

CURVA DE ALCANCES LUMINOSOS

POR JOAQUÍN GARCÍA TUÑÓN, INGENIERO DE CAMINOS

Aporta el autor interesantes comentarios sobre el tema del epigrafe y presenta un modo práctico de utilizar la curva original de alcances luminosos.

La ecuación $Ax^y - Bx^2 = 0$, ya casi centenaria, que ha rendido a la navegación tantos servicios, tuvo, en el transcurso de su vida, diversas alternativas. Conoció períodos en los que fué ponderada por la fama y épocas en las que, por ser excesivos los grandes alcances que proporcionaba, cayó en desgracia y fué abandonada. Ocurrió esto en el primer decenio de este siglo, cuando llegó su descrédito a los mayores extremos, sustituyéndola los publicistas de más prestigio por unas curvas indecisas, traducidas de cuadros estadísticos de garantía dudosa, que se aceptaban como último recurso.

Afortunadamente, cuando Blondel y Rey lograron cifrar en símbolos matemáticos los efectos de la inercia retiniana, como los grandes alcances se obtienen solamente con ópticas giratorias que trabajan por relámpagos, bastó afectar la intensidad fotométrica del faro por aquel factor, para que la ecuación volviera a dar los alcances ciertos para cualquier magnitud de sus variables.

Desde entonces, esta ecuación $Ax^y - Bx^2 = 0$ se utiliza sin recelo — discretamente se utilizó siempre, aun en los días más adversos por los servicios de faros y laboratorios de los constructores de aparatos — y ya solamente se mantiene la vieja lucha por sus coeficientes.

El coeficiente A llegó, en pocos años de estadística, conseguida con los datos recogidos por Torreros vé-races, a valores que han persistido para cada mar y cada tanto por ciento de visibilidad; pero el coeficiente B sigue siendo discutido, oscilando los valores propuestos entre cifras que varían como uno a tres.

El primer valor de B que se conoció mundialmente, fué el determinado por el Servicio de Faros francés, en el invierno de 1860 a 1861, mediante unas experiencias históricas celebradas en el Campo de Marte, que fueron publicadas en una memoria sumamente sugestiva, fechada en 1876, cuyo autor es el Ingeniero Allard, de Ponts et Chaussées, que tuvo la jefatura de aquel Servicio. Dedujeron entonces que una o dos centésimas de bujías Carcel eran visibles a

un kilómetro, en noche de atmósfera limpia, y suponiendo que el observador tuviera una vista excelente, como la atribuida a los marinos, fijaron en 0,01 ese umbral, lo que traducido, en bujías decimales y metros, da 10^{-7} lux, que todavía hoy se emplea mucho,

De los otros valores que se han propuesto desde entonces, puede citarse el que figura en un folleto, publicado en 1924 por Van Vloten, Ingeniero Jefe de Señales Marítimas de Holanda, que fijó ese umbral en $3,15 \cdot 10^{-7}$ lux, coincidiendo con lo propuesto en 1913 por Jean Rey.

Los dos valores citados podemos considerarlos como el mínimo y el máximo de los propuestos, entre los cuales destacamos el indicado en otro folleto, publicado en octubre de 1932 por el Servicio de Investigaciones de la casa constructora de aparatos de faros, situada en Birmingham y titulada "Chance Brothers", que es de $1,22 \cdot 10^{-7}$ lux, al que llega después de un ponderado estudio del tema; valor que utilizamos en el ejemplo que incluimos más adelante.

No se ha llegado todavía a precisar una cantidad definitiva, pero, indudablemente, el asunto va estando ya lo suficientemente debatido para que algún Congreso Internacional adopte una, que sea aceptada por todos, lo que sería muy conveniente.

En las tablas de Allard se utilizó el umbral de 10^{-7} lux, que en bujías Carcel y millas se reduce a $B = 0,0343$, y en las tablas de A. G. A. se emplea también aquel número, pero como las bujías son Hefner, resulta $B = 0,37$.

