

CURVAS DE ENLACE

POR CARLOS LAFFITTE, INGENIERO INDUSTRIAL

Estudia el autor el problema de las curvas de enlace, y propone y razona algunas soluciones para su adaptación a líneas en explotación, estudiando las dificultades a que ello da lugar, y comentando acertadamente los distintos procedimientos que fijan las modernas normas alemanas.

Las normas de la Deutsche Reichsbahn recomiendan, para líneas de nueva construcción, el empleo de acuerdos en forma de clotoide y rampas de peralte rectilíneas, de igual longitud que el acuerdo. Esta longitud, en metros, debe ser normalmente igual a $10 Vh$, siendo V la velocidad máxima en kilómetros por hora, y h , el peralte de la curva en metros, y como mínimo admite $l = 8 Vh$. Si tomamos el primer valor y el peralte máximo admitido, que es 0,15, obtenemos $l = 1,5 V$; si el segundo, $l = 1,2 V$. Con la velocidad máxima de 120 km. por hora, corriente en las grandes líneas europeas, se tiene $l = 180$ y 144 metros, respectivamente.

En líneas en explotación, no siempre es fácil intercalar acuerdos de estas longitudes; entre otras cosas, porque requieren desplazamientos de las curvas circulares hacia el centro, que vienen determinadas

por la relación $d = \frac{l^2}{24 R}$ y aumenta rápidamente con la longitud del enlace. Este desplazamiento, si es importante, puede ser excesivamente costoso y aun prohibitivo, y para reducirlo se recomienda el empleo, en estos casos, de rampas de peralte en S y de acuerdos adecuados a las mismas, los que, a igualdad de longitud, exigen un desplazamiento menor de la curva circular; si, por ejemplo, se adopta la solución de Schramm, este desplazamiento se reduce a la mitad del que exige la clotoide. Ahora bien: es interesante saber, si a igualdad de longitud las dos curvas son equivalentes, en cuanto se refiere al paso de los trenes por las mismas. Examinemos el asunto, desde el punto de vista del acuerdo, en planta y en alzado.

Para el acuerdo en planta, se admite, hoy día, que su calidad viene determinada por las sobreaceleraciones en los vehículos que pasan por el acuerdo. Para la clotoide, cuyo radio de curvatura a la distancia s del origen, viene determinado por

$$\frac{l}{r} = \frac{ls}{Rl}, \quad [1]$$

siendo R el radio de la curva circular y l la longitud del enlace, la aceleración centrífuga, en el centro de los vehículos, es $\frac{V^2}{r} = \frac{V^2 s}{Rl}$. La centrípeta, para el ancho de vía normal europeo de 1,5 m. entre ejes de

carriles es, con suficiente aproximación, $\frac{gy}{1,5}$, siendo y las ordenadas de la rampa de peralte, que vienen determinadas por la relación:

$$y = h \frac{s}{l}, \quad [2]$$

en la que h es el peralte de la curva circular. La aceleración resultante es, haciendo $s = vt$:

$$\frac{vt}{l} \left(\frac{V^2}{R} - \frac{gh}{1,5} \right).$$

Se obtiene la sobreaceleración dividiendo por t y es, expresando V en kilómetros p./h. y h en milímetros:

$$\psi = \frac{V}{3,6l} \left(\frac{V^2}{13R} - \frac{h}{153} \right). \quad [3]$$

En la curva de Schramm, la ecuación de la rampa de peralte, en su primera mitad, es:

$$y = \frac{2hs^2}{l^2} \quad [4]$$

y el radio de curvatura correspondiente se determina por

$$\frac{l}{r} = \frac{2s^2}{Rl^2}. \quad [5]$$

La sobreaceleración, en este caso, es:

$$\psi = \frac{4V^2t}{13l^2} \left(\frac{V^2}{13R} - \frac{h}{153} \right). \quad [6]$$

Cuyo valor máximo corresponde al máximo de t , o sea el correspondiente al punto medio de la curva, puesto que la ecuación [6] sólo es aplicable a la primera mitad de la misma. Haciendo $t = 3,6 \frac{l}{2V}$ se obtiene para ψ un valor doble del que da la relación [5].

