

TANTEO Y ANÁLISIS DE ESTRUCTURAS MÚLTIPLES

POR JOSÉ SOTO BURGOS, INGENIERO DE CAMINOS

Este método original que presenta el autor, y que es consecuencia no sólo de su preparación teórica sino de su experiencia en el desarrollo de numerosos e importantes proyectos, permite determinar los momentos que se producen en las estructuras múltiples con un asombroso ahorro de tiempo y de trabajo, mediante unos sencillos recorridos en los que se va multiplicando el momento no equilibrado de cada nudo por los coeficientes que encuentra en el camino.

I. Fundamentos teóricos.

Las ideas fundamentales que sirven de base al desarrollo de los métodos de análisis de las estructuras continuas, son las mismas para todos, sea cual fuere el mecanismo operatorio elegido. Manejando éste a nuestro gusto, podremos no sólo pasar de uno de los corrientemente empleados a otro, sino también disponer de nuevas combinaciones que nos permitan determinar las tensiones a que se hallan sometidos los distintos puntos de los elementos, por procedimientos aparentemente nuevos. Resulta muy interesante aplicar a una estructura los diversos sistemas de cálculo, algebraicos, de aproximaciones sucesivas, gráficos, etc., así como las combinaciones de unos con otros y estudiar las posibilidades que cada uno de ellos nos ofrece. Así, por ejemplo, la ordenación de los cálculos, tal como expondremos más adelante, nos permite disponer de un método muy rápido para determinar los momentos flectores que las cargas solicitantes producen en un elemento cualquiera de una estructura, sin tener que hacer el cálculo de los momentos de los restantes elementos, cosa que exigen la mayor parte de los métodos corrientemente empleados. Esta circunstancia los hace, en general, inadecuados para la determinación de los momentos con pocas cifras exactas y de momentos en un pequeño número de secciones que únicamente nos puedan interesar, necesidades ambas que debe satisfacer todo método de análisis que haya de ser utilizado en tanteos y hasta en los análisis definitivos, ya que aun en éstos resultan injustificadas las grandes aproximaciones.

Empezaremos nuestra breve exposición refrescando y sistematizando los conceptos más importantes del cálculo de estructuras múltiples.

El *esquema funcional* de una estructura, o sea la representación gráfica de la misma en su posición de trabajo, debe ser el principio y el fin de todo

análisis, ya que nos es necesario para poder elegir debidamente el método que nos convenga emplear y nos sirve, una vez terminada la aplicación de éste, para comprobar los resultados obtenidos. Es, además, la verdad por excelencia, sobre la cual deben basarse nuestras hipótesis, que sólo serán aceptables en tanto en cuanto no muestren desacuerdo alguno con él. Para concretar más las ideas, vamos a considerar la estructura de la figura 1.^a, que, sometida a la acción de las cargas allí indicadas y a las reacciones que éstas provocan en las sustentaciones, da lugar al es-

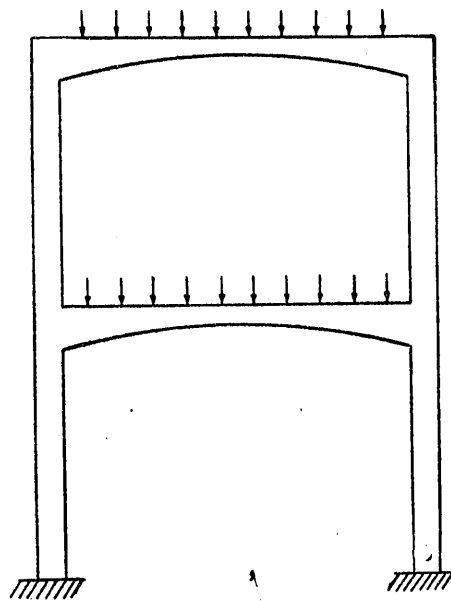


Figura 1.

quema funcional de la figura 2.^a. Sustituyamos las uniones más o menos rígidas de los extremos de todos y cada uno de sus elementos, es decir, sus nudos y sus sustentaciones, por rótulas que permitan el

giro, pero no la traslación, de todos los referidos extremos. La estructura así constituida, sometida como hemos dicho a la acción de las solicitaciones de proyecto, se llama *estructura simple correspondiente a*