Adoptados los coeficientes que se juzguen más acertados, el manejo laborioso de la ecuación $Ax^y - Bx^2 = 0$ ha obligado a transformarla en otra, que resulta al tomar los logaritmos de sus términos, de la que se han deducido gráficos que, como es natural, no representan la curva original, que apenas ha sido representada en parte de su rama positiva; pero, siendo tan útil esta ecuación, no parece cosa superflua que se indique alguna vez el aspecto general de la curva que representa, aunque ello no nos permita salir del terreno puramente especulativo.

La curva pasa por el origen, puesto que para $x = 0$ se anula la ordenada; pero como la derivada primera de y respecto a x , que vale:

$$Bx(2 - x \cdot \lg_e A) : A^x$$

se anula también para $x = 0$, resulta el eje de abscisas tangente a la curva en el origen.

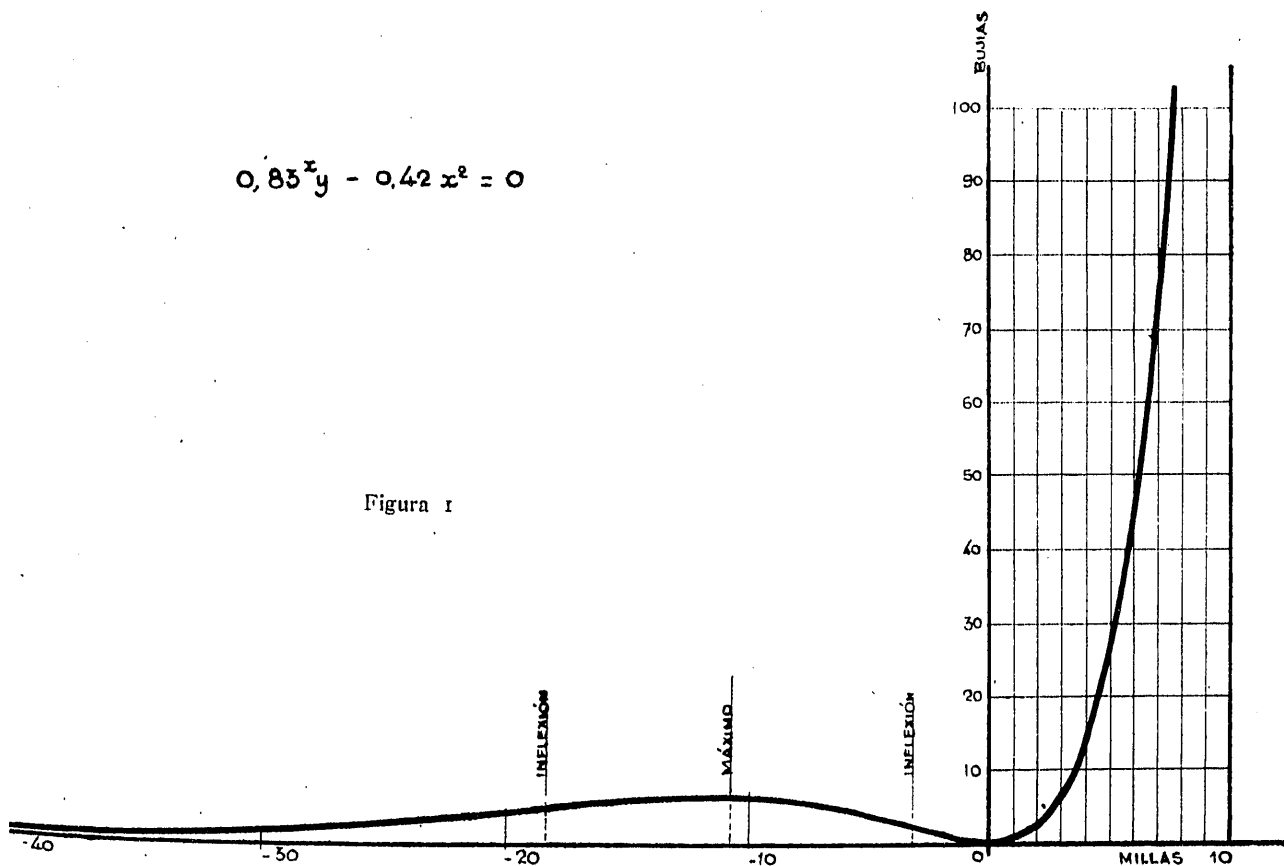
La derivada segunda de y respecto a x , es:

$$B(2 - 4x \cdot \lg_e A + x^2 \cdot \lg_e^2 A) : A^x,$$

que para $x = 0$ se reduce a $2B > 0$; luego el punto de origen es mínimo.

