

APLICACIONES DEL MÉTODO DE CROSS

POR AMALIO HIDALGO Y FERNÁNDEZ-CANO, INGENIERO DE CAMINOS

Presenta el autor la aplicación de este método para determinar las características correctas de las estructuras que han de estar provistas de articulaciones que permiten el deslizamiento.

Es frecuente el caso de fijar, quizá con exceso, la atención en los procedimientos de calcular y en la interpretación mecánica de las teorías elásticas, olvidando, a veces, la apreciación suficiente de las bases reales de los problemas que se estudian, y sobre las que, en definitiva, ha de fundamentarse todo el artificio que con tanto cuidado se sigue, con lo que inadvertidamente se camina hacia la obtención de resultados erróneos.

En la mayor parte de los tratados de Mecánica, se consideran explícitamente y de modo sustancial dos clases de sustentaciones: empotramientos y articulaciones; pero en la práctica, estas últimas son, en muchos casos, articulaciones que al mismo tiempo que permiten el giro, hacen posible el desplazamiento del nudo, con objeto deliberado de hacer frente a las acciones térmicas o de otra clase, o como resultado de la colocación de aparatos de apoyo sencillos, como son: placas metálicas o planchas de plomo.

La diferenciación de las articulaciones, en uno y otro caso, es de gran interés en orden a la determinación concreta de momentos flectores y de esfuerzos cortantes en muchas estructuras, y el englobe de ellas en la articulación fija puede dar lugar no sólo a errores de magnitud en la ponderación de las cargas, sino, lo que es mucho peor, a errores de signo, que si bien en obras metálicas no son, en general, de temer, pueden conducir a resultados realmente peligrosos en obras de hormigón armado, por supresión de armaduras en zonas en las que se presenten cargas de tracción.

La determinación correcta de las características elásticas de las estructuras, que han de estar realmente provistas de articulaciones que permiten el deslizamiento, es engorrosa y complicada cuando se utilizan los procedimientos de cálculo clásicos, pero muy sencilla cuando se emplea el método de Cross, en cuyo caso y mediante un sencillo artificio, se obtienen rápidamente y con exactitud suficientes resultados concordantes con la verdadera situación de la estructura. El problema no ofrece nada de particular, pero nos decide a hacerlo objeto de estas líneas, la consideración de llamar la atención sobre punto que, generalmente en los tratados, no se pone claramente de relieve, y la esperanza de economizar en alguna ocasión el escaso tiempo que requiere su solución. Procedere-

mos sobre un caso sencillo, para mejor comprensión, que, por otra parte, se presenta con frecuencia en la práctica.

Sea una estructura del tipo que se expresa en el esquema de la figura 1.^a, en la que la extremidad *A*, por razones de todo orden, venga sustentada sobre aparato de apoyo que permita el giro y el desplazamiento, y sobre cuyo dintel se supone que actúa una carga uniformemente repartida, *p*, por m. l.

Supongamos que determinadas las características de la viga para aplicación del método de Cross, se han obtenido directamente o utilizando las tablas de Rüppel, por ejemplo, las que figuran en el citado esquema; los momentos locales para carga uniforme resultan, con arreglo a las citadas tablas:

$$M \text{ izquierdo} = 0,155 p l^2 = 100.$$

$$M \text{ derecho} = 0,463 p l^2 = 334,7.$$

La aplicación directa del método (fig. 2.^a), conduce a los resultados que en la figura se consignan, proporcionales en la forma convenida a los momentos y que darían lugar a una ley de variación tal, como la dibujada de puntos en la figura 4.^a, resultado que corresponde a la hipótesis de articulación simple en *A*.

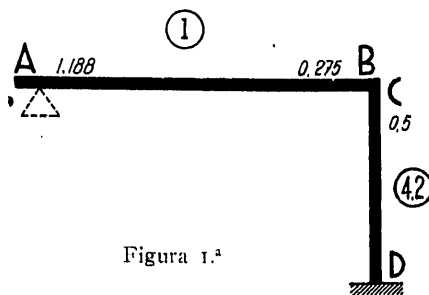


Figura 1.^a

Si, además de tal articulación, existiese posibilidad de libre deslizamiento, la ley de variación de momentos en el pilar debería venir representada por una línea recta paralela a su directriz (línea de trazos en fig. 4.^a), puesto que en *D* la reacción horizontal debería ser nula, ya que de lo contrario no existiría posibilidad de equilibrio, al no poder producirse otra igual y contraria en *A*.

