

CÁLCULO DE SECCIONES RECTANGULARES DE HORMIGÓN ARMADO, SOMETIDAS A FLEXIÓN OBLICUA

POR ANTONIO ANGULO Y JOSÉ LUIS MÚZQUIZ, INGENIEROS DE CAMINOS

Expuestos en los artículos anteriores los diversos métodos de cálculo que existen para la solución del problema de la flexión oblicua, pasan los autores a detallar un método original de cálculo, y con esto y el estudio del caso en que la excentricidad del esfuerzo es muy pequeña, y la resolución de algunos ejemplos prácticos, dan por terminado su interesante trabajo.

SEGUNDA PARTE

Una vez hecho el resumen de diversos métodos de cálculo, a continuación se detalla un estudio original para el cálculo de piezas rectangulares sometidas a flexión oblicua.

I

Armaduras en las diagonales.

a) Fórmulas fundamentales.

Consideramos (fig. 1.^a) la sección de una viga de ancho a y canto b sometida a un esfuerzo N no situado en ninguno de sus ejes de simetría, que tomaremos como coordenados. Supongamos primeramente que resiste a compresión solamente la mitad de la sección, que se raya en la figura, definida por una recta que pasa por el origen con una inclinación tal que su tangente sea β . La relación entre el momento M_{hy} , tomado respecto al eje Y , y el M_{hx} , hallado respecto al eje X , da el valor de

$$\alpha = \frac{M_{hy}}{M_{hx}} \quad (1)$$

que es la tangente del ángulo que forma con la vertical la recta que une el origen con el punto de aplicación de la fuerza N .

La carga máxima del hormigón se producirá en la esquina más próxima a la fuerza. Llamemos σ_n a la que existe en el centro del parámetro más cargado y la tomaremos como punto de partida para todos los cálculos. Este valor de σ_n se determina en función de $\sigma_{\max}$ y de la inclinación β de la fibra neutra.

En efecto: la magnitud δ que mide la separación

del eje de la sección al punto de intersección de la fibra neutra con el paramento más comprimido, vale:

$$\delta = \frac{b}{2\beta}$$

y por proporcionalidad:

$$\frac{\sigma_n}{\sigma_{\max}} = \frac{\delta}{\delta + \frac{a}{2}} = \frac{1}{1 + \frac{a}{b} \cdot \beta} \quad (2)$$

Calculemos la resultante de todas las compresiones de la sección, y los momentos de esta resultante respecto a los ejes coordenados.

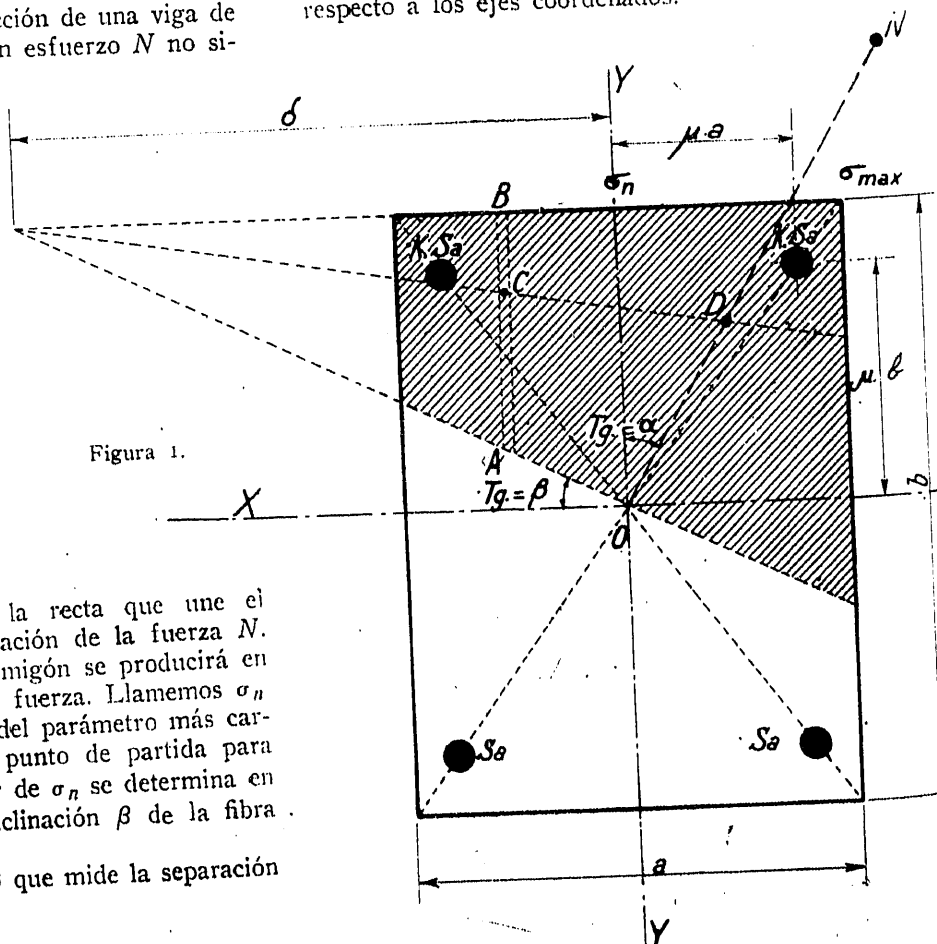


Figura 1.

Para ello, dividamos la parte comprimida en secciones verticales de ancho diferencial. Cada una tendrá una repartición de cargas triangular, siendo nula en el punto A , por estar en la fibra neutra, y máxima, en el punto B , del paramento. Por tratarse de una repartición plana de tensiones moleculares, la compresión en el punto B será proporcional al segmento AB , y tal que, cuando este segmento sea $\frac{b}{2}$, la compresión será σ_n .