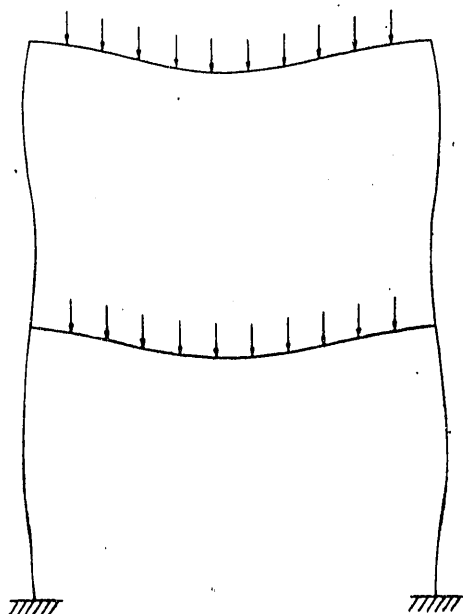


Figura 2.^a

la dada. Su esquema funcional se ilustra en la figura 3.^a

Ahora bien: los momentos que las solicitaciones provocan en los elementos de una estructura simple, llamados *momentos simples* (M_s), se pueden deducir con auxilio de las ecuaciones de la Estática, siempre que despreciemos los efectos a que da lugar la incapacidad de traslación de las rótulas, efectos muy pequeños, cuando los elementos son de directriz rectilínea.

Si al esquema funcional de la figura 3.^a le aplicamos el conjunto de momentos que se indica en la figura 4.^a, en que cada momento tiene el valor necesario para hacer tomar al extremo correspondiente la inclinación que tenía en la figura 2.^a, habremos reconstruido mecánicamente el esquema funcional de la estructura dada. A estos momentos les llamaremos *momentos de continuidad* (M_c), por tener la propiedad de restablecer la continuidad de la estructura simple. De aquí se deduce que los *momentos totales* (M) de la estructura dada, son la suma de los momentos simples y de los de continuidad correspondientes, es decir,

$$M = M_s + M_c.$$

Para conocer los momentos totales nos basta, pues, determinar, por separado, los momentos sim-

ples y los de continuidad correspondientes. Como ya hemos dicho, los momentos simples de cada elemento son los que las solicitaciones que sobre él actúan provocan en otro elemento de iguales características que el que consideramos, que, aislado elásticamente de los demás, se halla sustentado por dos rótulas situadas en sus extremos. Despreciando el ya citado efecto de tracción, los elementos simples son isostáticos y se pueden calcular fácilmente, bien aplicando las ecuaciones de la Estática, bien con auxilio de cuadros contruídos al efecto.

Los momentos de continuidad requieren en cambio un análisis más o menos largo para su obtención. Veamos cómo podemos proceder para determinar sus valores. Para ello volvamos a considerar la estructura de la figura 1.^a y fijemos en ella rígidamente todos sus nudos y todas sus sustentaciones, de tal modo que se les prive de todo posible movimiento, tanto de giro como de traslación. Cada elemento sigue hallándose sometido a la acción de las solicitaciones de proyecto, y éstas dan lugar al esquema funcional de la figura 5.^a A esta estructura, de iguales características que la dada, solicitada de igual modo que ella, pero con todos los extremos de todos sus elementos inmovilizados, la llamaremos *estructura empotrada correspondiente a la dada*. Existe en ella, pues, una independencia elástica completa entre unos elementos y otros. Los momentos que en esta

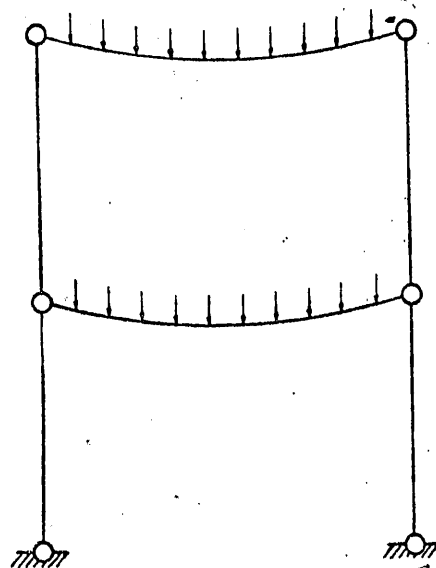


Figura 3.^a

estructura aparecen, es decir, los que las solicitaciones provocan en cada uno de sus elementos supuestos éstos empotrados en sus extremos, son los que llamaremos *momentos de empotramiento* (M_e). Su

cálculo es fácil de hacer, pero resulta, sin embargo, mucho más cómodo, recurrir a cuadros que nos dan directamente sus valores en las secciones extremas de los elementos, es decir, los *momentos en los empotramientos*.