$$0,85^x y - 0,42 x^2 = 0$$

Figura 1



El valor $x = 2 : \lg_e A$ anula también la derivada primera, al tiempo que la derivada segunda toma el valor $-2B : A^x < 0$, por lo cual, la curva pasa por un máximo en ese punto. Conviene observar que la abscisa de este máximo es negativa, porque A es siempre menor que la unidad, por definición.*

La derivada segunda se anula para $x = (2 \pm \sqrt{2}) : \lg_e A$, lo que nos da dos puntos de inflexión de ordenadas equidistantes de la máxima.

Para $x = \infty$ se hacen infinitas la ordenada y la derivada primera, lo que indica que la rama positiva es abierta, siendo vertical su tangente en el punto del

infinito, por lo que no tiene asíntota. En cambio, cuando $x = -\infty$, se anulan la ordenada y la derivada primera, lo que indica que el eje de abscisas es asíntótico a la rama negativa.

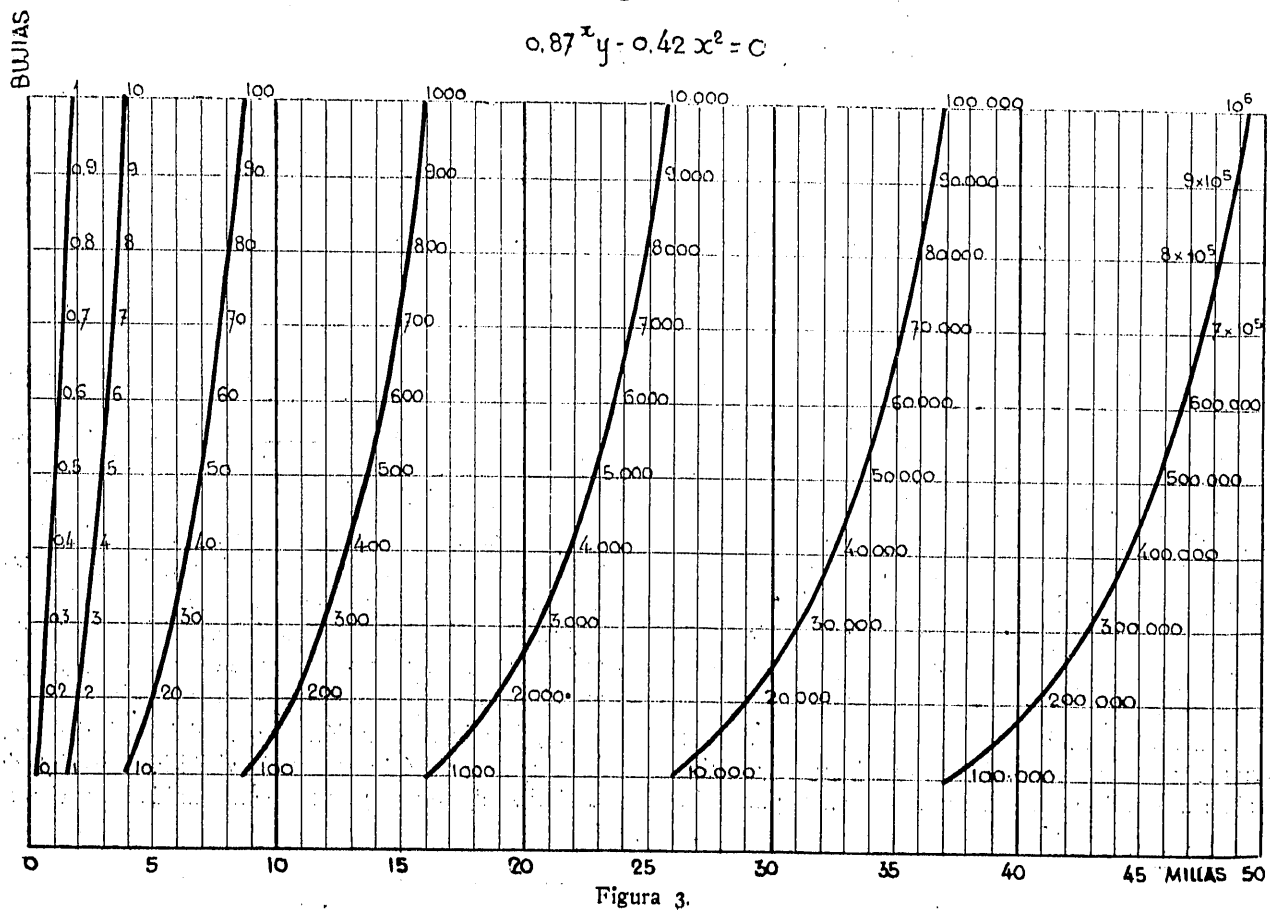
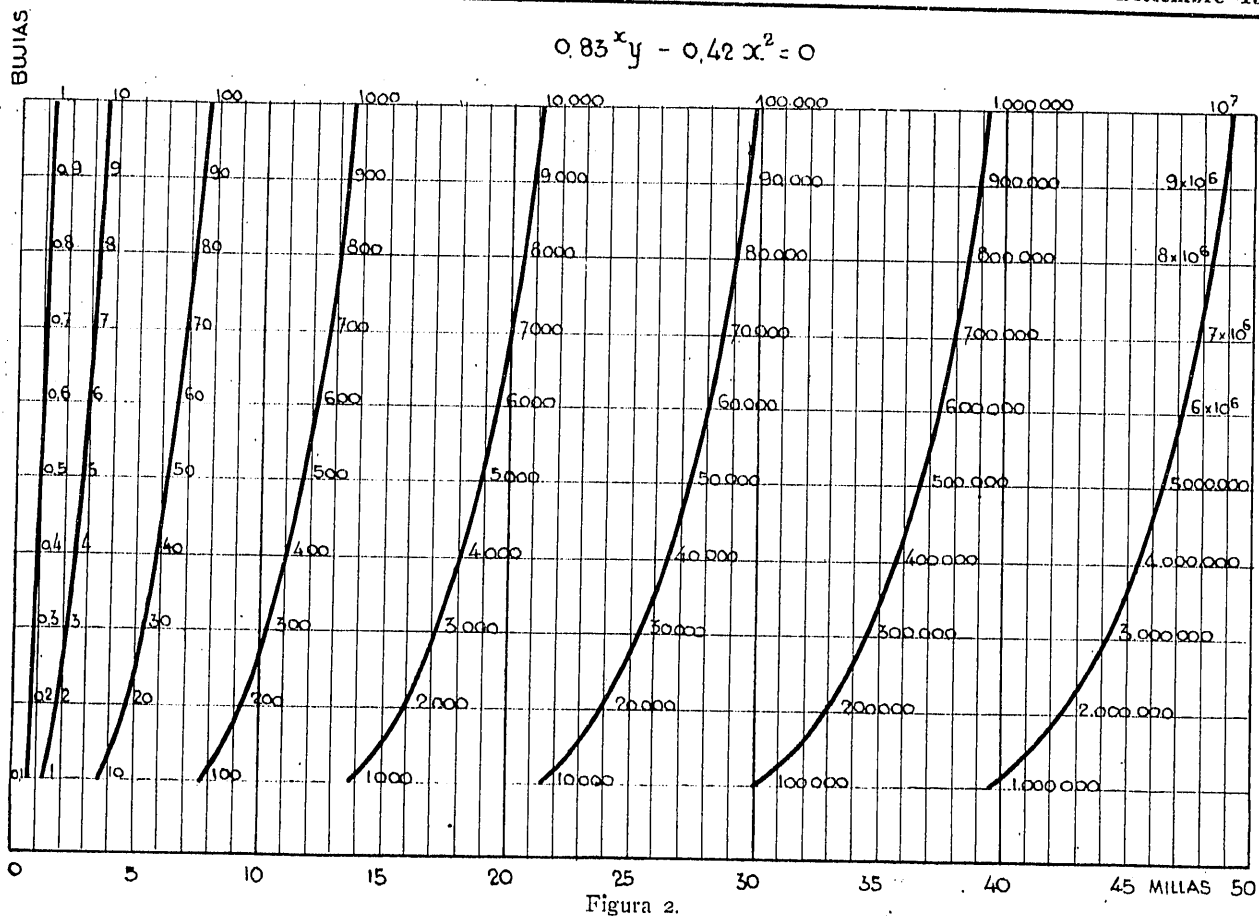
Para $x > 0$, la derivada segunda es positiva — no olvidemos que $A < 1$ —; por tanto, la concavidad de esta rama está dirigida hacia arriba.

