

LA TRASLACIÓN DE LOS NUDOS Y LAS APROXIMACIONES SUCESIVAS

POR JOSÉ SOTO BURGOS, INGENIERO DE CAMINOS

Basándose en su método original para tanteo y análisis de estructuras múltiples publicado en nuestro número de junio de 1942, expone el autor la forma más conveniente para acometer el estudio de estructuras múltiples con traslación de los nudos; mediante un procedimiento que da una sucesión de valores de los momentos flectores, cada vez más próximos a los verdaderos.

1. Antecedentes.

En el mes de junio de 1942, dimos a conocer, por medio de la REVISTA DE OBRAS PÚBLICAS, un método para el tanteo y el análisis de las estructuras múltiples, en el que, si lo comparamos con otros métodos conocidos, conseguimos liberarnos de la necesidad de tener que tomar en cuenta las condiciones físicas de toda la estructura objeto de estudio, limitando nuestro trabajo a la consideración de aquellas zonas que resultan influenciadas científicamente, no por corazonada, evitando de este modo la pérdida inútil de tiempo y la falta de confianza en los resultados. Si comparamos nuestro método con el de aproximaciones sucesivas debido a Cross, podemos afirmar que el concepto de propagación es todavía más perfecto en el nuestro, ya que conseguimos establecer del modo más puro posible la marcha de la influencia de una sollicitación de la estructura, que, con independencia de las demás, se mueve a lo largo de todos los elementos como podría hacerlo un determinado volumen de agua, que, depositado en un cierto lugar, recorriera una red de tuberías de doble circulación (ida y vuelta), que guardan cierta semejanza, en forma y dimensiones, con los elementos de la estructura considerada, reduciéndose el caudal a medida que avanza la onda, no sólo por filtración a través de las paredes (coeficiente de compensación), sino también por efecto de la subdivisión (coeficiente de absorción), que tiene lugar al final de cada conducción o elemento, en un recipiente, el nudo teórico, que tiene tantas salidas siempre abiertas como elementos parten de él e igual número de entradas, provistas estas últimas de válvula de retención.

Un contador de agua, situado al principio y al final de cada tubería, nos va registrando los caudales que por ella han pasado, tanto en una dirección como en la contraria. Este caudal registrado es el equivalente al momento flector que la sollicitación

produce en el punto correspondiente de la estructura.

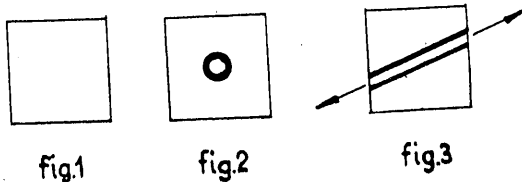
En el artículo citado, indicamos cómo podían estudiarse aquellas estructuras, cuyo esquema funcional acusase la traslación de sus nudos. Basta partir de los momentos de empotramiento que una traslación unitaria de los nudos produce en los extremos de los elementos. Hecha la propagación, calculamos la fuerza cortante resistente a la traslación que corresponde a estos momentos. Como ésta ha de equilibrar a la fuerza cortante sollicitante, una regla de tres nos permitirá conocer el valor correspondiente de la traslación y de los momentos.

Este procedimiento de cálculo, tan esquemáticamente expuesto, permite llegar al conocimiento de los valores de los momentos flectores y fuerzas cortantes con tanta aproximación como podamos desear, si aceptamos como ciertas las leyes fundamentales de la teoría de la elasticidad. Presenta, sin embargo, el grave inconveniente de que tenemos que llevar los cálculos desde el principio, de acuerdo con el error máximo que aceptemos. Si la solución no llega a interesarnos, habremos trabajado más de lo indispensable. Si por el contrario, hemos acertado en la concepción y en el dimensionado y deseamos más aproximación, habremos de empezar de nuevo. Resulta más conveniente, en la práctica, el buscar un procedimiento de cálculo mediante aproximaciones sucesivas, que nos permita desechar antes las soluciones poco interesantes, y aprovechar toda la labor realizada cuando se acepte como buena la que estábamos tanteando. A este tipo pertenecen nuestro método original y el método de Cross, entre otros, cuando no existe traslación de los nudos.

Vamos a ver, en las líneas que siguen, cómo se puede proceder, de acuerdo con nuestro método, al tanteo y al análisis de estructuras continuas con traslación de los nudos, mediante un sistema basado en el cálculo por aproximaciones sucesivas de los verdaderos valores de los momentos flectores.

2. Fundamento del método.

Suponemos al lector compenetrado con la terminología empleada en nuestro artículo arriba citado, por lo que no vamos a insistir sobre este punto. Por lo que a notaciones de dibujo se refiere, emplearemos el cuadrado de la figura 1 para representar un nudo completamente inmóvil; el cuadro y el círculo de la figura 2, para indicar que el nudo puede girar sobre sí mismo, pero no trasladarse, y el cuadrado y las líneas paralelas que se ven en la figura 3, para representar un nudo al que no se le permite girar, pero que puede trasladarse en las dos direcciones que señalan las flechas; es decir, en la de las líneas paralelas.