Cada uno de los cuadrados del esquema funcional de la figura 5.^a, representación convencional del nudo correspondiente en su supuesta condición de inmovilidad, se halla solicitado por los momentos en los empotramientos de los elementos que en él concurren. El conjunto formado por todos estos momentos no corresponderá, en general, a una posición de equilibrio, y existirá un cierto *momento no equilibrado* (Mn) que solicitará a cada uno de los citados cuadrados. Refiriéndonos, para fijar las ideas, al cuadrado 3 de la figura 5.^a, éste se halla solicitado únicamente por el momento del elemento 3-4 en el empotramiento 3, y podremos escribir que

$$Mn_3 = Me_{31} + Me_{34} + Me_{35} = Me_{34}$$

Este momento no equilibrado Mn_3 tiende a hacer girar al cuadrado 3 en el sentido del reloj. Hemos supuesto completamente inmóviles todos los cuadra-

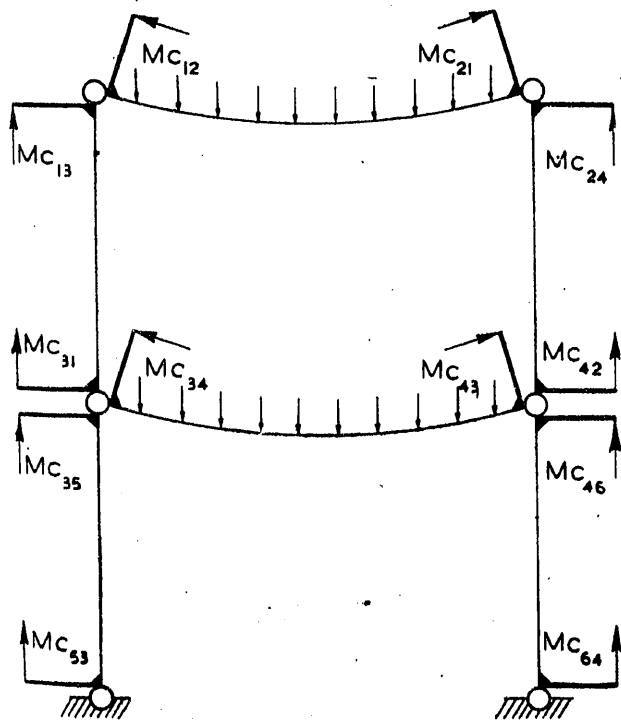


Figura 4.^a

dos, y, por lo tanto, este movimiento no se podrá efectuar. Si consintiéramos, sin embargo, el giro sin traslación de dicho cuadrado 3 conservando todos

los demás completamente inmóviles, el cuadrado 3 giraría en el sentido del reloj. Este giro da lugar a la deformación de los elementos 3-1, 3-4 y 3-5, de-

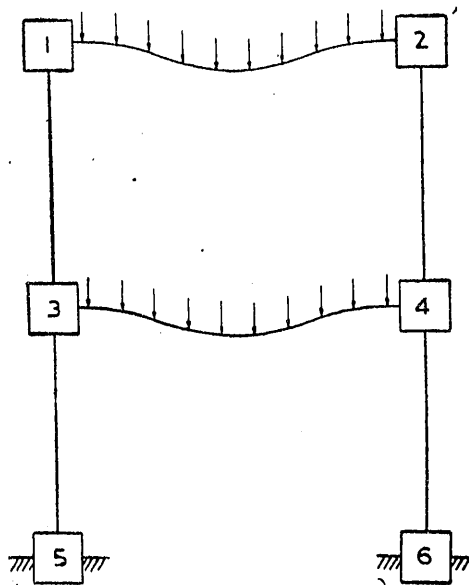


Figura 5.^a

formación que lleva aneja la aparición de ciertos momentos a lo largo de los tres elementos citados, que concurren en 3. El giro del cuadrado 3 cesará en el preciso instante en que se equilibren los momentos de los tres elementos que parten de él; la figura 5.^a se habrá convertido entonces en la figura 6.^a.

¿Qué momentos solicitan ahora al cuadrado 3?

1. Un momento resistente, A_{31} , del extremo 3 del elemento 3-1.
2. Un momento resistente, A_{35} , del extremo 3 del elemento 3-5.
3. Un momento del extremo 3 del elemento 3-4, que podremos descomponer en la suma del momento solicitante, Mn_3 , ya conocido, y de un cierto momento resistente, A_{34} .

La condición de equilibrio exige que

$$Mn_3 + A_{31} + A_{34} + A_{35} = 0.$$

El momento Mn_3 , que sigue actuando, ha dado lugar a ciertos momentos, A_{31} , A_{34} y A_{35} , que han sido absorbidos en una cierta proporción por los elementos que concurren en 3. Al porcentaje del momento no equilibrado que absorbe cada elemento le llamaremos *coeficiente de absorción* (a). Podremos escribir, por lo tanto, las siguientes igualdades que

nos dan los valores de los momentos absorbidos:

$$A_{31} = Mn_3 \times a_{31}$$

$$A_{34} = Mn_3 \times a_{34}$$

$$A_{35} = Mn_3 \times a_{35}$$

siendo a_{31} , a_{34} y a_{35} los coeficientes de absorción de los elementos 3-1, 3-4 y 3-5 en sus extremos 3.