La recta OA , representa la sobreaceleración en función del tiempo para la curva de Schramm. Es fácil demostrar que los fenómenos son análogos en la segunda mitad de la curva, y la recta que representa la sobreaceleración es la AB . Para la clotoide, ésta tiene un valor constante representado por CD , sien-

do su valor, como hemos visto, la mitad del máximo correspondiente al caso anterior.

Parece deducirse de ello que la solución basada en el empleo de la rampa rectilínea es superior a la de Schramm; pero, en la práctica, la ventaja de la pri-

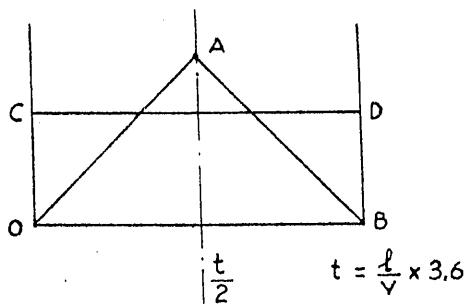


Figura 1.

mera no es grande, porque los valores de ψ , a los que conduce la segunda, son moderados; en efecto: si adoptamos, como lo hace la Reichsbahn, la aceleración resultante igual a 0,60, se tendrá:

$$\frac{V^2}{13 R} - \frac{h}{153} = 0,60;$$

lo que con $l = 1,5 V$ conduce, para la curva en S. a

$$\psi = \frac{2 \times 0,60}{3,6 \times 1,5} = 0,222,$$

que es un valor moderado. Con $l = 1,2 V$ se obtiene $\psi = 0,278$, que es admisible, puesto que se llega sin inconveniente al valor de $\psi = 0,30$.

En lo que se refiere al centro del vehículo, no hay inconveniente, en vista de lo expuesto, en el empleo de la solución de Schramm. Ahora bien: conviene examinar también lo que ocurre en las zonas más desfavorables de los vehículos, que son las extremas. En un artículo anterior (1) hemos propuesto basarse, para el estudio de los enlaces, en la consideración de las sobreaceleraciones en los pivotes, que si no son las máximas, se aproximan suficientemente a las mayores de la zona del vehículo, ocupada por los viajeros. La sobreaceleración en el pivote delantero, a la entrada del vehículo en el acuerdo, se determina enseguida, observando que, en este caso, sólo uno de los carretones se encuentra en la rampa de peralte, lo cual reduce la aceleración centrípeta en el centro del vehículo a la mitad del valor correspondiente al carretón que se encuentra en el enlace.

Se tiene entonces para la clotoide:

$$\psi = \frac{V}{3,6 l} \left(\frac{V^2}{13 R} - \frac{h}{2 \times 153} \right). \quad [7]$$

Para la aceleración resultante 0,60 y $l = 1,5 V$, se obtiene:

$$\psi = \frac{l}{1,5 \times 3,6} \left(0,60 + \frac{h}{2 \times 153} \right),$$

y si se adopta para h el valor máximo, que es 150 mm., encontramos: $\psi = 0,202$. Con $l = 1,2 V$ se llega a $\psi = 0,252$.

Con la rampa en S, tendremos:

$$\psi = \frac{4 V^2 t}{13 l^2} \left(\frac{V^2}{13 R} - \frac{h}{2 \times 153} \right), \quad [8]$$

cuyo valor máximo corresponde ahora a $t = \frac{2c}{V} \times 3,6$, siendo $2c$ la separación de pivotes, supuesta menor que $\frac{l}{2}$, puesto que estamos considerando la entrada del vehículo en el enlace.

La igualdad de [7] y [8] con $t = \frac{2c}{V} \times 3,6$, exige:

$$l = 4 \times 2 c.$$

Para valores mayores de l dará menores valores de ψ la solución Schramm, que exige por tanto la adopción de $l \geq 4 \times 2 c$ [9]. Si $2c = 20$ m. $l \geq 80$ m. Si se cumple esta condición se pueden considerar como equivalentes las dos soluciones que, como hemos visto, conducen a sobreaceleraciones máximas del mismo orden, si bien se producen en los extremos para la clotoide y en el centro para la otra solución.