De lo expuesto se desprende cierta semejanza de la curva de alcances con la parábola de tercer grado $y = px^3$; pero la rama negativa difiere, porque la curva de alcances, al llegar al segundo punto de in-

flexión, se dobla para no cortar al eje de las abscisas, mientras que la parábola continúa indefinidamente su curso descendente.

Esa semejanza de la rama positiva y del primer trazo de la negativa, parece invitar a la sustitución de una ecuación por otra, en la parte que se utiliza en la práctica, lo que simplificaría los cálculos grandemente; pero no es posible realizar esta idea, porque ambas curvas son inadaptables en la realidad.

Aplicando la ecuación al caso del Atlántico, con luz blanca y un 65 por 100 de visibilidad, utilizando las bujías decimales y millas como unidades y el um-



bral de $1,22 \cdot 10^{-7}$ lux, propuesto por Chance, se obtiene la curva que hemos representado en el adjunto croquis (fig. 1), cuya ecuación es:

$$0,83xy - 0,42x^2 = 0,$$

que tiene el máximo en el punto de coordenadas

$$x = -10,73 \quad y = 6,55,$$

siendo las de los puntos de inflexión:

$$x = -18,32; \quad y = 4,64; \quad x = -3,14; \quad y = 2,31.$$

La rama negativa, dadas las maneras actuales de concebir la luz, no tiene significación física, y la positiva, da ordenadas muy grandes si en los pequeños alcances deseamos alguna precisión, o viceversa.

Por esto también, así como por la circunstancia antes citada, de resultar de manejo engorroso la ecuación de alcances, se acude a las representaciones logarítmicas corrientemente; pero se puede utilizar la curva original de un modo práctico.

Elegida una escala de abscisas y otra de ordenadas, se dibuja normalmente; pero cuando la rama asciende y se sale de los límites del dibujo, se modifica la escala de ordenadas según los múltiplos de diez y se vuelve a modificar cuantas veces sea preciso, dibu-

jándose en cada modificación el trozo de curva correspondiente, que se marca convenientemente para que su interpretación no ofrezca duda.

Así puede encerrarse toda la extensión de curva que nos plazca en un espacio breve, lo que permite contemplar la totalidad de los valores de una sola ojeada, y elegir aquel que nos interesa, con precisión. Da la interpolación mejor que las tablas y tiene sobre los gráficos logarítmicos la ventaja de la proporcionalidad de las escalas dentro de cada trozo.

Acompañamos dos gráficos, trazados del modo dicho: uno (fig. 2), se refiere a la curva antes croquizada, y el otro (fig. 3), a la que procede de los mismos elementos, pero aplicados al Mediterráneo, de donde el coeficiente A pasa a ser 0,87, según lo propuesto por Allard en su tratado de 1889 para el 0,7 de fracción del año, durante la cual, la transparencia es superior a 0,926 por kilómetro.

Se observa que el gráfico que presentamos para el Atlántico da valores próximos a los proporcionados por la tabla de A. G. A., pero esto es un hecho casual, sin ninguna significación, que procede de la compensación resultante, de una parte, por el cambio de bujías Hefner en decimales, y de otra, por el cambio del umbral 0,37 en el 0,42.