Pero el esquema funcional de la figura 6.^a nos

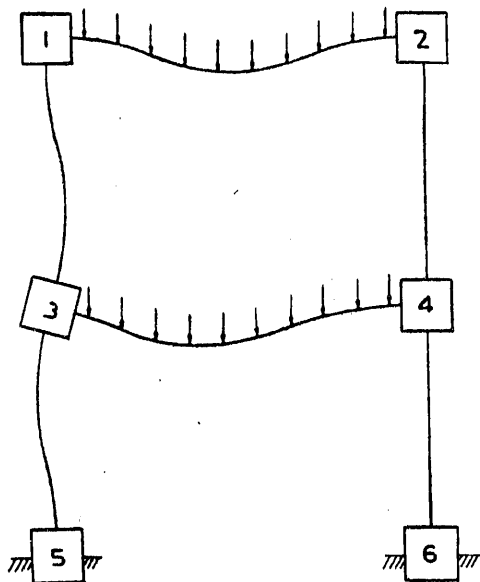


Figura 6.^a

indica que el giro del cuadrado 3 ha dado lugar también a la aparición de ciertos momentos en los extremos 1, 4 y 5 de los elementos 3-1, 3-4 y 3-5 que de él parten. Estos momentos aparecen para compensar elásticamente en cada elemento, la presencia de los momentos, A , absorbidos por el extremo 3 de cada uno de ellos. A la relación que existe entre este momento de compensación que aparece en un extremo (efecto) y el momento absorbido por el extremo opuesto, en este caso el 3 (causa), le llamaremos *coeficiente de compensación* (c) para momentos aplicados en el extremo 3. Los momentos que aparecen en los extremos 1, 4 y 5 de los elementos 3-1, 3-4 y 3-5 valen, pues, respectivamente:

$$A_{31} \times c_{31} = Mn_3 \times a_{31} \times c_{31}$$

$$A_{34} \times c_{34} = Mn_3 \times a_{34} \times c_{34}$$

$$A_{35} \times c_{35} = Mn_3 \times a_{35} \times c_{35}$$

En el caso del elemento 3-4, habremos de sumar este momento que acabamos de consignar, al mo-

mento ya existente en el empotramiento 4, originado por la carga que solicita a dicho elemento.

Las condiciones elásticas de cualquier elemento de directriz rectilínea, vienen fijadas por estos dos coeficientes: el de absorción (a) y el de compensación (c), para cada uno de sus extremos. Sus valores para los tipos de elementos corrientemente empleados en la práctica vienen reunidos en numerosas tablas confeccionadas ex profeso.

Si inmovilizamos ahora el nudo 3 en la posición que tiene en la figura 6.^a y consideramos como únicos momentos solicitantes de los nudos 1, 4 y 5 los de compensación que acabamos de calcular, cada uno de ellos dará lugar al giro del cuadrado respectivo, es decir, a la aparición de nuevos momentos absorbidos por los elementos que en él concurren, y a la de nuevos momentos de compensación que se localizarán en los extremos opuestos. Partiendo de estos últimos momentos de compensación, podríamos iniciar otra fase de propagación de momentos no equilibrados, y repitiendo este mismo proceso numerosas veces, llegaríamos a trabajar con momentos tan pequeños como pudiéramos desear, debido a que en la práctica los productos $a_{ij} \times c_{ij}$ son siempre menores que la unidad en valor absoluto.

Si el conjunto de operaciones que hemos hecho

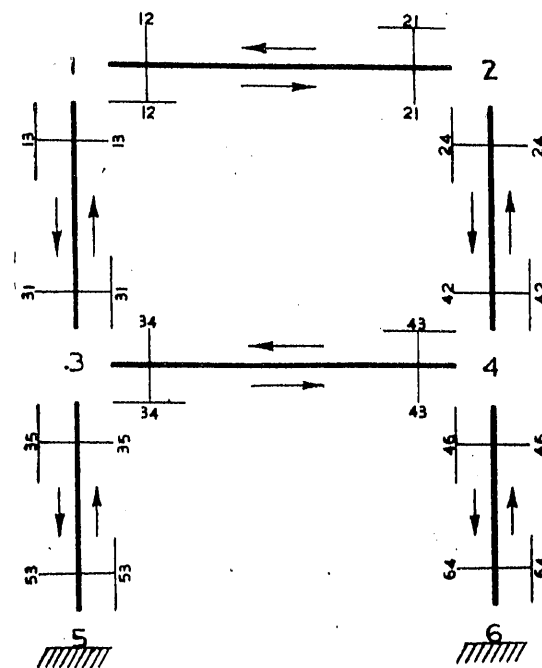


Figura 7.^a

partiendo del cuadrado 3 lo efectuamos igualmente partiendo de cada uno de los cuadrados restantes, llegaremos necesariamente a situar a todos éstos en posiciones tales, que, dentro de la aproximación ele-

gida, se hallen todos en equilibrio. Habremos reproducido así el esquema funcional de la figura 2.^a; los momentos que solicitan a esta estructura son, pues, los totales, y, por tanto, las sumas de los momentos que hemos ido adjudicando a cada extremo de cada elemento, son los momentos de continuidad que buscábamos.