Para fijar las ideas, vamos a estudiar el caso del pórtico de la figura 4, sometido a la acción de una carga uniformemente repartida sobre su dintel a razón de siete toneladas por metro lineal y a un empuje horizontal de ocho toneladas, que actúa sobre la rodilla izquierda del dintel, a la que denominaremos en adelante nudo número 1. A la rodilla derecha, la llamaremos nudo 2, reservando los números 3 y 4 para denominar los pies de las columnas izquierda y derecha, respectivamente. Hemos elegido este caso particular con objeto de que la convergencia sea muy lenta, lo que es debido al valor muy alto del producto de los coeficientes de absorción y de compensación ($.8 \times .7 = .56$) del dintel de sección variable.

Empezamos por dibujar el esquema funcional de la figura 5, que acusa la existencia de una sensible traslación de los nudos en sentido horizontal (*). El tipo de cálculo que empleemos habrá de tomar, pues, en consideración esta traslación horizontal. El orden que vamos a seguir en el cálculo es el siguiente:

Fase 1.^a Consideramos todos los nudos como perfectamente inmóviles, y hacemos insistir sobre la estructura todas las solicitaciones previstas (fig. 6). Se deformará el dintel, apareciendo dos puntos de inflexión. La fuerza de traslación, P_t , es incapaz de producir efecto alguno, ya que el nudo sobre el

que insiste permanece inmóvil. Las columnas no se mueven ni deforman. Los momentos que en esta fase solicitan a la estructura son los M_e que las cargas provocan en los elementos empotrados correspondientes a los de la estructura dada.

Fase 2.^a Mantenemos los nudos 3 y 4 perfectamente inmóviles, pero permitimos la traslación horizontal de los 1 y 2, siempre que recorran longitudes iguales. De este modo, el elemento 1-2 no sufre variación alguna en su forma ni en sus dimensiones; podemos suponerle como encerrado en el interior de un tubo infinitamente rígido y de su misma forma y tamaño, que le impidiera toda deformación. El esquema funcional de esta fase nos revela que los elementos 1-3 y 2-4 se deforman como se ilustra en la figura 7, ya que las cabezas de las columnas se trasladan horizontalmente hacia la derecha, permaneciendo fijos sus pies. Aparece un punto de inflexión en el centro de cada una de las columnas. Los nudos 1 y 2 terminarán su recorrido cuando la fuerza de traslación, P_t , se equilibre con las fuerzas que se oponen a su traslación, que, en este caso, son únicamente las fuerzas cortantes que desarrollan los elementos 1-3 y 2-4 al producirse la traslación de las cabezas de las columnas. Los momentos que solicitan ahora a los elementos del pórtico son los correspondientes a la fase anterior, incrementados en los *momentos de traslación* (T), que la traslación de los nudos ha provocado en cada uno de ellos.