La compresión total desarrollada en cada sección diferencial, es:

$$dN = \frac{1}{2} \left(\frac{b}{2} + \beta \cdot x \right) \cdot \sigma_n \cdot \frac{\frac{b}{2} + \beta \cdot x}{\frac{b}{2}} \cdot dx =$$

$$= \frac{\sigma_n}{b} \left(\frac{b^2}{4} + b \cdot \beta \cdot x + \beta^2 \cdot x^2 \right) \cdot dx, \quad [3]$$

y, por tanto, el valor de la resultante será:

$$N_h = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \frac{\sigma_n}{b} \left(\frac{b^2}{4} + b \cdot \beta \cdot x + \beta^2 \cdot x^2 \right) \cdot dx =$$

$$= \frac{\sigma_n \cdot a \cdot b}{4} \left(1 + \frac{1}{3} \beta^2 \cdot \frac{a^2}{b^2} \right). \quad [4]$$

Por tratarse de una repartición triangular de compresiones, el centro de gravedad de cada sección se encontrará en el punto C , situado a doble distancia de A que de B .

El momento resultante, respecto al eje X , será:

$$M_{hx} = \int dN \cdot \left[\frac{b}{2} - \frac{1}{3} \left(\frac{b}{2} + \beta \cdot x \right) \right] =$$

$$= \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \frac{\sigma_n}{3 \cdot b} \left(\frac{b^2}{4} + \frac{3}{4} b^2 \cdot \beta \cdot x - \beta^2 \cdot x^2 \right) \cdot dx =$$

$$= \sigma_n \cdot \frac{a \cdot b^2}{12}, \quad [5]$$

y respecto al eje Y :

$$M_{hy} = \int dN \cdot x = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \frac{\sigma_n}{b} \left(\frac{b^2}{4} \cdot x + b \cdot \beta \cdot x^2 + \beta^2 \cdot x^3 \right) \cdot dx = \sigma_n \cdot \frac{a^3 \cdot \beta}{12}. \quad [6]$$

En los valores de N , M_x y M_y se ha puesto un subíndice h para indicar que se refieren al hormigón.

Podemos calcular el valor de la inclinación β de la fibra neutra en función de la relación de momen-

tos respecto a los ejes X e Y , que son datos. Dividiendo las expresiones [6] y [5], se tiene:

$$\frac{M_{hy}}{M_{hx}} = \frac{\frac{\sigma_n \cdot a^3 \cdot \beta}{12}}{\frac{\sigma_n \cdot a \cdot b^2}{12}} = \frac{a^2}{b^2} \cdot \beta$$

o sea, que

$$\beta = \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{M_{hy}}{M_{hx}}$$

Sustituyendo este valor en las expresiones [2], [4] y [6], y adoptando el valor auxiliar

$$\psi = \frac{b}{a} \cdot \frac{M_{hy}}{M_{hx}} \quad [7]$$

tenemos:

$$\sigma_n = \frac{\sigma_{\max}}{1 + \psi} \quad [8]$$

$$N_h = \frac{\sigma_n \cdot a \cdot b}{4} \cdot \left(1 + \frac{\psi^2}{3} \right) \quad [9]$$

$$M_{h,y} = \frac{\sigma_n \cdot a^2 \cdot b}{12} \cdot \psi. \quad [10]$$

Pueden también deducirse estas fórmulas partiendo de la mitad de una sección homogénea sometida a momentos flectores en las dos direcciones de sus ejes. El lugar geométrico de los centros de gravedad, C , de las secciones diferenciales, es una recta, concurrente con las prolongaciones de la fibra neutra y del paramento más cargado, la cual intercepta, en ordenadas, segmentos de doble magnitud hasta la fibra neutra que hasta el paramento. La resultante de todas estas fuerzas estará en el punto D , intersección de la recta antes trazada con la recta ON , ya que por una parte en esta línea ha de estar la resultante (dada la relación entre M_{hx} y M_{hy}), y por otra, como todos los puntos C están en una recta, en ella se encontrará su resultante, que queda definida por la intersección de ambas.

Como esta resultante cae dentro de la sección, puesto que no se admiten tracciones en el hormigón y la que solicita la sección no tiene por qué sujetarse a esta condición, debe preverse que las armaduras, situadas en las diagonales, complementen la resultante del hormigón, desplazándola desde el punto D , en que está situada, hasta el punto N .

Supongamos la existencia de armaduras de sección S_a en las dos esquinas de tracción y $K \cdot S_a$ en las de compresión, situadas en las diagonales a unas coordenadas, $\mu \cdot a$ y $\mu \cdot b$, como se acota en la figura 1.^a

Las cargas de trabajo del acero, designando por r

al coeficiente de equivalencia entre acero y hormigón, serán:

En las armaduras más cargadas:

$$\sigma_n \cdot \frac{2}{b} \cdot \mu (b + a \cdot \beta) \cdot r.$$

En las armaduras menos cargadas:

$$\sigma_n \cdot \frac{2}{b} \cdot \mu (b - a \cdot \beta) \cdot r.$$

Tomando momentos de los esfuerzos que resisten las armaduras respecto a los ejes X e Y, tenemos:

$$M_{ax} = (1 + K) \cdot \mu \cdot b \cdot S_a \cdot r \cdot \sigma_n \cdot \frac{2}{b} \cdot \mu (b + a \beta + b - a \beta) = 4(1 + K) \cdot \mu^2 \cdot b \cdot S_a \cdot r \cdot \sigma_n \quad [11]$$

$$M_{ay} = (1 + K) \cdot \mu \cdot a \cdot S_a \cdot r \cdot \sigma_n \cdot \frac{2}{b} \cdot \mu [(b + a \beta) - (b - a \beta)] = 4(1 + K) \cdot \mu^2 \cdot \frac{a^2}{b} \cdot S_a \cdot r \cdot \sigma_n \cdot \beta \quad [12]$$

La relación entre ambas será:

$$\frac{M_{ay}}{M_{ax}} = \frac{a^2 \cdot \beta}{b^2},$$

o sea, que:

$$\beta = \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{M_{ay}}{M_{ax}}.$$

Como esta expresión es idéntica a la encontrada para el hormigón, la resultante de ambas estará en la misma recta ON.