2. Croquis de recorridos.

Refiriéndonos nuevamente a la figura 1.^a, si dibujamos las directrices de todos sus elementos suprimiendo tan sólo la parte correspondiente a los entornos de los nudos y de las sustentaciones, nos quedará la representación de un conjunto de elementos sin contacto entre ellos, como se puede ver en la figura 7.^a Para hacer las anotaciones necesarias durante el análisis, miraremos el croquis desde abajo cuando se trate de elementos horizontales, y girando el dibujo 90° en el sentido del reloj cuando correspondan a elementos verticales. En el extremo izquierdo de cada elemento se pone una T invertida, y una T en su posición normal en el extremo derecho, dibujando ambas de tal modo que su trazo vertical atravesase la directriz del elemento correspondiente.

Cada uno de estos trazos verticales representará durante el análisis la sección correspondiente al extremo del elemento sobre el que se haya dibujado. En el espacio comprendido entre la directriz de cada elemento y la semicabeza de la T más próxima al extremo, anotaremos el valor del coeficiente de absorción del elemento, correspondiente a ese extremo. En el espacio todavía libre, situado al otro lado del trazo vertical de la T, y debajo de la cabeza de ésta, escribimos el valor del coeficiente de compensación de cada elemento para momentos aplicados a ese mismo extremo, momento de compensación que se localizará, pues, en el extremo opuesto. Marquemos por último en la parte central inferior de cada elemento, y cerca de su directriz, una flecha paralela a ella que indique el sentido izquierda-derecha, y en la parte alta, otra flecha análoga que señale la dirección derecha-izquierda.

Tenemos así terminado el *croquis de recorridos* de la figura 7.^a, que nos marca los posibles recorridos para la propagación de los momentos no equilibrados de los nudos. Para efectuar esta propagación, no tenemos más que ir multiplicando los mo-

mentos no equilibrados, localizados en cada nudo, por todos los coeficientes que vayamos encontrando al hacer cualquier recorrido posible, siguiendo las direcciones indicadas por las flechas. Los recorridos se hacen a lo largo de los elementos, pudiendo elegirse al llegar a un nudo, cualquiera de los elementos que de él parten, incluso el mismo por el que hayamos venido; la única condición es marchar por el lado del elemento cuya flecha marque la dirección en que estemos efectuando la propagación de los momentos. Así, por ejemplo, el momento no equilibrado del nudo 1 se puede propagar entre otras formas, del siguiente modo: por la parte superior del elemento 1-3, hasta 3; desde aquí puede marchar hasta 4 por la parte inferior del elemento 3-4 hasta 5, por la parte superior del elemento 3-5, y puede también retroceder hasta 1, siguiendo la parte inferior del elemento 3-1.

Los valores de los momentos propagados son sencillamente los del momento no equilibrado inicial, multiplicado por cada uno de los coeficientes que vamos encontrando al hacer los recorridos posibles. Al llegar a cada uno de los extremos de los elementos, representados como hemos dicho por el trazo vertical de la T correspondiente, anotaremos el valor del momento propagado, lo que haremos para mayor claridad de los cálculos, junto a la cabeza de la T del extremo en cuestión (véase la figura 11). El valor absoluto de estos momentos propagados, disminuye rapidísimamente; abandonaremos la propagación cuando su valor sea ya despreciable.

Los recorridos posibles para la propagación se pueden obtener por distintos procedimientos; uno de ellos es el siguiente: en una primera línea ponemos los números representativos de cada nudo de la estructura; formamos la segunda línea poniendo a la derecha de cada uno de los números de la primera los números que representen a todos y cada uno de aquellos nudos que se hallen unidos directamente por medio de un solo elemento con el nudo de la línea primera que nos sirve de punto de partida; la tercera línea, poniendo a la derecha de cada uno de los números de la segunda, los que representen a todos y cada uno de aquellos nudos que se hallen unidos directamente por medio de un solo elemento con el nudo representado por la última cifra del de la línea segunda, que nos sirve de punto de partida; y así sucesivamente. En el caso concreto de la estructura de la figura 1.^a, estos recorridos serían:

1	2	3	4	5	6
12	21	31	42	53	64
13	24	34	43	46	
121, 124	212, 213	312, 313	421, 424	531, 534, 535	642, 643, 646

Vemos que una línea horizontal cualquiera, la tercera, por ejemplo, es una sucesión creciente de números formados por tres cifras significativas cada uno. La formación de esta sucesión es fácil de hacer mentalmente a la vista del croquis de la estructura, pues no hay más que trasladarse imaginariamente desde cada nudo a cada uno de los contiguos y recorrer luego en un cierto orden los elementos que parten de este último. Así, refiriéndonos a la figura 7.^a, desde el nudo 1 nos trasladaremos al nudo contiguo representado por el número más bajo, es decir, al 2, recorriendo después desde éste todos los elementos que de él parten, en este caso primero el 2-1, y luego el 2-4; efectuamos así los recorridos 1-2-1 y 1-2-4.