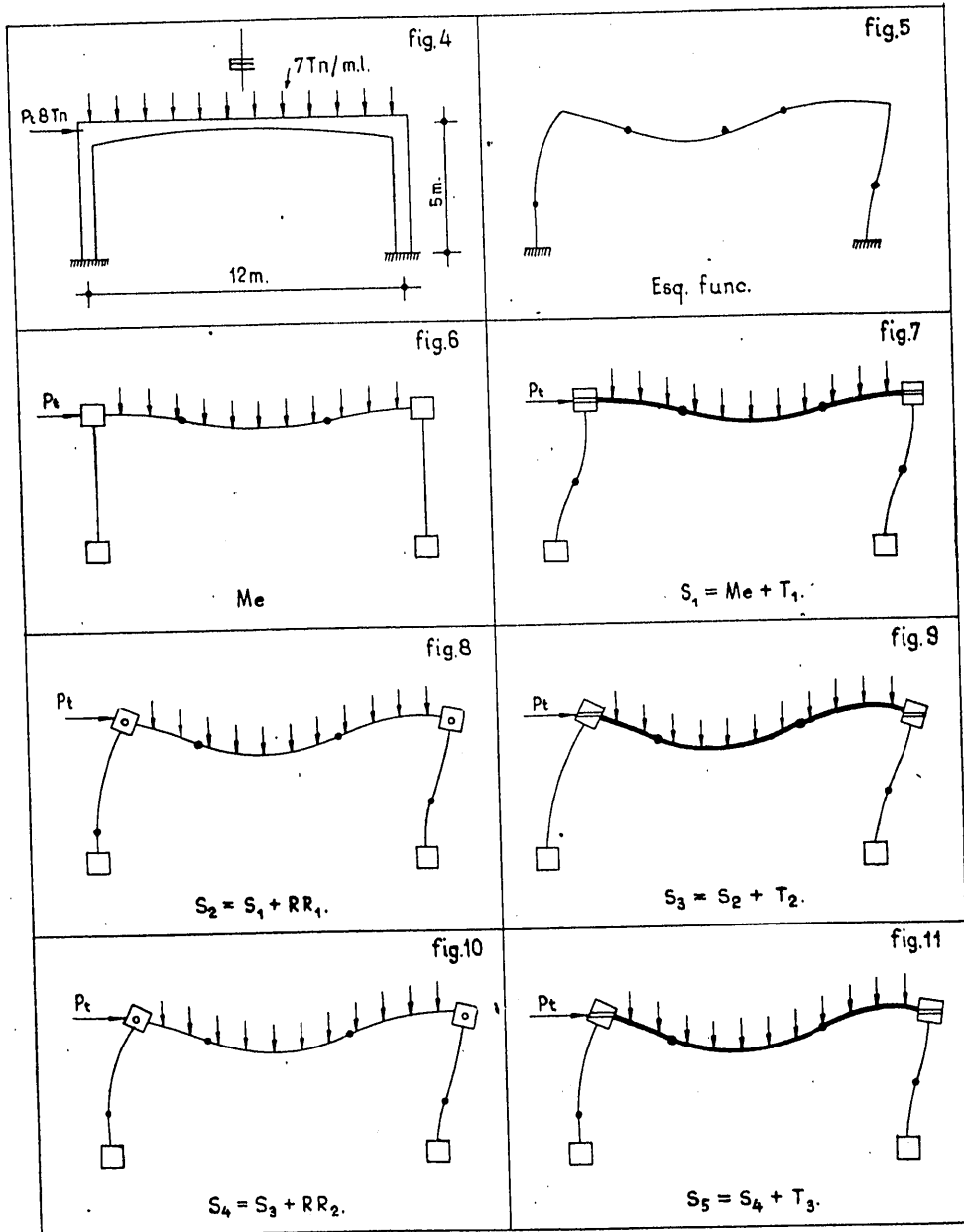
Fase 3.^a Mantenemos fijos los pies de las columnas y privamos a los nudos 1 y 2 de su capacidad de traslación, permitiéndoles, en cambio, el giro alrededor de sí mismos. Esto dará lugar a que cada uno de ellos, solicitado por los extremos de los elementos que allí concurren, inicie un cierto giro, que terminará cuando se haya alcanzado una posición de equilibrio, es decir, cuando la suma algebraica de los momentos que solicitan a cada uno de los nudos 1 y 2 sea cero (fig. 8). Numéricamente, no podemos conseguir este equilibrio inmediato de los dos nudos, pues, al girar uno de ellos, varían los momentos que solicitan al otro, y viceversa. Prácticamente lo que hacemos, es un recorrido desde el nudo izquierdo al nudo derecho de cada elemento, acompañado de otro recorrido desde el nudo derecho al izquierdo. De este modo, nos habremos acercado sensiblemente a la posición de equilibrio ideal de que antes hablábamos. Los momentos que solicitan a la estructura son los de la fase 2.^a, aumentados en los correspondientes a estos dobles recorridos.

Fase 4.^a Conservamos fijos los pies de las columnas y permitimos la traslación horizontal de los nudos 1 y 2, con la condición de que permanezca inmóvil la distancia que los separa, y que el din-

(*) Rogamos al lector no confíe demasiado en la exactitud de los dibujos, ya que, por defecto de delineación, no se han conservado bien los ángulos ni se han situado los puntos de inflexión con el debido cuidado.

tel no se deforme. Esta fase, cuyo esquema funcional se ilustra en la figura 9, es análoga a la fase 2.^a (fig. 7), por lo que no vamos a repetir aquí lo ya expuesto en aquella ocasión.

pies de las columnas y permitimos la traslación horizontal de los nudos 1 y 2; cómo ya hicimos anteriormente en las fases 2.^a y 4.^a. El esquema funcional de esta fase es el ilustrado en la figura 11.