Acuerdo en alzado.— Da lugar a una descarga estática de las ruedas, y otra, dinámica; estas descargas, si son excesivas, pueden originar un peligro de descarrilamiento, especialmente a la salida de las curvas, porque entonces tienen lugar en la rueda delantera exterior que sirve de guía.

La descarga estática, ha sido estudiada para los distintos tipos de locomotoras empleados en Alemania, teórica y experimentalmente (1). Marié, en su conocido *Tratado de estabilidad del material de ferrocarriles*, página 124, estudia el efecto del alabeo de la rampa de peralte en un vehículo de dos ejes, y encuentra para la deformación de los muelles la relación

$$x = \frac{2 c i}{4} \frac{m}{p},$$

en la que $2m$ es la separación de ejes de los muelles;

(1) Véase la REVISTA DE OBRAS PÚBLICAS de 1.º de julio de 1933.

(1) Véase *Boletín del Congreso de F. C.*, diciembre de 1932, pág. 2.390.

esta relación conduce a una variación proporcional de carga de los muelles igual a $\frac{2ci}{4a} \frac{m}{p}$, siendo a la flecha estática de los mismos, y a una descarga en el carril Δ , dada por

$$\Delta = \frac{2ci}{4a} \times \frac{m^2}{p^2} \quad [10]$$

Marié aplica la relación [10] a los vehículos de varios ejes, tomando para $2c$ la distancia entre ejes extremos, y aunque esto es sólo aproximado, como el error es por exceso de descarga, y, por tanto, en beneficio de la seguridad, puede utilizarse como primera aproximación. Las rampas máximas utilizadas en grandes líneas dan: $i = \frac{l}{300}$, lo que conduce para una locomotora en la que $2c = 10m$, $a = 0.05$, $2m = 1.20$ y $2p = 1.50$, a una descarga $\Delta = 0.1065$, o sea alrededor de un 10 por 100. En realidad, esta cifra varía, aun siendo $2c$ y a constantes con el tipo de locomotora, pero es siempre proporcional a i (2). Como la pendiente máxima es, en la solución de Schramm, el doble que en la de rampa uniforme, para que las condiciones sean iguales, la longitud tendrá que ser el doble en la rampa en S, es decir, que la longitud mínima de rampa admisible pasará de 300 h a 600 h, o sea que $l \geq 600h$ [11]. Para el peralte máximo, la longitud mínima de acuerdo, en la solución de Schramm, será de 90 m.

Descarga dinámica.— Los fenómenos a que da lugar la descarga dinámica en el paso de los acuerdos, son complejos y no han sido, que sepamos, objeto de estudios teóricos y experimentales, tan completos como los de descarga estática. A los efectos comparativos que nos ocupan, es suficiente la consideración de la oscilación de balance en el caso sencillo

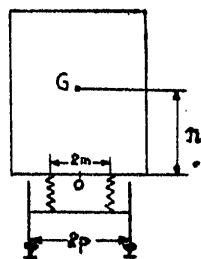


Figura 2.

de un vehículo con ejes igualmente cargados y provistos de muelles de idéntica flexibilidad, lo que reduce el problema al relativo a un vehículo hipotético

de un solo eje (fig. 2). Tratándose de una rampa de peralte uniforme, la consideración de una aceleración horizontal, J , conduce a la ecuación de momentos con relación al centro de oscilación o (fig. 2).

$$Jn + gn \frac{x}{m} = m \omega^2 x + \frac{\rho^2 + n^2}{m} x'',$$

en la que x representa las deformaciones de los muelles, ρ es el radio de giro con relación a o , y $\omega^2 = \frac{g}{a}$.

En el caso que nos ocupa, $J = \psi t$, y la relación se convierte en

$$x'' + Q^2 x = \frac{m n \psi t}{\rho^2 + n^2}; \quad \cos Q^2 = \frac{m^2 \omega^2 - g n}{\rho^2 + n^2}.$$

La integral general es:

$$x = A \cos Q t + B \sin Q t + \frac{m n \psi t}{Q^2 (\rho^2 + n^2)}.$$

Para $t = 0$, $x = 0$; luego $A = 0$.