El esfuerzo normal de tracción, vale:

$$N_a = 4(1 - K) \cdot \mu \cdot S_a \cdot \sigma_n \cdot r.$$

b) Fórmulas de aplicación.

Con lo anteriormente expuesto podemos calcular una sección de hormigón armado sometida a flexión oblicua con armaduras en las diagonales, en la hipótesis que la fibra neutra pase por el centro de la sección, prefijando sus dimensiones a y b y calculando las armaduras de tracción y de compresión.

Como son datos los momentos M_x y M_y , y la carga de trabajo $\sigma_{m\acute{a}x}$, pueden calcularse los valores de ψ y σ_n por las fórmulas [7] y [8].

Estableciendo la condición de equilibrio, o sea que las fuerzas y momentos exteriores sean la suma al-

gebraica de los producidos en el hormigón y en el acero, tenemos:

$$\begin{cases} N = \frac{\sigma_n \cdot a \cdot b}{4} \left(1 + \frac{\psi^2}{3}\right) - (1 - K) \cdot 4 \cdot \mu \cdot \sigma_n \cdot S_a \cdot r \\ M_x = \frac{\sigma_n \cdot a \cdot b^2}{12} + (1 + K) \cdot 4 \cdot \mu^2 \cdot b \cdot \sigma_n \cdot S_a \cdot r, \end{cases}$$

en las que K es la relación entre las armaduras de compresión y tracción (que suele ser menor que la unidad).

Aquí las incógnitas son S_a y K . La primera se sustituye por el concepto de *cuantía* o relación entre la armadura total de tracción y la sección total del hormigón. Designándola por q , tiene por expresión:

$$q = \frac{2 \cdot S_a}{a \cdot b} \quad [13]$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones, con este valor auxiliar, se tiene:

$$q = \frac{1}{4 \cdot \mu^2 \cdot r} \left[\mu \cdot \left(\frac{1 + \frac{\psi^2}{3}}{4} - \frac{N}{a \cdot b \cdot \sigma_n} \right) + \frac{M_x}{a \cdot b^2 \cdot \sigma_n} - \frac{1}{12} \right] \quad [14]$$

$$K = \frac{\frac{M_x}{a \cdot b^2 \cdot \sigma_n} - \frac{1}{12} - \mu \left(\frac{1 + \frac{\psi^2}{3}}{4} - \frac{N}{a \cdot b \cdot \sigma_n} \right)}{\frac{M_x}{a \cdot b^2 \cdot \sigma_n} - \frac{1}{12} + \mu \left(\frac{1 + \frac{\psi^2}{3}}{4} - \frac{N}{a \cdot b \cdot \sigma_n} \right)} \quad [15]$$

con cuyas fórmulas se calculan las armaduras.

Con la premisa de que la línea neutra pase por el centro de la sección, la carga de trabajo del acero es moderada, por lo que el cálculo de secciones con este criterio no es el más económico cuando se trate de fuerzas muy excéntricas, siendo, por el contrario, conveniente cuando las excentricidades son pequeñas, o sea para el caso de pilares.

Tanto en este caso como cuando pueda existir inversión de momentos, es más constructivo disponer armadura simétrica, pues el levantamiento de barras es complicado en estos casos.

c) Caso particular. — Armadura simétrica.

Las fórmulas precedentes, para el caso de armadura simétrica, se simplifican, ya que al ser $K = 1$, resulta $N_a = 0$, y, por tanto, $N = N_h$ (fórmula [9]).

El método de cálculo es fijar a estima la relación $\frac{a}{b}$, calculando el valor de ψ por la fórmula [7]. El pro-

ducto ab se deduce de estas fórmulas y de las [8] y [9], y es:

$$a \cdot b = \frac{4 \cdot N}{\sigma_{\max.}} \cdot \frac{1 + \psi}{1 + \frac{\psi^2}{3}} \quad [16]$$

Ahora podemos calcular estas dos dimensiones, a y b , puesto que se conoce su cociente (fijado de antemano) y su producto, por la fórmula recién deducida.

La cuantía de tracción, que es igual a la de compresión, vale:

$$q = \frac{\left(1 + \frac{\psi^2}{3}\right) \frac{M_x}{N \cdot b} - \frac{1}{3}}{16 \cdot r \cdot \mu^2} \quad [17]$$

II

Armaduras situadas en la recta que une la fuerza exterior con la resultante de las compresiones en el hormigón.

a) Fundamento.

Al estudiar el caso general resulta muy complicado si tiene armaduras en las esquinas, repartidas según convenga para su mejor aprovechamiento. Por ello, haremos la simplificación de situar las armaduras en la recta que une el punto de aplicación de la fuerza solicitante con la resultante de las compresiones del hormigón.

En la figura 2.^a se detalla una sección en la cual la línea neutra no pasa por el centro de la sección. Esta sección puede asimilarse a otra, de canto b (en lugar del canto total c), en la que la línea neutra ya pasa por el centro y se pueden aplicar las fórmulas [5], [7], [8] y [9] para el hormigón. Además, hay armaduras de tracción cuya sección es S_t y de compresión con sección S_c , situados los centros de gravedad de estas armaduras en la línea $O'N$, que une el centro de la sección ficticia con el punto de aplicación de la fuerza. Estas armaduras están situadas a ordenadas $\mu \cdot c$ la de compresión y $\eta \cdot c$ la de tracción, respecto al centro O' de la sección ficticia.

Las cargas de trabajo de las armaduras son:

$$\sigma_t = 2 \cdot r \cdot \sigma_n \cdot \eta \cdot \frac{c}{b} (1 + \psi^2) \quad [18]$$

$$\sigma_c = 2 \cdot r \cdot \sigma_n \cdot \mu \cdot \frac{c}{b} (1 + \psi^2) \quad [19]$$

que ocasionan en ellas las fuerzas F_t y F_c , respectivamente.