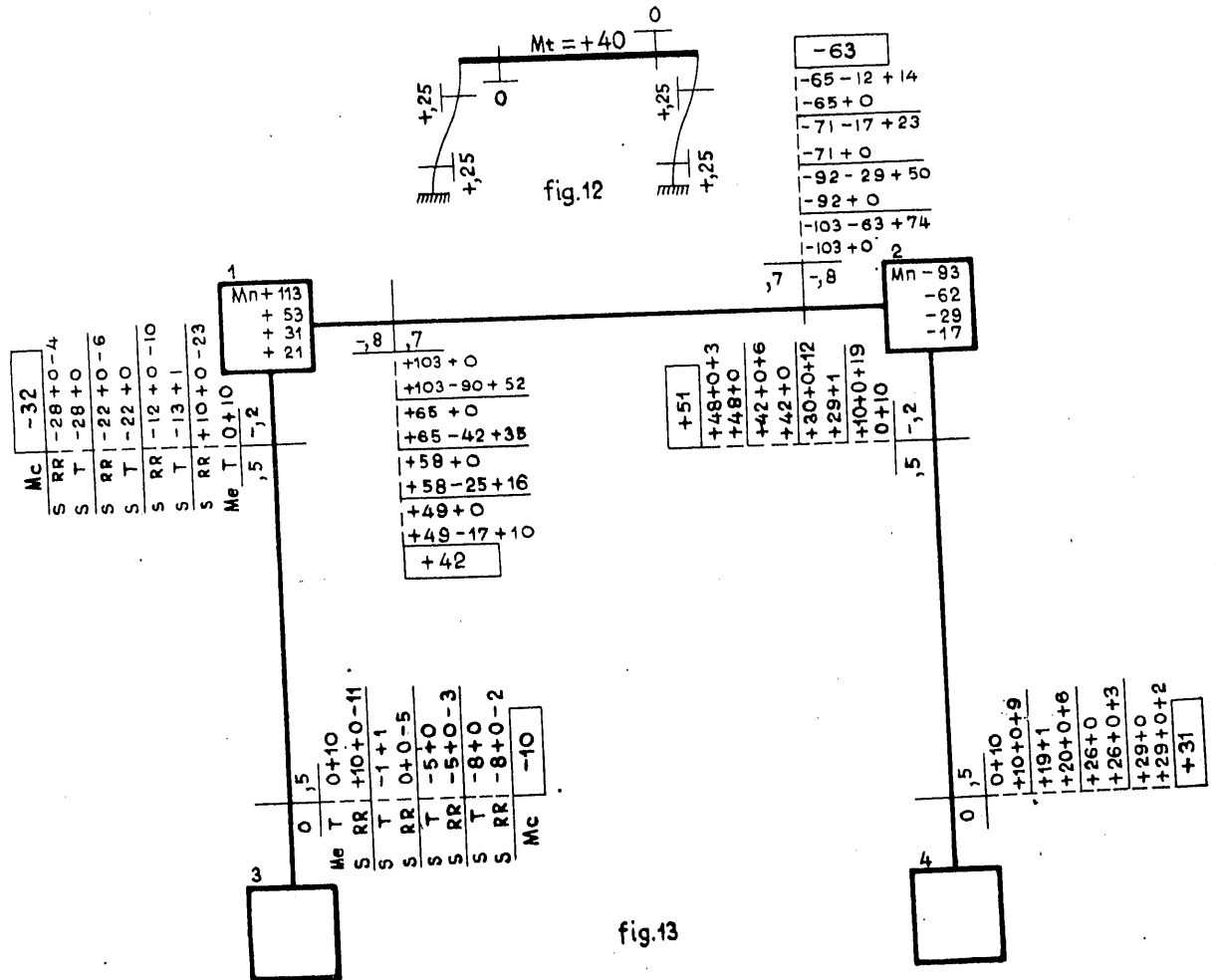
Fase 5.^a Suponemos completamente inmóviles los nudos 3 y 4 y dejamos a los 1 y 2 libertad de giro alrededor de sí mismos, pero no de traslación. Esta fase (fig. 10) es análoga a la fase 3.^a (fig. 8), que antes hemos descrito.

Fase 6.^a Mantenemos fijos, como siempre, los

Si seguimos considerando indefinidamente las fases pares (tipo fase 2.^a) y las impares (tipo fase 3.^a), iremos obteniendo esquemas funcionales que se aproximarán cada vez más al verdadero de la estructura dada (fig. 5). La simple observación de las figuras 6 a 11 nos permite apreciar, salvo pequeños errores de delineación, el proceso de la deformación a través

de cada una de las fases anteriormente expuestas. Se puede ver en ellas cómo los elementos de la estructura van tomando poco a poco la forma que les corresponde en el esquema funcional de la figura 5, y es fácil observar cómo aparecen y desaparecen los puntos de inflexión y cómo se trasladan a lo largo

cada instante puedan existir en los nudos. Tratándose de un procedimiento basado en el cálculo por aproximaciones sucesivas, podemos limitarnos a efectuar recorridos desde cada nudo no equilibrado a los nudos adyacentes, abandonando en éstos la propagación.



de los elementos, para ir aproximándose cada vez más a su posición definitiva.

