B_1^2}{e^2 A_1} \times \frac{E S}{e} \times y_\alpha^2,$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y \partial z} = \frac{B_1}{e A_1} \times \frac{E S}{e} y_\alpha, \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = \frac{E S}{e}$$

$$\frac{\partial^3 \Phi}{\partial y_\alpha^3} = 3 \frac{B_1^2}{e^2 A_1^2} \times \frac{E S}{e} y_\alpha, \quad \frac{\partial^3 \Phi}{\partial y^2 \partial z} = \frac{B_1}{e_z A_1} \times \frac{E S}{e}$$

$$\frac{\partial^3 \Phi}{\partial y \partial z^2} = \frac{\partial^3 \Phi}{\partial z^3} = 0$$

$$\frac{\partial^4 \Phi}{\partial y_\alpha^4} = 3 \frac{B_1^2}{e^2 A_1^2} \times \frac{E S}{e},$$

y las demás, cero.

Para la variación segunda se tiene, recordando la expresión de δz:

$$\delta^2 \Phi = \frac{e}{e^3 A_1} (E I - P e^2 B_1) (\delta y_\alpha)^2,$$

que será positiva si el paréntesis lo es, y existirá estabilidad. En el caso que nos ocupa, este paréntesis es nulo y se tendrá $\delta^2 \Phi = 0$, teniendo que recurrir a la variación tercera, que es:

$$\delta^3 \Phi = 2 \frac{B_1^2}{e^2 A_1^2} \times \frac{E S}{e} y_\alpha (\delta y_\alpha)^2.$$

Supongamos la figura flectada, o sea $y_\alpha \neq 0$.

Si $y_\alpha > 0$, la $\delta^3 \Phi$ tendrá el signo de δy_α, y será positiva si lo es δy_α; es decir, que si se tiende a aumentar la flexión, la figura será estable para este género de desplazamiento. Si $\delta y_\alpha < 0$, ó sea, se tiende a disminuir la flexión, $\delta^3 \Phi < 0$, y para este desplazamiento es inestable, tendiendo hacia la figura recta. Las mismas consideraciones se pueden hacer si $y_\alpha < 0$.

Resulta, pues, que la figura flectada, cuando no existe la fuerza normal Y_α, es inestable y tiende hacia la recta.

Para la figura recta se tiene $y_\alpha = 0$, y por lo tanto, $\delta^3 \Phi = 0$, y se tendrá que considerar la cuarta variación, que es:

$$\delta^4 \Phi = 3 \frac{E S}{e} \times \frac{B_1^2}{e^2 A_1^2} (\delta y_\alpha)^4,$$

que es siempre positiva, y por lo tanto, estable.

Resulta que, para el valor crítico de P, sólo la recta es estable, si no existe una fuerza normal Y_α, no existiendo, por lo tanto, dos figuras de equilibrio para los mismos valores de las fuerzas exteriores.

Estas consideraciones creemos se pueden extender al estudio del pandeo en general, donde no se suele considerar más que la $\delta^2 \Phi$, con lo que resulta que hay que admitir la existencia de dos figuras de equilibrio para los mismos valores de las fuerzas exteriores, resultando, sin duda, del estudio de las $\delta^3 \Phi$ y $\delta^4 \Phi$, o más en caso necesario, que sólo una de ellas, o ninguna, es figura de equilibrio estable. Esto es aplicable para figuras de equilibrio muy próximas.

Volviendo al caso general de equilibrio, consideraremos el de un sistema que esté aislado térmicamente del exterior. Sus evoluciones sólo podrán ser adiabáticas, y, en virtud de la relación [76], las variaciones tendrán que satisfacer la relación impuesta por las condiciones exteriores:

$$\Delta S = \delta S + \delta^2 S + \ldots \geq \frac{\Delta Q'}{T}. \qquad [93]$$

$\Delta Q'$ es el valor realmente intercambiado con el exterior, si existiera este intercambio.