Para

$$t = 0 \quad x' = -\frac{v l m}{2 p};$$

luego

$$B = \frac{l}{Q} \left(\frac{v l m}{2 p} \frac{m n \psi}{m^2 \omega^2 - g n} \right).$$

Por tanto:

$$x = \frac{l}{Q} \frac{v l m}{2 p} \frac{m n \psi}{m^2 \omega^2 - g n} \sin Q t + \frac{m n \psi t}{m^2 \omega^2 - g n}.$$

El segundo término da para cada punto la deformación estática correspondiente a la aceleración ψt ; el primero es el término oscilatorio que puede escribirse, teniendo en cuenta que:

$$\psi = \frac{V^2}{R l} - \frac{v l g}{2 p}$$

$$\frac{m v}{(m^2 \omega^2 - g n) Q} \left(\frac{m^2 \omega^2}{2 p} l - \frac{n v^2}{R l} \right) \sin Q t,$$

y expresando la velocidad en kilómetros por hora:

$$\frac{m V}{3.6 (m^2 \omega^2 - g n) Q} \left(\frac{m^2 \omega^2}{2 p} l - \frac{m V^2}{13 R l} \right) \sin Q t \quad [11]$$

En las alineaciones rectas, $R = \infty$, y la relación anterior se convierte en:

$$\frac{m o l}{Q \times 2 p} \frac{m^2 \omega^2}{m^2 \omega^2 - g n} \sin Q t,$$

cuyo máximo corresponde a $\sin Q t = 1$, y es aproximadamente igual al encontrado por Marié por otro camino (1).

La diferencia estriba en que en el estudio de

(2) Véase Boletín del Congreso de F. C., diciembre de 1932.

(1) Véase obra citada, pág. 126.

Marié se desprecia el término gn , que es pequeño al lado del $m\omega^2$, y resulta el valor máximo de

$$x = \frac{m v l}{2 p \Omega}$$

Volviendo a nuestro estudio, vamos a aplicar la relación [II] al caso de la locomotora a que nos hemos referido antes, en la que

$$m = 0,6, \quad n = 0,9, \quad \Omega = 6,28, \quad \omega = \frac{g}{0,05} = 200;$$

admitiremos como hasta ahora:

$$l = \frac{l}{10 V}, \quad l = 1,5 V \quad y \quad \frac{V^2}{R} = 20,25,$$

que corresponde a una aceleración resultante de 0,60 en el peralte máximo de 0,15, y es la adoptada por los ferrocarriles alemanes.

Se tiene entonces:

$$\frac{V^2}{R l} = \frac{20,25}{1,5} = 13,5$$

y el término oscilatorio es 0,00163 sen Ωt , siendo su amplitud máxima de 1,63 mm., y la variación relativa de carga:

$$\frac{0,00163}{a} \times \frac{m}{2 p} = 0,026,$$

o sea, 2,6 por 100. En la primera semionda se produce una compresión, y en la segunda, una extensión, cuyo valor es algo menor que el calculado por el amortiguamiento. Todo esto se refiere a la entrada de los vehículos en el acuerdo; a la salida de la curva circular los fenómenos son análogos; pero el término oscilatorio da entonces una extensión igual a la calculada en la primera semionda. Ahora bien: a la salida de la curva circular existe un defecto de peralte que, según las normas alemanas, da una aceleración resultante de 0,6, lo que se traduce a una compresión de los muelles igual a

$$\frac{J n m}{m^2 \omega^2 - g n} = 0,00497,$$

como se ve muy superior a la descarga calculada de 0,00163; de modo que, en definitiva, sólo se produce descarga a la entrada y salida del acuerdo. Esta última se determina haciendo en [II] $R = \infty$, y su valor es:

$$\frac{m V}{2 p \times 3,6 \Omega} \frac{m^2 \omega^2}{m^2 \omega^2 - g n}$$

que da $x = 0,002$ y una descarga relativa de 3,24 por 100 que se produce en la segunda semionda y queda por tanto reducida por el amortiguamiento.

Vemos que con las normas alemanas la descarga dinámica máxima calculada por exceso resulta pequeña y se produce a la salida del acuerdo, donde es

menor el peligro de descarrilamiento que a la salida de la curva circular.