3. Práctica del método.

Expuesto así el proceso físico del método, vamos a ver cuál es la manera de llevar a cabo los cálculos numéricos correspondientes. Tenemos, como ya hemos visto, dos clases de movimiento de los nudos:

1.º El giro sin traslación. Su repercusión en el cálculo nos es conocida, pues fué expuesta en nuestro ya citado artículo "Tanteo y análisis de estructuras múltiples". Se reduce a efectuar la propagación de los momentos no equilibrados (Mn), que en

2.º Traslación sin giro de los nudos. Si, conservando inmóvil un extremo de un elemento, trasladamos el otro sin giro alguno, se provocarán en el elemento ciertos momentos flectores, que llamaremos *momentos de traslación* (T). La suma de las fuerzas cortantes correspondientes a estos momentos, de todos los elementos que se oponen a la traslación, ha de equilibrar a la carga de traslación, Pt ; es decir:

$$\sum \frac{M_1 + M_D}{l} + Pt = 0, \quad [1]$$

siendo M_1 los momentos de los extremos izquierdos de los elementos en cuestión; M_D , los de los extre-

mos derechos; l , sus longitudes. Si todos los elementos resistentes a la traslación tienen una misma longitud, l , podemos escribir:

$$\Sigma (M_i + M_D) + Pt \times l = 0. \quad [2]$$

Al producto,

$$Pt \times l = Mt \quad [3]$$

le llamamos, en este caso, momento total de traslación. Denominamos *coeficiente de traslación* (t) al momento que provoca en un extremo de un elemento, una traslación que dé lugar a un momento o una carga total de traslación igual a la unidad, según que trabajemos con momentos o con cargas.

El proceso de cálculo será, pues, el siguiente:

Determinamos primeramente, las fuerzas cortantes que se oponen a la traslación de los nudos, o si los elementos resistentes a este movimiento son todos de igual longitud, hallamos, por simple suma, el valor del momento total resistente a la traslación. Incrementamos, bien las fuerzas cortantes, bien el momento total resistente, en la magnitud positiva o negativa necesaria para lograr el debido equilibrio. Multiplicando esta magnitud de equilibrio por los diversos coeficientes de traslación, tendremos los momentos de traslación que hay que aplicar a cada extremo de cada elemento.

Para mayor claridad, vamos a aplicar a un ejemplo las reglas que acabamos de dar. Sea el pórtico de la figura 4 sometido a la acción de las cargas que allí se indican. Su esquema funcional se ilustra en la figura 5 y éste acusa una traslación horizontal de los nudos 1 y 2. Los elementos que se oponen a esta traslación son los 1-3 y 2-4, de cinco metros de longitud. El momento total de traslación será:

$$Mt = Pt \times l = 8 \times 5 = + 40 mTn. \quad [4]$$

Si, suponiendo el dintel indeformable, como corresponde a la fase 2.^a, trasladamos horizontalmente los nudos 1 y 2 conservando fijos los 3 y 4, hasta provocar un momento total resistente a la traslación igual a la unidad. Por ser las columnas iguales entre sí y ambas de sección constante, los momentos de traslación que aparecerán en sus extremos o coeficientes de traslación tendrán todos el mismo valor, +,25. Como el dintel no sufre deformación alguna, los coeficientes correspondientes a sus extremos serán ambos cero. Con estos resultados podemos dibujar la figura 12, esquema funcional de la fase de traslación.

Dibujamos, a continuación, el croquis de cálculo de la figura 13, anotando en sus lugares correspondientes los coeficientes de absorción y de compensa-

ción que, en este caso, han sido tomados de unas tablas. Escribimos en su debido sitio los valores de los momentos de empotramiento de cada extremo de cada elemento. En las columnas son cero y en el dintel valen $103 mTn$, según indican las tablas. Queda terminada así la primera fase (fig. 6).

Segunda fase: El momento total resistente a la traslación del dintel es:

$$\Sigma T = 0 + 0 + 0 + 0 = 0. \quad [5]$$

Como ha de valer + 40 mTn , traslademos los nudos 1 y 2 hacia la derecha hasta que en los extremos de las columnas se localicen los momentos necesarios. Estos serán iguales en cada extremo al producto del momento de equilibrio + 40, por el coeficiente de traslación correspondiente, que aparece en la figura 12. Así, en los pies y cabezas de las columnas, tendremos:

$$T_1 = + 40 \times ,25 = + 10 mTn, \quad [6]$$

y en el dintel,

$$T_1 = + 40 \times 0 = 0. \quad [7]$$

Anotamos estos valores a la derecha de los momentos de empotramiento, como se ve en el croquis de cálculo. Después, y al principio de la línea siguiente, escribimos los valores:

$$S_1 = Me + T_1 \quad [8]$$

de los momentos adjudicados hasta ahora a cada extremo. Hemos terminado así la segunda fase, correspondiente a la figura 7.