Dada una sección de dimensiones ac , si suponemos como parte resistente ficticia la ab , como la fuerza N y el momento M_x son datos, podemos esta-

blecer las condiciones de equilibrio en función de las dos incógnitas, F_t y F_c :

$$N = \frac{\sigma_n \cdot a \cdot b}{4} \left(1 + \frac{\psi^2}{3}\right) + F_c - F_t$$

$$M'_x = \frac{a \cdot b^2 \cdot \sigma_n}{12} + F_c \cdot \mu \cdot c + F_t \cdot \eta \cdot c$$

De este sistema se deducen los valores de ambas fuerzas:

$$F_c = \frac{M - \eta \cdot c \cdot N_1}{c (\mu + \eta)} \quad [20]$$

$$F_t = \frac{M + \mu \cdot c \cdot N_1}{c (\mu + \eta)} \quad [21]$$

habiéndose elegido los valores auxiliares:

$$M = M'_x - \frac{\sigma_n \cdot a \cdot b^2}{12} \quad [22]$$

$$N_1 = \frac{a \cdot b \cdot \sigma_n}{4} \left(1 + \frac{\psi^2}{3}\right) - N \quad [23]$$

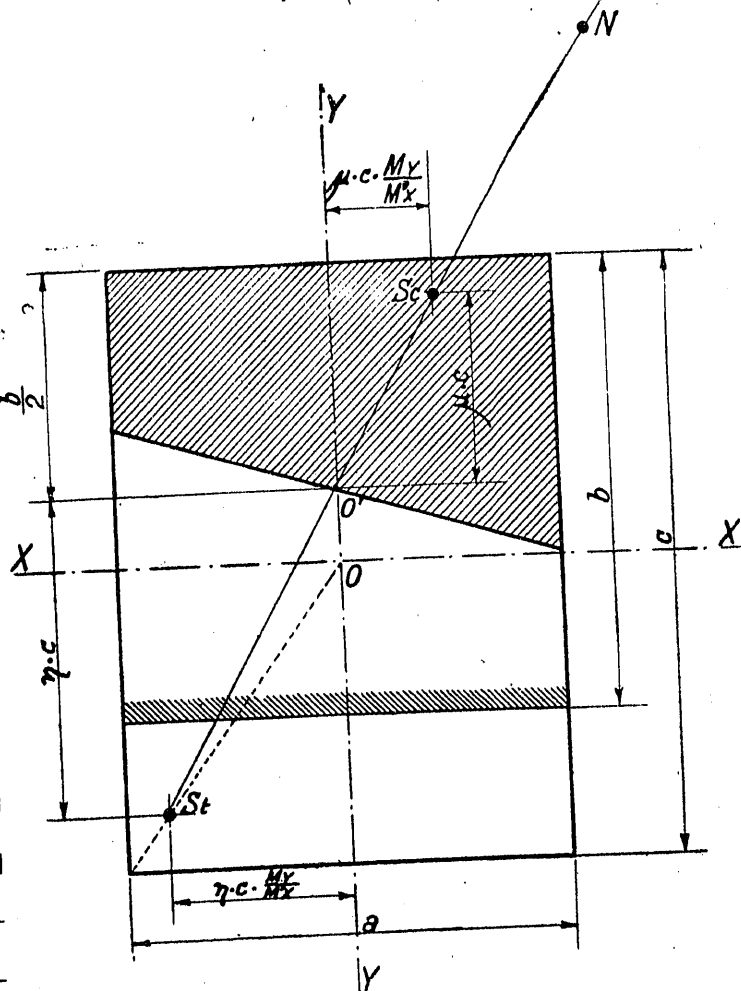


Figura 2.

El momento M'_x es el referido al centro O' de la sección ficticia, y vale:

$$M'_x = M_x - \frac{N \cdot c}{2} \left(1 - \frac{b}{c} \right). \quad [24]$$

Con objeto de que la carga de las armaduras de tracción sea grande, conviene que el punto O' sea lo más alto posible, pero ello tiene dos limitaciones: Una, es que se reduce la sección comprimida de hormigón, por lo que serán precisas más armaduras de compresión. Otra, es que, al unir con una recta el punto O' con el N de aplicación de la fuerza, resulta el centro de las armaduras de tracción fuera del contorno de la sección. Si fijamos como límite que el centro de S_t esté en la diagonal de la sección real y a coordenadas $0,4 a$ y $0,4 c$, tenemos la ecuación de condición:

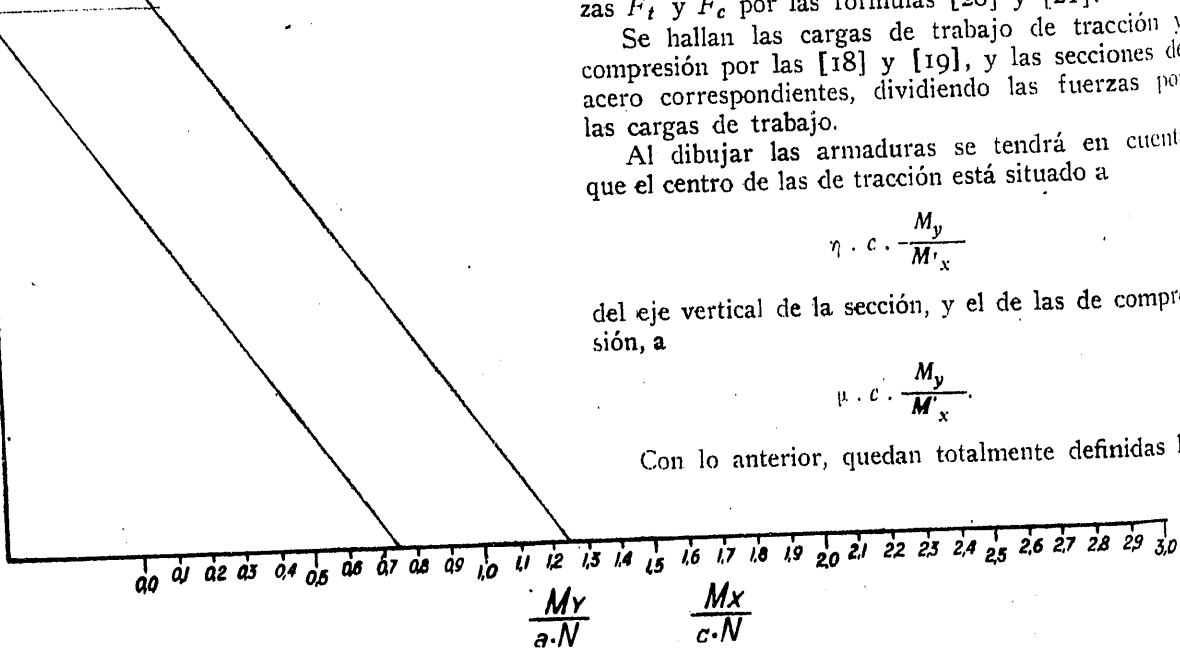
$$\frac{M_y}{M'_x} \geq \frac{0,4 \cdot a}{0,4 \cdot c + \frac{c-b}{2}}$$

y teniendo en cuenta la ecuación [24], se obtiene:

$$\frac{b}{c} \geq 1,8 - 0,8 \frac{\frac{M_x}{c \cdot N} + 0,4}{\frac{M_y}{a \cdot N} + 0,4} \quad [25]$$

Esta desigualdad se resuelve con el ábaco de la figura 3.^a tomando en el eje de abscisas el valor de

η	μ	$\frac{b}{c}$
0,60	0,25	0,60
		0,65
0,55	0,30	0,70
		0,75
0,50	0,35	0,80
		0,85
0,45	0,40	0,90
		0,95
0,40	0,45	1,00



$\frac{M_y}{a \cdot N}$ y uniendo este punto con el marcado con 1,0 en el eje de ordenadas. Se traza una paralela a la recta así dibujada, que pase por el punto representativo de $\frac{M_x}{c \cdot N}$, la cual cortará a la vertical en un valor de $\frac{b}{c}$. Para cada $\frac{b}{c}$ anotamos los de μ y η correspondientes (partiendo de que el centro de las armaduras de tracción esté a $\frac{c}{10}$ del paramento inmediato y las de compresión a $\frac{c}{20}$ del suyo).

b) Modo de calcular las secciones.

El método de calcular las armaduras de una sección, fijando sus dimensiones a y c , será:

Determinar la relación mínima $\frac{b}{c}$, μ y η con auxilio del ábaco de la figura 3.^a, adoptando una relación $\frac{b}{c}$ no inferior a la que resulte. Así se conoce b .

Se calcula el momento M'_x por la fórmula [24] y el valor de

$$\psi = \frac{b}{a} \cdot \frac{M_y}{M'_x}.$$

En función de éste se halla el de σ_n por la fórmula [8].

Se determinan los valores auxiliares de M y N por las fórmulas [22] y [23], en función de las cuales y de los antes determinados se obtienen las fuerzas F_t y F_c por las fórmulas [20] y [21].

Se hallan las cargas de trabajo de tracción y compresión por las [18] y [19], y las secciones de acero correspondientes, dividiendo las fuerzas por las cargas de trabajo.

Al dibujar las armaduras se tendrá en cuenta que el centro de las de tracción está situado a

$$\eta \cdot c \cdot \frac{M_y}{M'_x}$$

del eje vertical de la sección, y el de las de compresión, a

$$\mu \cdot c \cdot \frac{M_y}{M'_x}.$$

Con lo anterior, quedan totalmente definidas la

Figura 3.

armaduras en sección y posición, por lo que se puede ya proyectar la sección transversal de la pieza.

c) *Caso particular. La fibra neutra pasa por el centro de la sección.*

Como caso particular, a continuación se detalla el correspondiente a que la línea neutra pase por el centro de la sección y las armaduras estén a distancias $\mu \cdot b$ del eje horizontal, pero no situadas en las esquinas, como en la figura 1.^a, sino en los paramentos de tracción y compresión.

Las ecuaciones de equilibrio, son:

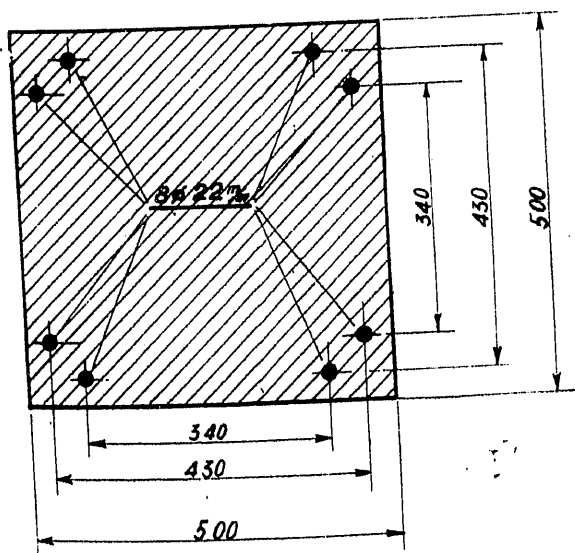
$$\left\{ \begin{aligned} N &= \frac{\sigma_n \cdot a \cdot b}{4} \left(1 + \frac{\psi^2}{3} \right) - \\ &- (1 - K) \cdot a \cdot b \cdot q \cdot r \cdot 2 \cdot \sigma_n \cdot \mu \cdot (1 + \psi^2) \\ M_x &= \frac{\sigma_n \cdot a \cdot b^2}{12} + \\ &+ (1 + K) \cdot a \cdot b^2 \cdot q \cdot r \cdot 2 \cdot \sigma_n \cdot \mu^2 \cdot (1 + \psi^2), \end{aligned} \right.$$

en las cuales la cuantía, q , de tracción se refiere a las armaduras concentradas en el paramento correspondiente.