Pasamos luego a hacer desde el nudo 3 lo que acabamos de hacer desde el 2, resultando así

los tramos son de sección constante, y siendo sus rigideces las siguientes:

Elemento 1-2:

$$R_{12} = R_{21} = \frac{EJ_{12}}{l_{12}} = ,001 E (*)$$

Elemento 2-3:

$$R_{23} = R_{32} = \frac{EJ_{23}}{l_{23}} = ,0014 E$$

Elemento 3-4:

$$R_{34} = R_{43} = \frac{EJ_{34}}{l_{34}} = ,0014 E$$

La rigidez del voladizo es cero, y la del empotramiento, infinito.

El valor del coeficiente de absorción es en cada extremo igual a la rigidez del elemento en ese

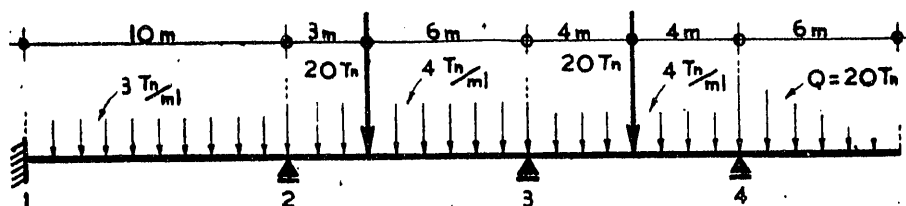


Figura 8.^a

los recorridos 1-3-1, 1-3-4 y 1-3-5. Empezando ahora por el nudo 2, hacemos los 2-1-2 y 2-1-3; luego, los 2-4-2, 2-4-3 y 2-4-6. Y así sucesivamente.

3. Práctica del método.

Todo lo dicho hasta aquí ha de parecer seguramente complicado, ya que hemos carecido de la posibilidad de llevar al sufrido lector con un paso algo más reposado hasta el punto en que ahora nos encontramos. Esto se debe a la limitación de espacio que voluntariamente nos hemos impuesto, para no obligar a la REVISTA DE OBRAS PÚBLICAS a cedernos páginas que indudablemente han de encontrar mejor empleo al dedicarlas a la publicación de otros temas más amenos y más interesantes para sus suscriptores.

Sirvan estas líneas de excusa por el *sprint* que les hemos obligado a hacer.

Para demostrar que la práctica del método expuesto no es tan terrible como pudiera parecer, vamos a hacer su aplicación al análisis de dos estructuras continuas: una viga de varios tramos y un entramado de almacén.

Primer ejemplo: Calcular los momentos que se producen en la viga continua de la figura 8.^a, al ser solicitada como allí se indica, suponiendo que todos

extremo, tomada con signo contrario, dividida por la suma de las rigideces de todos los elementos que concurren en el nudo. Así, tendremos que:

$$a_{12} = \frac{-,001}{,001 + \infty} = 0$$

$$a_{21} = \frac{-,001}{,001 + ,0014} = -,42$$

$$a_{23} = \frac{-,0014}{,001 + ,0014} = -,58$$

$$a_{32} = \frac{-,0014}{,0014 + ,0014} = -,5$$

$$a_{34} = \frac{-,0014}{,0014 + ,0014} = -,5$$

$$a_{43} = \frac{-,0014}{,0014 + 0} = -1$$

(*) Léase coma, dos ceros, uno. Empleamos aquí esta nueva notación matemática, que consiste en suprimir el cero anterior a la coma en los números decimales menores que la unidad. En varios países ha sido aceptada ya por muchos matemáticos ilustres, por hombres de ciencia en general, y hasta por importantes empresas comerciales, en vista de sus indudables ventajas, entre las que destaca, por su mayor importancia, la de reducir el espacio necesario para su escritura, cuestión que presenta gran interés en gráficos, tablas, aparatos de precisión, etc. Una vez acostumbrados a su empleo, es más cómoda y perfecta que la usada hasta ahora.

Para el voladizo, el coeficiente de absorción es cero, pues un voladizo no es capaz de absorber más momentos que los provocados por las cargas que actúan directamente sobre él.

Los coeficientes de compensación son todos ,5, pues es el valor que tiene siempre este coeficiente en los elementos de sección constante.