Esta condición de nulidad de reacción horizontal impuesta por la sustentación en *A* puede ser utili-

zada para la determinación exacta de los momentos, introduciendo como factor de corrección una fuerza horizontal hipotética en *A* (fig. 3.^a), condicionando su magnitud y sentido a que anule a la que ha sido obtenida en *A*; o, lo que es igual, aplicando a los dos extremos de la pieza *C-D* dos momentos iguales desconocidos, que, con la convención de signos de Cross, llamaremos $+100a$, y obteniendo con ellos los momentos de empotramiento (fig. 3.^a), que del mismo modo deben anular a los que han sido obtenidos (figura 2.^a) en los extremos de la pieza vertical; es decir, que para que el esfuerzo cortante en el pilar desaparezca, debe verificarse la siguiente condición:

$$(13,84 + 56,93) a = +390,77 + 195,38,$$

de donde se obtiene el valor de:

$$a = \frac{-586,15}{70,77} = -8,23$$

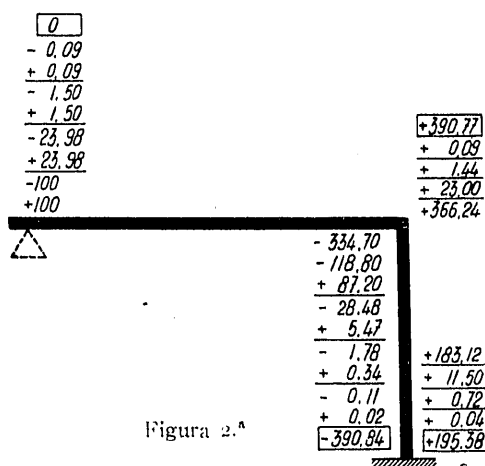


Figura 2.^a

y, una vez conocido este factor de corrección, el valor de los momentos de corrección, que son:

$$\begin{aligned} \text{Momento en } B &= (-13,83) \times (-8,23) = +113,83 \\ \text{" } C &= (+13,83) \times (-8,23) = -113,83 \\ \text{" } D &= (+56,93) \times (-8,23) = -468,53 \end{aligned}$$

Conocido el verdadero valor de los momentos de corrección que corresponden a la reacción horizontal, que con la sustentación supuesta (articulación y deslizamiento) debe ser nula, resta únicamente superponerlos a los que fueron obtenidos (fig. 2.^a) para el caso de articulación simple, para determinar los momentos verdaderos que corresponden a los exactos términos de la cuestión:

$$\begin{aligned} \text{Momento en } B &= (-390,84 + 113,83) = -277,01 \\ \text{" } C &= (+390,84 - 113,83) = +277,01 \\ \text{" } D &= (+195,38 - 468,53) = -277,01 \end{aligned}$$

que, como se ve, responden por su signo y magnitud relativa a las condiciones de sustentación de la estructura (línea de trazos en fig. 4.^a).

Resulta, pues, que en el caso que examinamos, la libertad absoluta de movimiento en el extremo *A* produce, como consecuencia, una disminución de las

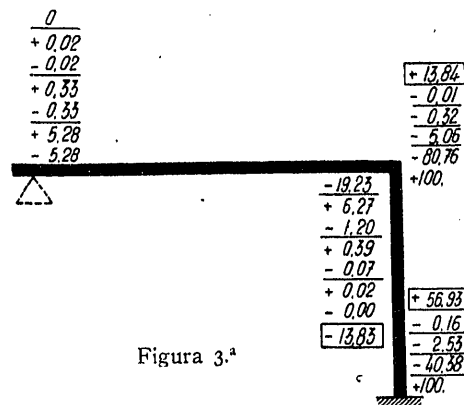


Figura 3.^a

condiciones de empotramiento en *B*, lo que es lógico, y da lugar a que los momentos positivos en el dintel sean más importantes, exigiendo a la par una adecuada y distinta distribución de las armaduras en el pilar; pero, en la práctica, esta situación límite no puede producirse de modo exacto, ya que no es posible prescindir del rozamiento y, si se quiere adquirir el conocimiento completo de las condiciones de trabajo, es preciso, partiendo de la situación ideal cuyo estudio se acaba de realizar o de la correspondiente a la articulación fija, aplicar fuerzas horizontales en ambos sentidos, operando con los momentos con ellas relacionadas por la siguiente expresión:

$$M = \frac{1}{2} F \times h \quad (h = \text{altura del pilar}),$$

conocida, ya que se conocen los coeficientes de rozamiento, y con aproximación suficiente para el caso, las cargas que insisten sobre el aparato o dispositivo de apoyo, y como consecuencia la fuerza horizontal, *F*, que se debe considerar. La situación real de la es-

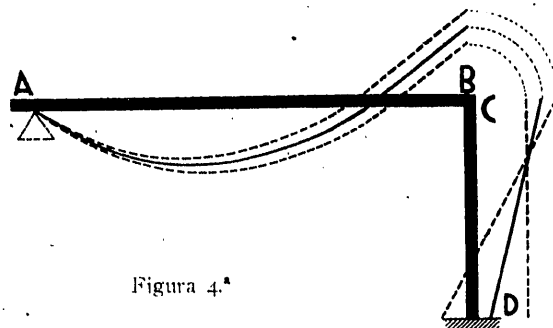


Figura 4.^a

estructura para el caso de sobrecarga, corresponderá a una variación de momentos tal como la que representa la línea llena de la figura mencionada.