Resuelto este sistema, se obtienen:

$$q = \frac{1}{4 \cdot \mu^2 \cdot r \cdot (1 + \psi^2)} \left[\mu \left(\frac{1 + \frac{\psi^2}{3}}{4} - \frac{N}{a \cdot b \cdot \sigma_n} \right) + \frac{M_x}{a \cdot b^2 \cdot \sigma_n} - \frac{1}{12} \right], \quad [26]$$

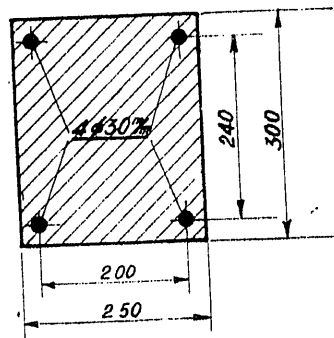
siendo el valor de K el indicado en la igualdad [15].



$$\left. \begin{aligned} M_x &= 400 \text{ cm.} \times \text{ton.} \\ M_y &= 240 \text{ cm.} \times \text{ton.} \end{aligned} \right\} N = 80 \text{ ton.}$$

Figura 4.

Como puede observarse, con el criterio de poner las armaduras en la línea que une la resultante del



$$\left. \begin{aligned} M_x &= 165 \text{ cm.} \times \text{ton.} \\ M_y &= 96 \text{ cm.} \times \text{ton.} \end{aligned} \right\} N = 6,2 \text{ ton.}$$

Figura 5.

hormigón con la fuerza solicitante, son necesarias menos armaduras ($\frac{1}{1 + \psi^2}$ es el coeficiente de reducción) que si se ponen en las esquinas, cosa lógica, pues se aprovecha más el acero.

III

Pequeñas excentricidades.

Finalmente, para pasar revista a todos los casos de flexión oblicua, resta el caso en que ésta es muy pequeña y se admite que el hormigón resiste a tracción.

La fórmula que da la carga del hormigón es:

$$\sigma_{\max.} = \frac{N}{a \cdot c} \left[1 + 6 \left(\frac{M_x}{N \cdot c} + \frac{M_y}{N \cdot a} \right) \right] \cdot \frac{1}{1 + r \cdot q},$$

en la que q significa la cuantía total de armaduras.

Para que esta fórmula pueda aplicarse, es preciso que el paréntesis sea menor de 2,66, pues de ser mayor habría tracciones en el hormigón superiores a $\frac{1}{4}$ de las compresiones, lo cual no es admitido por la Instrucción.

No se ha detallado la deducción de esta fórmula por ser muy sencilla, pues es la correspondiente a material homogéneo con un coeficiente de reducción $\frac{1}{1 + r \cdot q}$ correspondiente a la existencia de las armaduras.

IV

Ejemplos.

Con objeto de concretar ideas, a continuación se detallan cinco ejemplos, dos de los cuales corresponden a idéntica sollicitación e iguales dimensiones de la pieza, variando la situación de las armaduras, y, por tanto, su sección.

EJEMPLO 1: $M_x = 400$ cm. tonelada; $M_y = 240$ centímetros ton.; $N = 80$ ton.

Se trata de pequeñas excentricidades: $c = a = 50$, $r = 10$, $q = 0,012$:

$$\sigma_{\max.} = \frac{N}{a \cdot c} \left[1 + 6 \left(\frac{M_x}{N \cdot c} + \frac{M_y}{N \cdot a} \right) \right] \cdot \frac{1}{1 + r \cdot q} =$$

$$= \frac{80}{50 \times 50} \left[1 + 6 \left(\frac{400}{80 \times 50} + \frac{240}{80 \times 50} \right) \right] \times$$

$$\times \frac{1}{1 + 10 \times 0,012} = 0,0555 \text{ ton.} \times \text{cm.}^2.$$

Armaduras: $50 \times 50 \times 0,012 = 30 \text{ cm.}^2$ Pondremos 8 redondos de 22 mm., cuya sección es de $30,40 \text{ cm.}^2$

EJEMPLO 2: $M_x = 165$ cm. ton.; $M_y = 96$ cm. tonelada; $N = 6,2$ ton.

$\sigma_{\max.} = 0,050 \text{ ton./cm.}^2$, $r = 15$, $\mu = 0,40$. Fijamos $\frac{b}{a} = 1,2$ y pondremos armadura simétrica, si-

$$\phi = \frac{b}{a} \cdot \frac{M_y}{M_x} = \frac{40}{30} \times \frac{80}{200} = 0,533$$

$$q = \frac{1}{4 \cdot \mu^3 \cdot r} \left[\mu \left(\frac{1 + \frac{\phi^2}{3}}{4} - \frac{N}{a \cdot b \cdot \sigma_n} \right) + \frac{M_x}{a \cdot b^3 \cdot \sigma_n} - \frac{1}{12} \right] =$$

$$= \frac{1}{4 \times 0,42^3 \times 15} \left[0,42 \left(\frac{1 + \frac{0,533^2}{3}}{4} - \frac{80}{30 \times 40 \times 0,0326} \right) + \frac{200}{30 \times 40^3 \times 0,0326} - \frac{1}{12} \right] = 0,00697.$$

$$K = \frac{\frac{M_x}{a \cdot b^3 \cdot \sigma_n} - \frac{1}{12} - \mu \left(\frac{1 + \frac{\phi^2}{3}}{4} - \frac{N}{a \cdot b \cdot \sigma_n} \right)}{\frac{M_x}{a \cdot b^3 \cdot \sigma_n} - \frac{1}{12} + \mu \left(\frac{1 + \frac{\phi^2}{3}}{4} - \frac{N}{a \cdot b \cdot \sigma_n} \right)} =$$