Un razonamiento semejante al hecho para el caso isotérmico nos dará para condiciones de primer orden en el punto de equilibrio ($\Delta Q' = 0$):

$$\delta S = 0, \qquad [94]$$

cualquiera que sean las δy^i y δT, lo que exige:

$$\frac{\partial S}{\partial y^i} = 0 \qquad \frac{\partial S}{\partial T} = 0, \qquad [95]$$

que también puede escribirse:

$$\frac{\partial Y_i}{\partial T} = 0 \quad C_y = 0. \qquad [96]$$

Las condiciones [96] son necesarias, y las suficientes son que $\delta' S$ sea definida y negativa, o sea, que S sea un máximo, pues un desplazamiento cualquiera hará $\delta^2 S < 0$, lo que exige que en la relación [93] $\Delta Q'$ exista, y sea negativo, lo que es imposible por las condiciones exteriores.

Considerando en [84] los términos de primer orden, para los que todos los desplazamientos que representen han de ser reversibles, se tendrá:

$$(-Y_i + Y_i^e)\,\delta y^i = 0, \qquad [97]$$

cualquiera que sean las δy^i, y por lo tanto:

$$Y_i = Y_i^e. \qquad [98]$$

De la ecuación [96] se deducen los valores de las y^i y T para el punto de equilibrio, que, sustituídas en [98], nos darán el valor de las fuerzas exteriores.

En el caso adiabático, el equilibrio es más restringido, pues no puede fijarse de antemano el valor de las fuerzas exteriores, como en el caso isotérmico.

El caso isotérmico y el adiabático están, respectivamente, comprendidos en dos casos más generales, en uno de los cuales se impone, como condiciones exteriores del sistema, el trabajo que ha de realizar realmente, aunque no sea isotérmico, y en otro se impone el calor que ha de intercambiar. Estos dos casos generales se tratarían de una manera semejante a la expuesta en los dos casos anteriores, siendo una generalización fácil.

* * *

Haremos ahora algunas consideraciones generales sobre el principio de la entropia, cuyo concepto es, quizá, de los menos intuitivos de la física.

Los principios de la termodinámica intervienen en todos los fenómenos en los que existen cambio de forma de la energía, interviniendo cuerpos reales formados de un gran número de sistemas elementales, átomos o moléculas. La presencia de un gran número de partes elementales en un sistema es condición necesaria para la validez y aplicación del segundo principio, o principio de la entropia, por lo que resulta que ésta es un concepto puramente estadístico en su esencia, aunque se manifieste macroscópicamente como una función de las variables, que definen el estado del sistema.

Este carácter estadístico, o de valores medios, lo tienen también las variables macroscópicas que definen el estado del sistema, por ejemplo, el volumen de los cuerpos o la presión de un gas; pero de su magnitud tenemos un conocimiento sensitivo, por estar directamente relacionadas con la clase o intensidad de la sensación que nos produce su presencia, y su concepto o comprensión nos parece, por esto, cosa evidente y fácil. Lo mismo puede decirse de la función temperatura, cuyo valor relacionamos con las sensaciones de frío o de calor.

La entropia no tiene relación con ninguna sensación, pareciendo, por esto, su concepto más obscuro y abstracto.

Para poder definir cómo se manifiesta la entropia, haremos algunas consideraciones que nos permitan comprenderlo más fácilmente.

Para sufrir una sensación o realizar una medida, es necesario que exista un intercambio de energía entre lo que causa la sensación y nosotros, o entre el sistema y el aparato de medida, siendo la cantidad de energía intercambiada de lo único que tenemos la sensación o medida, de donde, llevando las cosas al extremo, se podría decir que es sólo la energía la que tiene una existencia física real.

Pero la energía puede presentarse en diferentes formas, cada una de las cuales requiere un sentido o aparato de medida especial que permita el intercambio de energía en una forma determinada, o bien la transforme de manera que sea posible ese intercambio. Este intercambio mismo no es otra cosa que una transformación de la energía.