Tercera fase: Giro de los nudos (fig. 8). Los nudos de la estructura no están equilibrados. Existirá, en general, en cada uno de ellos, un cierto momento no equilibrado, que provocará su giro. Empezaremos por anotar en cada nudo el momento no equilibrado solicitante.

En el nudo 1 será:

$$+ 103 + 10 = + 113. \quad [9]$$

En el 2:

$$- 103 + 10 = - 93. \quad [10]$$

En los nudos 3 y 4 no se calculan, por ser cero los coeficientes de absorción correspondientes a los momentos que desde ellos se propagan. Estos momentos no equilibrados se consignan en el interior de los cuadrados que representan a los nudos correspondientes.

Hacemos ahora, para equilibrar, los recorridos de izquierda a derecha y de derecha a izquierda, a lo

largo de todos y cada uno de los elementos de la estructura, partiendo de los momentos no equilibrados que acabamos de consignar. En el elemento 3-1 el recorrido de izquierda a derecha es cero, por ser cero el coeficiente de absorción a_{31} . El recorrido de derecha a izquierda nos da para el extremo 1:

$$+ 113 \times (-, 2) = -23, \quad [11]$$

y para el extremo 3:

$$-23 \times , 5 = -11. \quad [12]$$

Recorrido 1-2; extremo 1:

$$+ 113 \times (-, 8) = -90. \quad [13]$$

Recorrido 1-2; extremo 2:

$$-90 \times , 7 = -63. \quad [14]$$

Recorrido 2-1; extremo 2:

$$-93 \times (-, 8) = +74. \quad [15]$$

Recorrido 2-1; extremo 1:

$$+ 74 \times , 7 = +52. \quad [16]$$

Recorrido 4-3; da valor cero en los dos extremos, por ser cero el coeficiente de absorción, a_{43} .

Recorrido 2-4; extremo 2:

$$-93 \times (-, 2) = +19. \quad [17]$$

Recorrido 2-4; extremo 4:

$$+ 19 \times , 5 = 9. \quad [18]$$

Todos estos valores se anotan en la línea en que habíamos escrito el valor de S_1 , correspondiente al mismo extremo. Efectuamos a continuación, en cada extremo, la suma de todos los términos situados en la citada línea, y tendremos los valores:

$$S_2 = S_1 + RR_1 \quad [19]$$

de los momentos adjudicados hasta ahora a cada extremo. Damos así por terminada esta tercera fase, correspondiente a la figura 8.

Cuarta fase: Análoga a la segunda. El momento total resistente a la traslación del dintel es ahora:

$$\Sigma T = -1 - 13 + 19 + 29 = +34. \quad [20]$$

El momento total del equilibrio será:

$$+ 40 - 34 = +6. \quad [21]$$

Multiplicando este momento total de equilibrio por cada uno de los coeficientes de traslación (fig. 12),

tenemos los momentos originados por esta nueva traslación horizontal del dintel. Sumados estos momentos a los S_2 , tenemos:

$$S_3 = S_2 + T_2, \quad [22]$$

con lo que damos por acabada esta fase, correspondiente a la figura 9.

Quinta fase: Análoga a la tercera. El momento no equilibrado del nudo 1, vale:

$$+ 65 - 12 = +53, \quad [23]$$

y el del nudo 2, es:

$$-92 + 30 = -62, \quad [24]$$

que anotamos en los cuadrados correspondientes y propagamos de modo análogo a como antes hicimos.

Al efectuar la suma, obtenemos los momentos

$$S_4 = S_3 + RR_2, \quad [25]$$

correspondientes a la figura 10.

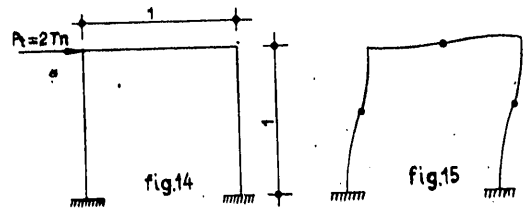
Sexta fase: Análoga a la segunda y cuarta. El momento total resistente a la traslación del dintel es:

$$\Sigma T = -5 - 22 + 26 + 42 = +41. \quad [26]$$

El momento total de equilibrio será:

$$+ 40 - 41 = -1, \quad [27]$$

es decir, que hemos de mover el dintel hacia la izquierda, en vez de hacia la derecha, como habíamos hecho antes. Los momentos de traslación de cada ex-



tremo los obtenemos multiplicando este momento total de equilibrio por los coeficientes de la figura 12. Terminada la fase, llegamos a los momentos

$$S_5 = S_4 + T_3, \quad [28]$$

que corresponden al esquema funcional de la figura 11.

Podemos seguir la propagación en la forma descrita, hasta llegar a la aproximación que nos habíamos propuesto. En el caso de que nos venimos ocupando, la convergencia es lenta por la razones ya indicadas.