$$= \frac{\frac{200}{30 \times 40^3 \times 0,0326} - \frac{1}{12} - 0,42 \left(\frac{1 + \frac{0,533^2}{3}}{4} - \frac{80}{30 \times 40 \times 0,0326} \right)}{\frac{200}{30 \times 40^3 \times 0,0326} - \frac{1}{12} + 0,42 \left(\frac{1 + \frac{0,533^2}{3}}{4} - \frac{80}{30 \times 40 \times 0,0326} \right)} = 0,21.$$

tuándola en las diagonales de la sección:

$$\phi = \frac{b}{a} \cdot \frac{M_y}{M_x} = 1,2 \times \frac{96}{165} = 0,698$$

$$a \cdot b = \frac{4 \cdot N}{\sigma_{\max.}} \cdot \frac{1 + \phi}{1 + \frac{\phi^2}{3}} = \frac{4 \times 6,2}{0,050} \times$$

$$\times \frac{1 + 0,698}{1 + \frac{0,698^2}{3}} = 724$$

$$b = \sqrt{\frac{b}{a} \cdot (a \cdot b)} = \sqrt{1,2 \times 724} = 29,5 \text{ cm.}$$

Tomaremos $b = 30$ cm. $a = \frac{30}{1,2} = 25$ cm.

$$q = \frac{\left(1 + \frac{\phi^2}{3} \right) \frac{M_x}{N \cdot b} - \frac{1}{3}}{16 \cdot r \cdot \mu^3} =$$

$$= \frac{\left(1 + \frac{0,698^2}{3} \right) \times \frac{165}{6,2 \times 30} - \frac{1}{3}}{16 \times 15 \times 0,40^3} = 0,0182;$$

armaduras de tracción: $30 \times 25 \times 0,0182 = 13,65$ centímetros cuadrados.

Pondremos 2 ϕ 30 m., cuya sección es $14,14 \text{ cm.}^2$ A compresión igual.

EJEMPLO 3: $M_x = 200$ cm. ton.; $M_y = 80$ cm. tonelada; $N = 80$ ton.; $\sigma_{\max.} = 0,050 \text{ ton./cm.}^2$; $r = 15$. Línea neutra, pasando por el centro de la sección. Armaduras en las diagonales.

Fijamos $a = 30$ cm.; $b = 40$ cm.; $\mu = 0,42$.

$$\sigma_n = \frac{0,050}{1 + 0,533} = 0,0326 \text{ ton.} \times \text{cm.}^2$$

$$\left. \begin{aligned} M_x &= 200 \text{ cm.} \times \text{ton.} \\ M_y &= 80 \text{ cm.} \times \text{ton.} \end{aligned} \right\} N = 80 \text{ ton.}$$

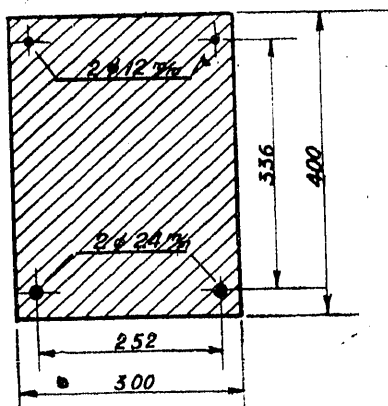


Figura 6.

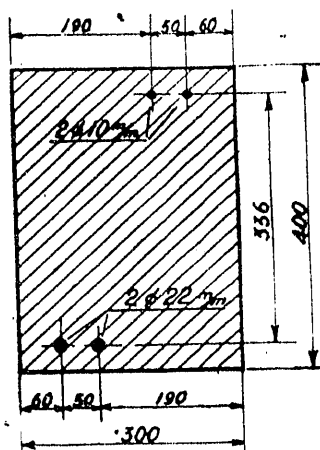


Figura 7.

Armaduras de tracción: $30 \times 40 \times 0,00697 = 8,38 \text{ cm.}^2$; pondremos 2 ϕ 24 mm., cuya sección es $9,06 \text{ cm.}^2$

Armaduras de compresión: $8,38 \times 0,21 = 1,76$ centímetros cuadrados. Son precisos 2 ϕ 12 mm., cuya sección es $2,26 \text{ cm.}^2$

Se colocarán en las diagonales a coordenadas $0,42 \times 30 = 12,60 \text{ cm.}$ y $0,42 \times 40 = 16,8 \text{ cm.}$

EJEMPLO 4: Los mismos datos que en el anterior, pero con armaduras en la alineación de la fuerza exterior y resultante del hormigón. La sección de la armadura de tracción será igual a la anterior, dividida por $1 + \psi^2 = 1 + 0,533^2 = 1,284$.

Armaduras de tracción: $= \frac{8,38}{1,284} = 6,50 \text{ cm.}^2$; bastan 2 ϕ 22, cuya sección es $7,60 \text{ cm.}^2$

Armaduras de compresión: $6,50 \times 0,21 = 1,37$; pondremos 2 ϕ 10 con $1,57 \text{ cm.}^2$

Descentramiento de su centro:

$$\mu \cdot b \cdot \frac{M_y}{M_x} = 0,42 \times 40 \times \frac{80}{200} = 6,73 \text{ cm.}$$

EJEMPLO 5: $M_x = 5.000 \text{ cm.} \times \text{ton.}$; $M_y = 2.400 \text{ cm.} \times \text{ton.}$; $N = 40 \text{ ton.}$

$$\sigma_{\text{máx.}} = 0,050 \text{ ton.} \times \text{cm.}^2$$

Pondremos $a = 80 \text{ cm.}$ $c = 100 \text{ cm.}$ Para utilizar el ábaco, calculamos:

$$\frac{M_y}{a \cdot N} = \frac{2.400}{80 \times 40} = 0,75; \quad \frac{M_x}{c \cdot N} = \frac{5.000}{100 \times 40} = 1,25,$$

$$\left. \begin{aligned} M_x &= 5.000 \text{ cm.} \times \text{ton.} \\ M_y &= 2.400 \text{ cm.} \times \text{ton.} \end{aligned} \right\} N = 40 \text{ ton.}$$