Rampa en S. — En este caso, la aceleración horizontal es:

$$\frac{2 v^2 t^2}{l^2} \left(\frac{v^2}{R} - \frac{g h}{2 p} \right)$$

y hay que tomar en consideración la aceleración vertical de la rueda que es referida a los muelles $y'' \frac{m}{p}$

con $y = \frac{h v^2 t^2}{l^2}$. Se tiene, por tanto, la ecuación diferencial:

$$x + \Omega^2 x = \frac{n m}{\rho^2 + n^2} \times \frac{2 v^2 t^2}{l^2} \left(\frac{v^2}{R} - \frac{g h}{2 p} \right) + \frac{2 v^2 h m}{l^2 p} \text{ con } \Omega^2 = \frac{m^2 \omega^2 - g n}{\rho^2 + n^2}$$

que integrada, nos da:

$$x = \frac{2 v^2}{l^2} \frac{n m}{m^2 \omega^2 - g n} \left(\frac{v^2}{R} - \frac{g h}{2 p} \right) t^2 + \frac{2 v^2}{l^2 \Omega^2} \left[\frac{h m}{p} - \frac{2 n m}{m^2 \omega^2 - g n} \left(\frac{v^2}{R} - \frac{g h}{2 p} \right) \right] (1 - \cos \Omega t).$$

El término oscilatorio tiene el valor máximo:

$$\frac{4 v^2}{\Omega^2 l^2} \left[\frac{h m}{p} - \frac{2 n m}{m^2 \omega^2 - g n} \left(\frac{v^2}{R} - \frac{g h}{2 p} \right) \right]$$

y con V en kilómetros por hora:

$$\frac{4 v^2}{\Omega^2 l^2} \left[\frac{h m}{p} - \frac{2 n m}{m^2 \omega^2 - g n} \left(\frac{v^2}{13 R} - \frac{g h}{2 p} \right) \right] \quad [12]$$

Aplicada al ejemplo anterior la oscilación máxima es 0,000414; es decir, que no llega a medio milímetro.

En este caso, la deformación máxima se produce en el punto medio de la curva de enlace, donde se origina el cambio de sentido de la aceleración. En este punto, una vez amortiguado el movimiento oscilatorio, la compresión inicial es la mitad de la anterior, o sea 0,000207, y la velocidad inicial:

$$\frac{4 v^2}{13 l^2} \frac{m n}{m^2 \omega^2 - g n} \left(\frac{v^2}{13 R} - \frac{g h}{2 p} \right) \frac{1 \times 3,6}{2 v} = 0,0019.$$

La ecuación del movimiento es, tomando como positivas las extensiones:

$$x = 0,000207 (1 - 2 \cos \Omega t) - \frac{0,0019}{\Omega} \text{ sen } \Omega t \cos \Omega = 6,28.$$

El valor máximo corresponde a $\Omega t = 216^\circ 25'$, y es $x = 0,00073$. Ahora bien: en ese punto el peralte es la mitad del máximo, y el radio el doble del de la curva circular; de modo que la aceleración resultante es la mitad y también la compresión que ella origina, o sea que es 0,0025 muy superior a la extensión, de modo que no se produce descarga en la rueda; ésta sólo tiene lugar a la salida del acuerdo y es insignificante.

Parece, según lo expuesto, que esta solución es superior a la anterior desde este punto de vista; pero prácticamente debe considerarse equivalente, por ser de muy poca importancia, como hemos visto, las oscilaciones debidas a las acciones dinámicas. Sin embargo, si se considera la masa no suspendida, que tiene importancia, especialmente en tracción eléctrica, en la que se emplean motores del tipo de tranvía, cuyo peso no suspendido es bastante grande, parece, a primera vista, que al pasar por los ángulos vivos de la rampa de peralte rectilínea las aceleraciones que se produzcan tendrán valor teóricamente infinito y darán lugar a descargas muy importantes de las ruedas. Prácticamente no ocurre tal cosa porque, debido a las deformaciones de la vía que no hemos tenido en cuenta, se mitigan notablemente dichas aceleraciones; además, en realidad no existe el ángulo vivo en el carril y se establece de modo automático una curva vertical que suaviza los fenómenos anteriores.

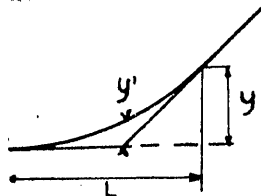


Figura 3.