Las figuras 14 a 17 se refieren a otro caso semejante, pero de gran convergencia. Debido a la simetría, se simplifica el croquis de cálculo, como se puede ver en la figura 17. En este ejemplo se ha supuesto que las columnas y el dintel eran de igual sección. No creemos necesaria ninguna explicación complementaria para poder seguir el proceso de esta propagación.

Como último ejemplo, vamos a calcular la viga Vierendeel de la figura 18, en que todos los elementos son de igual rigidez. Su esquema funcional, ilustrado en la figura 19, revela la existencia de traslaciones verticales de los nudos, que son mayores para los nudos centrales, 3 y 8, que para los de los montantes adyacentes, 2, 7, 4 y 9, respectivamente, siendo nula la traslación de los 1, 6, 5 y 10, correspondientes a los montantes extremos. Para conseguir llegar a la posición de equilibrio del montante central, podemos hacerlo, gracias a la simetría por traslación vertical del montante 4-9, suponiendo fijos los nudos 3 y 8 y completamente libre el recuadro 4-5-9-10. El momento total de traslación será:

$$\frac{1}{2} 30 \times (-4) = -60, \quad [29]$$

con los coeficientes de traslación indicados en la figura 20.

El equilibrio del montante 4-9 se logra por traslación vertical del elemento 5-10, suponiendo fijos los nudos 4 y 9. El momento total de traslación es:

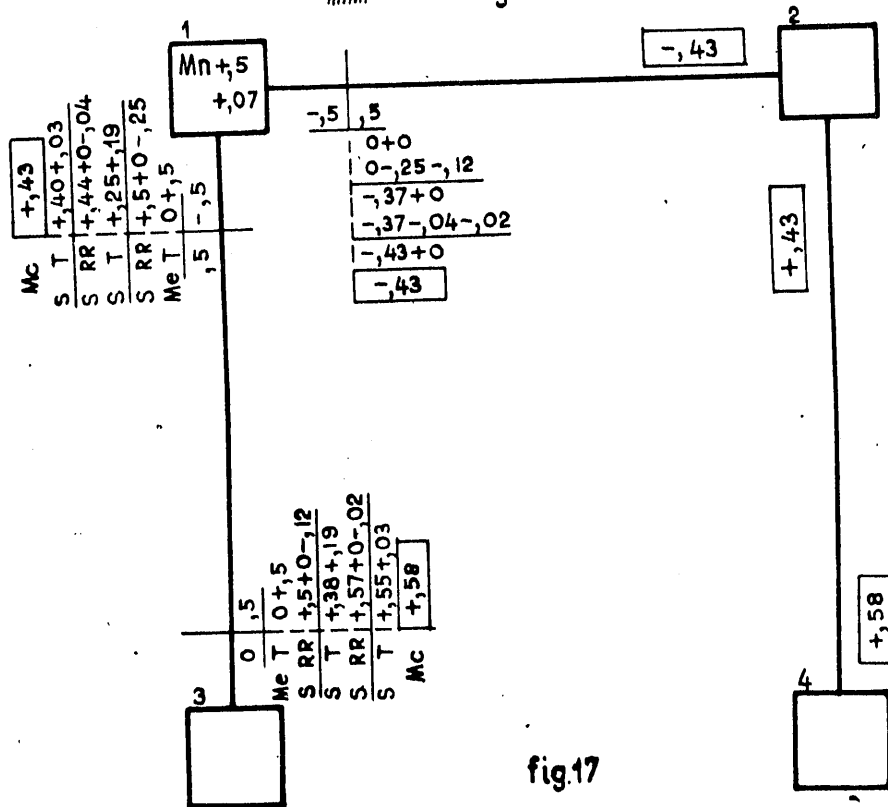
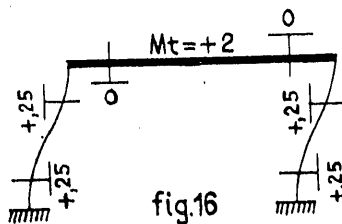
$$\left(\frac{1}{2} 30 + 30\right) \times (-4) = -180, \quad [30]$$

siendo los coeficientes de traslación los indicados en la figura 21.

En vista de la doble simetría, se reduce el croquis de cálculo a lo indicado en la figura 22.

El proceso de la propagación poco tiene de novedad después de lo ya explicado. Sin embargo, para mayor claridad, vamos a efectuar numéricamente el proceso de la segunda fase de traslación. El momento total resistente a la traslación relativa de los montantes 3-8 y 4-9 es:

$$2(-5 + 5) = 0. \quad [31]$$



El momento total de equilibrio necesario será, pues:

$$-60 + 0 = -60, \quad [32]$$

y los momentos de traslación de los extremos de los elementos 3-4 y 8-9, valen:

$$-60 \times ,25 = -15. \quad [33]$$

Los restantes momentos de traslación son cero.