Pero en la práctica, en vez de dibujar el croquis

dientes signos, como se ve en la figura 9.^a, en cada uno de sus respectivos extremos. Empleamos durante la propagación la notación de signos de los nudos, es decir, consideramos momentos positivos a aquellos que tienden a hacer girar al nudo en el sentido del reloj. Acto seguido escribimos en el interior de los cuadrados que representan a los nudos, los valores de los momentos no equilibrados que soli-

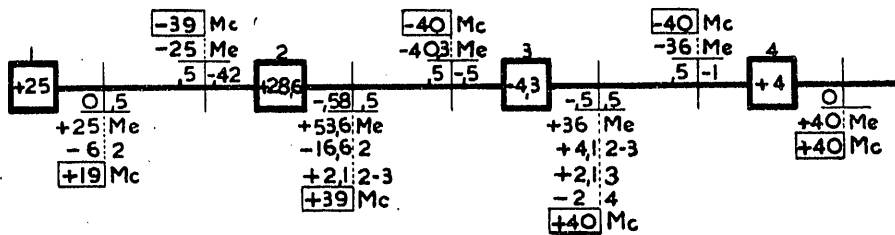


Figura 9.^a

de recorridos, dibujamos solamente el croquis de cálculo ilustrado en la figura 9.^a, que es el mismo croquis de recorridos en el que llenamos con un cuadrado cada uno de los espacios huecos que corresponden a los nudos; nos basta saber que al hacer los recorridos podemos circular en cualquier forma por el interior de los cuadrados, eligiendo la salida que más nos plazca. Después de anotar los valores de los coeficientes de absorción y de compensación, pasamos a anotar, como se ve en la figura 9.^a, el valor de los momentos en los empotramientos que las cargas solicitantes provocan en la estructura empotrada correspondiente a la dada.

Estos momentos son:

$$|Me_{12}| = |Me_{21}| = \frac{1}{12} pl^2 = \frac{1}{12} \times 3 \times 10^2 = 25 \text{ m. Tn.}$$

$$|Me_{23}| = \frac{1}{12} pl^2 + \frac{Pb^2a}{l^2} = \frac{1}{12} \times 4 \times 9^2 + \frac{20 \times 6^2 \times 3}{9^2} = 53,6 \text{ m. Tn.}$$

$$|Me_{32}| = \frac{1}{12} pl^2 + \frac{Pa^2b}{l^2} = \frac{1}{12} \times 4 \times 9^2 + \frac{20 \times 3^2 \times 6}{9^2} = 40,3 \text{ m. Tn.}$$

$$|Me_{34}| = |Me_{43}| = \frac{1}{12} pl^2 + \frac{Pl}{8} = \frac{1}{12} \times 3 \times 8^2 + 20 = 36 \text{ m. Tn.}$$

$$|Me_{vol.}| = Q \frac{l}{3} = 20 \times \frac{6}{3} = 40 \text{ m. Tn.}$$

Anotamos todos estos valores con sus correspon-

dan a cada nudo, es decir, la suma de los momentos en los empotramientos de todos los elementos que concurren en cada nudo. Sus valores serán, pues,

$$Mn_1 = + 25 \text{ m. Tn.}$$

$$Mn_2 = - 25 + 53,6 = + 28,6 \text{ m. Tn.}$$

$$Mn_3 = - 40,3 + 36 = - 4,3 \text{ m. Tn.}$$

$$Mn_4 = - 36 + 40 = + 4 \text{ m. Tn.}$$

Quedamos así en condiciones de empezar la propagación, que daremos por terminada; en este caso, cuando los momentos propagados sean menores que el 5 por 100 del mayor momento no equilibrado, es decir, que

$$28,6 \times \frac{5}{100} = 1,4 \text{ m. Tn.}$$

Debido a que la suma de los momentos de continuidad de los extremos que concurren en un mismo nudo ha de ser siempre cero, dejaremos sin calcular los momentos de los extremos que nos parezcan más influenciados por los demás nudos. En el caso concreto de la figura 9.^a calcularemos tan sólo los momentos en los extremos 1-2, 2-3 y 3-4, pues el del voladizo, por lo ya dicho, se conoce de antemano. He aquí una de las ventajas de este sistema de cálculo, que da lugar a un sensible ahorro de trabajo y de tiempo.

Procederemos, por consiguiente, así para hacer la propagación. El momento Mn_1 , se ha de propagar por debajo del elemento 1-2. Como el primer coeficiente que se encuentra en el recorrido, tiene valor cero, este momento no se propaga.