La agitación térmica, por ejemplo, se percibe por el tacto, pero puede dar lugar a radiaciones luminosas que percibiríamos por la vista.

Para poder expresar matemáticamente estas diferentes formas de energía, se acude a entes de razón o magnitudes auxiliares, cuyo conocimiento nos determina la energía del sistema, y cuya variación nos sirve para calcular la cantidad de la misma intercambiada o transformada. Pero en realidad, es la energía existente, o intercambiada, lo que determina el valor que se ha de dar a estas magnitudes auxiliares.

Tal es, por ejemplo, el campo eléctrico E. Lo que realmente tiene una existencia física es la magnitud representada por $\frac{E^2}{8\pi}\,d\,v$, ó energía contenida en el volumen $d\,v$.

Si se trata de medir E por medio de un pendulillo eléctrico, la medida de E nos la dará la de la desviación del mismo de la vertical. Las fuerzas que actúan sobre el péndulo son las fuerzas ponderomotrices, que son proporcionales a E^2 y a la superficie del péndulo, resultando que el trabajo o energía consumido en producir la desviación será proporcional, a *grosso modo*, a $E^2\,s\,x\,d$ (d, desviación medida como longitud del arco descripto por la masa que constituye el péndulo), energía que se habrá transformado en energía potencial de la masa del péndulo, y que es la energía intercambiada.

Suponiendo desviaciones pequeñas, resulta, para la energía potencial $M\,g\,\frac{d^2}{2\,e}$, que, igualada a la variación de la energía eléctrica, nos da $E^2 = K\,d$.

Queda así determinada la E cuando se conozca la d, pero estas dos magnitudes no representan otra cosa que la energía intercambiada, al efectuar la medida, correspondiendo cada una a una forma diferente de la energía intercambiada o transformada.

Esto puede generalizarse a toda clase de medidas.

Estas magnitudes, de las que nos parece tenemos una idea clara, aunque no tengan una realidad física, son de gran utilidad para el planteamiento de las ecuaciones que rigen los fenómenos físicos, pues resultan más sencillas que si se operara directamente con las energías, como ocurre, por ejemplo, en electricidad con las ecuaciones en las magnitudes E y las que resultarían de introducir E^2.

No siempre, sin embargo, pueden efectuarse los cálculos por la sola consideración de estas magnitudes auxiliares, teniendo que acudirse a ecuaciones energéticas, como en el cálculo de una viga que ha de resistir por flexión al impacto de un peso que cae desde una cierta altura sobre ella, pues entonces es necesario hacer figurar en los cálculos la energía cinética que tenga el peso al entrar en contacto con la viga, y que ha de ser absorbida por la misma, transformándola en energía elástica o de deformación.

La magnitud entropia admite una medida indirecta, pues es función de magnitudes que pueden medirse más o menos directamente.

Su función como magnitud auxiliar, es determinar la parte de la energía interna de un sistema que ha de transformarse en calor, o en energía ligada, cuando este sistema realice un trabajo exterior. Este calor interno nunca podrá aprovecharse íntegramente, transformándolo en trabajo, precisamente por el segundo principio, a no ser que se empleasen aparatos o sistemas de dimensiones infinitas, que no son realizables.

La energía ligada representa, pues, la parte de energía existente en la naturaleza que no es aprovechable por el hombre, y más gráficamente se puede decir que es el tributo impuesto por el Creador al hombre, de manera que, siempre que realice una transformación de energía existente en la naturaleza, para convertirla en otra forma que a él le convenga más, tendrá que pagarlo con parte de la energía disponible en la misma, contribuyendo así a aumentar la entropia del universo que mide la energía ligada.

Aclararemos el sentido de esta energía que degenera, volviendo a considerar el sistema que sirvió para obtener la expresión matemática del segundo principio.