Para darnos cuenta de la importancia de esta curva admitiremos en ella, como recomienda Descubes (1), una aceleración de 0,17, que da esfuerzos de 1,7 por 100 de la masa no suspendida; por tanto, muy moderados; tendremos entonces, refiriéndonos a la figura 3.

$$L \sim Ri$$

$$y = \frac{L^2}{2R} = \frac{R^2 i^2}{2} \text{ con } i = \frac{l}{10V} \text{ y } \frac{V^2}{13R} = 0,17$$

$$y = \frac{l}{26 \times 17} = 0,0026.$$

En el punto medio, $y' = \frac{0,0026}{4} = 0,00065$; la ordenada de la curva vertical se aparta tan sólo unos $\frac{2}{3}$ de milímetro del vértice del ángulo teórico. Es indudable que la rigidez del carril dará prácticamente redondeos más suaves que el supuesto, que mejorarán este tipo de acuerdo desde el punto de vista de las acciones dinámicas.

Resumiendo: la solución de Schramm debe considerarse equivalente a la clotoide a igualdad de longitud, siempre que se cumplan las condiciones [9] y [11], que limitan bastante su empleo; ofrece sobre ella la ventaja de reducir a la mitad los despla-

mientos de la curva circular y el inconveniente de ser más delicado su replanteo, por lo que es lógico limitar su empleo a los casos en que resulte difícil la aplicación de la clotoide, y así se efectúa en Alemania.

En un artículo anterior, hemos propuesto una solución para reducir el desplazamiento (1) de la curva circular, basada en el empleo de la clotoide y de la rampa de peralte rectilínea, que consiste en adoptar una longitud de rampa $\geq l + 2c$, refiriéndose $2c$ al vehículo de mayor longitud que se utilice. Se consigue con ello un refuerzo de la sobreaceleración centrípeta al entrar el vehículo en el acuerdo, por encontrarse en el mismo los dos carretes. El valor de la sobreaceleración resulta entonces para el pivote a la entrada del acuerdo:

$$\phi = \frac{V}{3,6} \left(\frac{V^2}{13Rl} - \frac{h}{153L} \right),$$

siendo L la longitud de la rampa de peralte $\geq l + 2c$.

Si para reducir el desplazamiento adoptamos $l = V$, con lo que se dividirá por 2,25 el necesario con $l = 1,5V$, o sea se reducirá a menos del que exige con la solución de Schramm, tendremos con $\frac{V^2}{R^2} = 20,25$ $L = 1,5V$ y $h = 1,50$:

$$\phi = 0,423 - 0,182 = 0,25,$$

valor muy aceptable. En cuanto a la rampa de peralte, es la misma que antes; de modo que estimamos que esta solución permite conservar la misma forma de acuerdo en los puntos en que sea difícil, por las causas indicadas, adoptar la clásica de rampa de igual longitud que el acuerdo. Estiman los autores alemanes que el adoptar $L > l$ ofrece inconvenientes originados por la inversión que a la entrada en el enlace sufre la aceleración resultante, que de centrípeta pasa a centrífuga. No se nos alcanza que esto pueda originar perturbaciones, que no hemos observado en la práctica. Por otro lado, aconsejan los mismos autores que en los puntos de la línea en los que hay curvas seguidas de contracurvas no se deje alineación recta intermedia, por ser mejor la transición con los dos acuerdos tangentes (2); ahora bien: es indudable que se produce en este caso el temido cambio de sentido de la aceleración, sin que al parecer ofrezca inconveniente alguno. Creemos, por tanto, interesante la solución propuesta.

Cabe aun adoptar, dentro del empleo de la clotoide, otras soluciones basadas en utilizar radios iniciales y finales distintos de los utilizados de ordinario, como se hace en América. En el artículo citado de Dyna estudiamos también estas soluciones.

(1) Véase REVISTA DE OBRAS PÚBLICAS, artículo citado, y Dyna, de enero de 1942.

(2) Véase Boletín del Congreso de FF. CC., agosto de 1936, artículo de E. Feyl.

(1) Revue Générale des Chemins de Fer, junio de 1922.