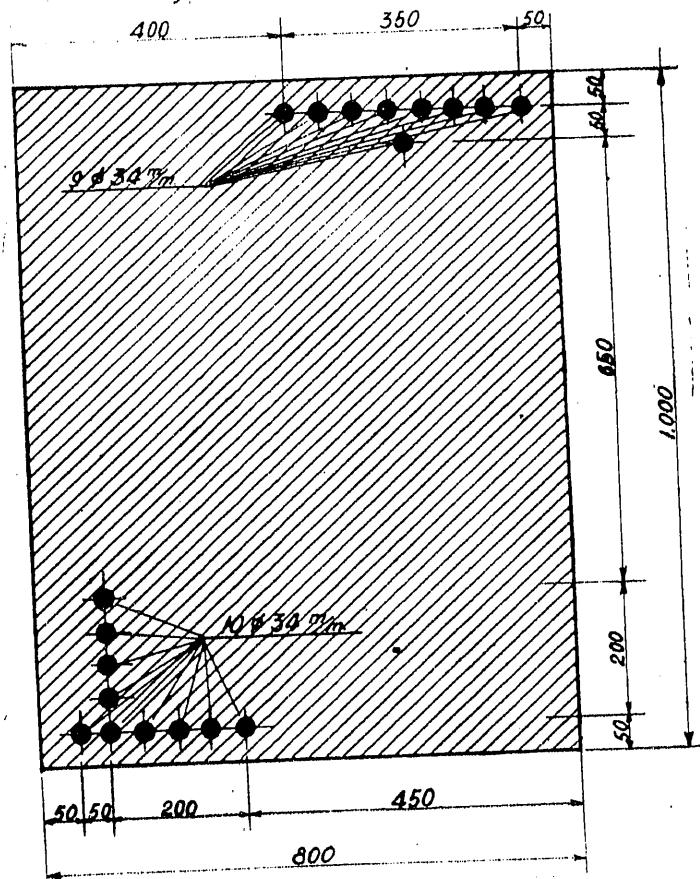


Figura 8.

y resulta:

$$\frac{b}{c} = 0,65.$$

Esto, no obstante, adoptaremos 0,80 para aprovechar mejor la zona de compresión, puesto que la excentricidad es pequeña.

Entonces:

$$b = 100 \times \frac{b}{c} = 100 \times 0,80 = 80 \text{ cm.}$$

$$\mu = 0,35 \quad \eta = 0,50 \quad M'_x = M_x - \frac{N \cdot c}{2} \left(1 - \frac{b}{c}\right) =$$

$$= 5.000 - \frac{40 \times 100}{2} (1 - 0,8) = 4.600 \text{ cm./ton.}$$

$$\psi = \frac{b}{a} \cdot \frac{M_y}{M'_x} = \frac{80}{80} \times \frac{2.400}{4.600} = 0,522$$

$$\sigma_n = \frac{\sigma_{\max.}}{1 + \psi} = \frac{0,050}{1 + 0,522} = 0,0328 \text{ ton./cm.}^2$$

$$M = M'_x - \frac{a \cdot b^3 \cdot \sigma_n}{12} = 4.600 - \frac{80 \times 80^3 \times 0,0328}{12} = 3.160 \text{ cm./ton.}$$

$$N_1 = \frac{a \cdot b \cdot \sigma_n}{4} \left(1 + \frac{\psi^2}{3}\right) =$$

$$-N = \frac{80 \times 80 \times 0,0328}{4} \left(1 + \frac{0,522^2}{3}\right) - 40 = 17,3 \text{ ton}$$

$$F_t = \frac{M + \mu \cdot c \cdot N_1}{c (\mu + \eta)} = \frac{3.160 + 0,35 \times 100 \times 17,3}{100 (0,50 + 0,35)} = 44,3 \text{ ton.}$$

$$F_c = \frac{M - \eta \cdot c \cdot N_1}{c (\mu + \eta)} = \frac{3.160 - 0,50 \times 100 \times 17,3}{100 (0,50 + 0,35)} = 27 \text{ ton.}$$

$$\left\{ \begin{aligned} \sigma_t &= 2 \cdot r \cdot \sigma_n \cdot \eta \cdot \frac{c}{b} (1 + \psi^2) = \\ &= 2 \times 15 \times 0,0328 \times 0,50 \times 0,80 (1 + 0,522^2) = 0,502 \text{ t./c.}^2 \\ \sigma_c &= 2 \cdot r \cdot \sigma_n \cdot \mu \cdot \frac{c}{b} (1 + \psi^2) = \\ &= 2 \times 15 \times 0,0328 \times 0,35 \times 0,80 (1 + 0,522^2) = 0,352 \text{ t./c.}^2 \end{aligned} \right.$$

Sección armaduras de tracción = $\frac{44,3}{0,502} = 88,4$ centímetros cuadrados.

Sección armaduras de compresión = $\frac{27}{0,352} = 76,7$ centímetros cuadrados.

Zona de compresión: Se armará con 9 ϕ 34, cuya sección es 81,8 cm.²

Zona de tracción: Se armará con 10 ϕ 34, cuya sección es 90,9 cm.²

El centro de las armaduras de tracción dista del eje vertical:

$$\eta \cdot c \cdot \frac{M_y}{M'_x} = 0,50 \times 100 \times \frac{2.400}{4.600} = 26 \text{ cm.}$$

Y el de las de compresión:

$$\mu \cdot c \cdot \frac{M_y}{M'_x} = 0,35 \times 100 \times \frac{2.400}{4.600} = 18,2 \text{ cm.}$$

Con estos datos queda la sección totalmente calculada.