Para evitar el empleo de una infinidad de focos a diferentes temperaturas, se recurrió al empleo de una infinidad de aparatos auxiliares que proporcionaban estas cantidades de calor a diferentes temperaturas, tomando una cierta cantidad de un foco único a la temperatura T_0. La temperatura T, en cada punto del ciclo, representa la del foco que suministra el calor en ese punto al sistema, y que puede ser diferente de la que tenga el mismo en ese punto. Para accionar estos aparatos supondremos que se necesita un trabajo T_a, y siendo T_s el trabajo producido por el sistema, se tiene:

$$a) \quad Q_0 = \mathcal{T}_0 = T_0 \int_0 \frac{\delta Q}{T} = \mathcal{T}_a + \mathcal{T}_s.$$

Si no se hubieran usado estos aparatos auxiliares, al final del ciclo una infinidad de focos caloríficos habrían cambiado de estado, perdiendo en total una energía utilizable, equivalente o superior a $\mathcal{T}_s$, según sea reversible o no el ciclo.

Para poder tener una idea de la cantidad de energía utilizable que se ha gastado, reduzcamos todos los procesos a otros que se verifiquen todos a la misma temperatura. Esta misión la cumplen los aparatos auxiliares, que funcionan en ciclo de Carnot reversible, antes considerados.

Para accionar estos aparatos consideremos la existencia, por ejemplo, de una gran masa, M, que por disminución de su energía potencial suministra el trabajo, $\mathcal{T}_a$, para accionarlos.

El conjunto del foco, f_0, y la masa, M, representan la energía ligada y libre de todo el universo.

Si ahora consideramos una evolución reversible, se tendrá, $\mathcal{T}_0 = \mathcal{T}_a + \mathcal{T}_s = 0$, ó sea, $\mathcal{T}_a = -\mathcal{T}_s$; luego si se recogió un trabajo del sistema positivo $\mathcal{T}_s$, el trabajo, $\mathcal{T}_a$, será negativo y habrá que entregárselo a los aparatos auxiliares. Resulta, por lo dicho anteriormente, que la masa, M, habrá perdido una energía potencial equivalente a $\mathcal{T}_a$, y por lo tanto, a $\mathcal{T}_s$.

Haciendo recorrer el ciclo al sistema en sentido contrario, reversiblemente, podemos devolver a la masa, M, la energía perdida, consumiendo el trabajo antes obtenido.

En este sentido ha de entenderse la reversibilidad del ciclo.

Sea ahora el caso en el que el sistema recorre el ciclo irreversiblemente. Entonces se tiene:

$$\mathcal{T}_a + \mathcal{T}_s = T_0 \int_0 \frac{\delta Q}{T} = Q_0 \leq 0.$$

Si se recoge trabajo $\mathcal{T}_s > 0$, y se tendrá: $\mathcal{T}_a < 0$, y además en valor absoluto $|\mathcal{T}_s| < |\mathcal{T}_a|$.

En este caso, la masa, M, pierde una energía, U, dada por:

$$U = \mathcal{T}_a = T_0 \int_0 \frac{\delta Q}{T} - \mathcal{T}_s;$$

y como $T_0 \int_0 \frac{\delta Q}{T}$ es una cantidad esencialmente negativa, resulta que la pérdida de energía de M en valor absoluto es:

$$|U| = \left| T_0 \cdot \int_0 \frac{\delta Q}{T_0} \right| + |\mathcal{T}_s|;$$

es decir, que no sólo disminuye en la cantidad necesaria para producir el trabajo recogido, $\mathcal{T}_s$, sino también en una cantidad $\left| T_0 \int_0 \frac{\delta Q}{T} \right|$ que representa el grado de irreversibilidad del ciclo.

Si se hace ahora recorrer al sistema el ciclo en sentido contrario, y de una manera reversible, el trabajo, $\mathcal{T}_s$, no será suficiente para que la masa, M, recupere toda la energía potencial perdida, cuando se recorrió el ciclo en el otro sentido e irreversiblemente.