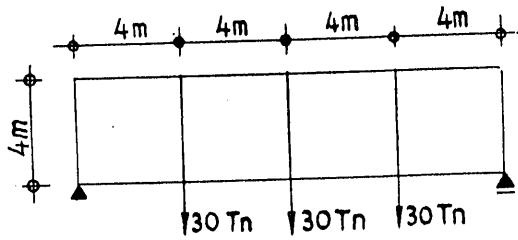


fig.18

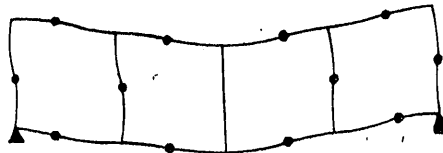


fig.19

El momento total resistente a la traslación relativa de los montantes 4-9 y 5-10, vale:

$$2(-14 - 13) = -54. \quad [34]$$

Como se puede observar, la propagación se efectúa sin dificultad alguna, siendo, además, grande la convergencia.

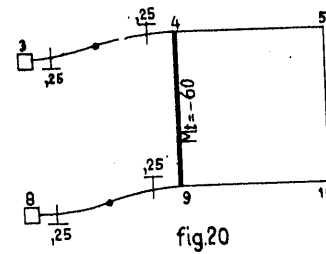


fig.20

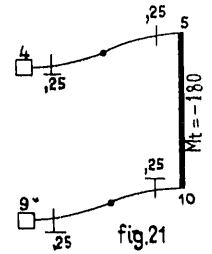


fig.21

Una vez obtenida la aproximación suficiente, suspendemos la propagación. El último valor de S obtenido será el momento de continuidad que buscamos.

Partiendo de estos momentos de continuidad,

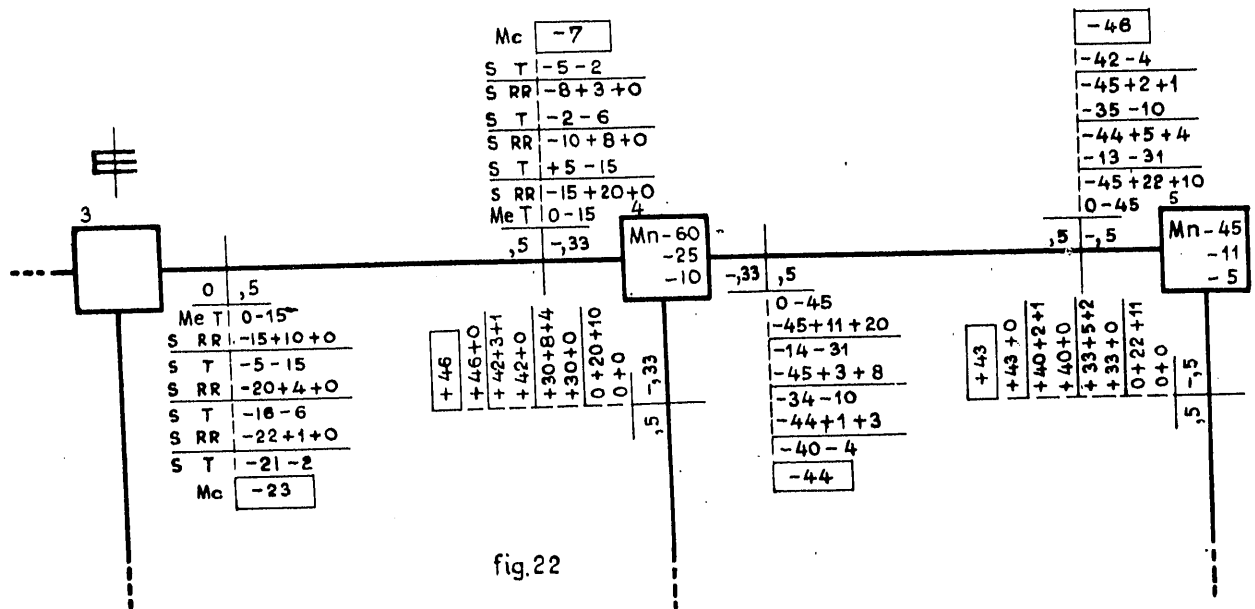


fig.22

El momento total de equilibrio necesario es, por lo tanto,

$$-180 + 54 = -126. \quad [35]$$

Los momentos de traslación de los elementos 4-5 y 9-10, valdrán, pues,

$$-126 \times ,25 = -31, \quad [36]$$

siendo cero en los restantes elementos.

y con auxilio de cuadros especiales (véase el libro del autor, *Análisis de Estructuras Continuas*), podemos obtener inmediatamente, tanto gráfica como numéricamente, las leyes de variación de los momentos flectores y de las fuerzas cortantes correspondientes a todos los elementos de la estructura que estudiamos.