La pérdida definitiva por esta irreversibilidad es, por lo tanto, $\left| T_0 \int_0 \frac{\partial Q}{T} \right|$.

Pero como se tiene $Q_0 = T_0 \int_0 \frac{\partial Q}{T} \leq 0$, y dado el signo relativo de los calores intercambiados, se encuentra con que el foco, f_0, ha aumentado su calor en una cantidad de valor absoluto $|Q_0|$, o sea, en $\left| T_0 \int_0 \frac{\partial Q}{T} \right|$, que es, precisamente, la cantidad de energía que perdió la masa, M, de manera irrecuperable, y representa el aumento de la energía ligada del universo. La entropia de f_0 aumenta en:

$$\Delta S_0 = \frac{Q_0}{T_0} - \int_0 \frac{\partial Q}{T}.$$

Como la función entropia del sistema y aparatos auxiliares no ha variado, por volver al punto de partida, resulta que la entropia del universo ha aumentado en $- \int_0 \frac{\partial Q}{T}$.

Si se considera una evolución abierta, por ejemplo, de A a B, irreversible, y la completamos con una evolución reversible de B a A, se tendrá, para la energía degradada en este ciclo:

$$U = - T_0 \int_0 \frac{\partial Q}{T} = T_0 \left(S_B - S_A - \int_A^B \frac{\partial Q}{T} \right) \geq 0,$$

que puede considerarse como la energía perdida en la evolución abierta e irreversible A a B.

El aumento de entropia, ΔS_0, en este caso, es:

$$\frac{U}{T_0} = S_B - S_A - \int_A^B \frac{\partial Q}{T} \geq 0;$$

es decir, la entropia de f_0 aumenta siempre, y, por lo tanto, la del universo.

La entropia se hace, pues, sensible en un aspecto económico, ya que siempre se tiene que contar con las pérdidas, o rendimientos, de cualquier sistema que realice una transformación de energía.

En el universo, por encontrarse aislado, la entropia aumenta siempre que se verifique algún fenómeno irreversible, y como todos los reales lo son, al menos macroscópicamente, llegará un momento en que toda la energía del mismo se encuentre en forma de energía ligada. El crecimiento de la entropia marca, por lo tanto, el sentido de la evolución del universo, y de ahí su nombre del griego εντρεπέιν, evolucionar o girar, o, dicho de otro modo, la entropia le pone una flecha de dirección al tiempo, lo que no pueden hacer las ecuaciones de la mecánica, y en general las de la física fenomenológica o macroscópica, pues las derivadas con relación al tiempo, son de segundo orden, no cambiando las ecuaciones al hacer $t = -t$. Este carácter no lo presentan, en general, las ecuaciones de la física microscópica no relativista como en la mecánica cuántica, en las que las derivadas respecto al tiempo son de primer orden.

Del crecimiento constante de la entropia del universo se sigue que llegará un momento en que toda la energía de éste, que se supone constante, se habrá transformado en energía ligada, y por lo tanto inaprovechable, no pudiendo haber transformaciones de energía y sobreviniendo la muerte térmica del universo.

Pero ¿se cumple siempre la ley de la entropia? Considerando los fenómenos microscópicamente, no. Por ejemplo: en un átomo que absorbe un cuanto de luz y lo emite, sin que en las transformaciones de energía que estos actos representan haya variado ninguna entropia. Tratándose de un sistema simple, no puede hablarse de ella, pues tiene un carácter estadístico. Lo mismo ocurre en los demás fenómenos microscópicos.

En los fenómenos macroscópicos tampoco se cumple rigurosamente, como lo demuestran las fluctuaciones de los valores de las magnitudes macroscópicas, que tienen una interpretación estadística como valores medios de los dados a estas magnitudes por los diferentes estados que es capaz de adoptar un sistema, compuesto de un gran número de partes elementales, y que se hacen más sensibles cuando disminuye el número de ellas.

Tal es el caso de la presión que ejerce un gas encerrado en un recipiente sobre sus paredes. Si en un instante cualquiera se conociera la distribución de las velocidades de las moléculas y su posición, se podría calcular la presión que, en cada punto de la pared, ejerce el gas en ese instante. A cada distribución corresponde un valor de la presión y cada distribución tiene una cierta probabilidad de producirse. En la práctica, el tiempo que dura la observación, es muy grande, comparado con el tiempo que en el gas emplean las moléculas para pasar de una a otra distribución; así que, en el tiempo que dura la observación habrá habido un número, N, de cambios de distribución muy grande, siendo el número de veces que se ha presentado en ese tiempo la distribución, i, con la probabilidad de w^i, igual a $N w^i$, y el valor de la presión observada será el valor medio de las presiones que produce cada distribución, o sea: $p = \sum_1^k p_i w^i$, siendo k el número de distribuciones posibles.

Esta presión, p, así determinada, se demuestra matemáticamente que coincide muy aproximadamente con la presión que produce la distribución, que tiene la mayor probabilidad, no debiendo deducirse, de la coincidencia de valores, que sea la distribución más probable la que se produce siempre, determinando el valor de la presión.

En ciertas circunstancias se ponen de manifiesto valores de la presión, que no coinciden con este valor medio de la misma, como ocurre con el movimiento bromwiano de las partículas que, por su pequeña superficie, la presión sobre ellas no tiene una resultante nula en cada instante.

A este fenómeno, y a otros semejantes, se les denomina fluctuaciones.

Mayor importancia práctica tienen las fluctuaciones en los aparatos eléctricos de medida, muy sensibles, o amplificadores. Entre los extremos de una resistencia, por ejemplo, mantenida toda ella a una misma temperatura, no existe una diferencia de potencial nula, sino que este potencial fluctúa debido a que los electrones contenidos en ella, causantes de la conducción eléctrica, pueden considerarse como un gas contenido en la misma, y su distribución no será uniforme en cada instante. Debido a esta falta de uniformidad, la resistencia no es neutra eléctricamente en cada punto, pudiendo producirse corrientes oscilantes, tanto a circuito abierto como cerrado, que en los galvanómetros muy sensibles limitan el grado de su sensibilidad.

Esto es aplicable a toda clase de instrumentos de medida, muy sensibles, de cualquier naturaleza que sean.

Copiamos a continuación un cuadro, debido a Zernike, referente a los galvanómetros, tomado del *Handbuch der Physik,* Band XVI, pág. 275, en el que se aprecia la importancia que pueden tener las fluctuaciones:

INSTRUMENTO	Fuerza antagonista	Fluctuación a un metro de distancia	Máxima distancia de la escala
Galvanómetros corrientes de espira.	1	0,4 μ	180 m.
Galvanómetros muy sensibles de espira	0,003	7 μ	10 m.
Galvanómetros muy sensibles de aguja	4×10^{-6}	0,2 m/m.	0,35 m.

La máxima distancia de la escala se refiere a que, apreciándose 0,1 mm., la fluctuación en la proyección sobre la escala no debe pasar de 0,07 mm.

Otro efecto de las fluctuaciones de los electrones, es lo que se denomina el ruido de fondo, de los aparatos de radio, y que en los aparatos de medida que los utilizan como amplificadores, tiene importancia.

Resulta, de lo anteriormente expuesto, que, si bien el teorema de la entropia nos dice que toda la energía del universo se convertirá en energía ligada, las fluctuaciones nos darán, quizá, la solución para poder aprovechar entonces esta energía, y puede ser que hasta de una manera más cómoda, pues bastaría, por ejemplo, unir sencillamente un condensador a una bombilla eléctrica para que ésta se encendiera, debido a las fluctuaciones de los electrones, o bien uniendo el condensador a un motor, éste se pusiera en movimiento, por la misma causa y de una manera indefinida, sin gasto en ambos casos, pues el condensador tomaría la energía del ambiente, pudiendo decirse, si esto ocurriera, que "no hay mal que por bien no venga".