El momento Mn_2 se propaga hacia el nudo 1 por la parte superior del elemento 2-1, llegando al extremo 1-2 con un valor absoluto igual a

$$28,6 \times ,42 \times ,5 = 6 \text{ m. Tn.}$$

que anotamos en este extremo con indicación del recorrido que se ha efectuado. Una vez escrito este valor absoluto, vemos el signo que le corresponde y lo anotamos también. Esta propagación termina aquí, pues el próximo coeficiente que nos encontramos tiene valor cero. La propagación de Mn_2 hacia la derecha se efectúa por debajo del elemento 2-3, llegando al extremo 2-3 con un valor absoluto

$$28,6 \times ,58 = 16,6 \text{ m. Tn.}$$

que anotamos. Seguimos al nudo 3 y volvemos hacia el 2 por encima del elemento 3-2, encontrando un valor del momento propagado igual a

$$16,6 \times ,5 \times ,5 \times ,5 = 2,1 \text{ m. Tn.}$$

al llegar al extremo 2-3. Cesa aquí esta propagación, pues al multiplicar por el siguiente coeficiente que pudiéramos encontrar, el momento propagado sería ya menor que el mínimo fijado de 1,4 m. Tn. Ponemos, en vista de ello, los signos a todos estos momentos propagados desde el nudo 2. Si en vez del recorrido 2-3-2 hacemos ahora el 2-3-4, partiendo del valor del momento propagado al extremo 2-3, tendremos para el correspondiente al extremo 3-4:

$$-16,6 \times ,5 \times (-,5) = +4,1 \text{ m. Tn.}$$

Abandonamos aquí esta propagación, pues si volviéramos a este extremo pasando por el nudo 4, el valor del momento propagado sería ya demasiado pequeño.

Mn_3 se propaga hacia la izquierda por encima del elemento 3-2, pero llega al extremo 2-3 con un valor despreciable; abandonaremos, por consiguiente, esta propagación.

Mn_3 se propaga también hacia la derecha, por debajo del elemento 3-4, siendo su valor al pasar por el extremo 3-4:

$$-4,3 \times (-,5) = +2,1 \text{ m. Tn.}$$

que anotaremos debidamente, y abandonamos su propagación.

El momento no equilibrado del nudo 4 se propaga hacia la izquierda, por encima del elemento 4-3. Su valor, al llegar al extremo 3-4, es:

$$+4 \times (-1) \times ,5 = -2 \text{ m. Tn.}$$

que escribimos en su correspondiente lugar.

Hemos terminado así todas las propagaciones posibles dentro del orden de aproximación que nos habíamos fijado. Sumando ahora todos los momentos adjudicados a cada extremo, incluso los momentos en los empotramientos, tendremos los valores de los momentos de continuidad correspondientes a cada uno de los extremos elegidos para el cálculo. Para mayor claridad, encerramos los valores de estos momentos de continuidad en el interior de unos rectángulos, como se puede ver en el croquis de cálculo de la figura 9.^a

La comparación de estos resultados con los obtenidos mediante siete ciclos del método de Cross, son los siguientes:

Extremos.	Resultados obtenidos con propagación hasta 1,4 m. Tn.	Resultados obtenidos con siete ciclos de Cross.
1-2	19	18,1
2-1 y 2-3	39	38,8
3-2 y 3-4	40	40,7
4-3 y voladizo	40	40,0

Sumando estos momentos de continuidad a los momentos simples correspondientes, tenemos terminado el análisis de los momentos flectores de la estructura dada. Con auxilio de cuadros especiales (véase el libro del autor: *Análisis de Estructuras Continuas*) se obtienen inmediatamente los valores de estos momentos totales. Así, para el elemento 1-2, son:

$$M_{12} = Ms_{12} + Mc_{12} = \frac{30x}{2} \left(1 - \frac{x}{10}\right) + \frac{-39 + 19}{10} x - 19;$$

mediéndose las abscisas a partir del extremo izquierdo del elemento 1-2 y viniendo los momentos automáticamente de acuerdo con la notación de signos

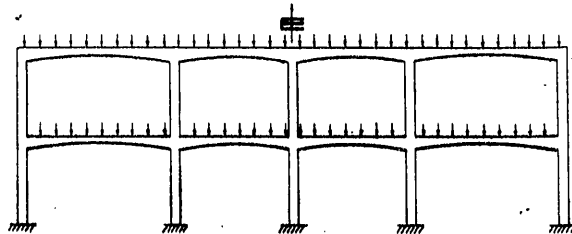


Figura 10.

para momentos de los elementos, es decir: compresión arriba, signo positivo; compresión abajo, signo negativo. Análogamente se obtendrían los valores de los momentos totales en los restantes tramos.

Segundo ejemplo: Tantear los momentos que se producen en la estructura de almacén de la figura 10.

Debido a la simetría, el croquis de cálculo será el de la figura 11. Para ahorrar molestias al lector, supondremos ya conocidos todos los coeficientes de absorción y compensación, así como los momentos que las cargas provocan en los empotramientos imaginarios. No son necesarios los valores de los coefi-

el 5 por 100 del máximo momento no equilibrado, es decir, que

$$20 \times \frac{5}{100} = 1 \text{ m. Tn.}$$

Calcularemos solamente los momentos de continuidad en los extremos 2-3, 3-2, 5-6, 6-5, 4-7, 4-1, 1-4, 5-8, 5-2 y 2-5, pues todos los demás se pueden deducir de éstos. En efecto: los de las columnas centra-

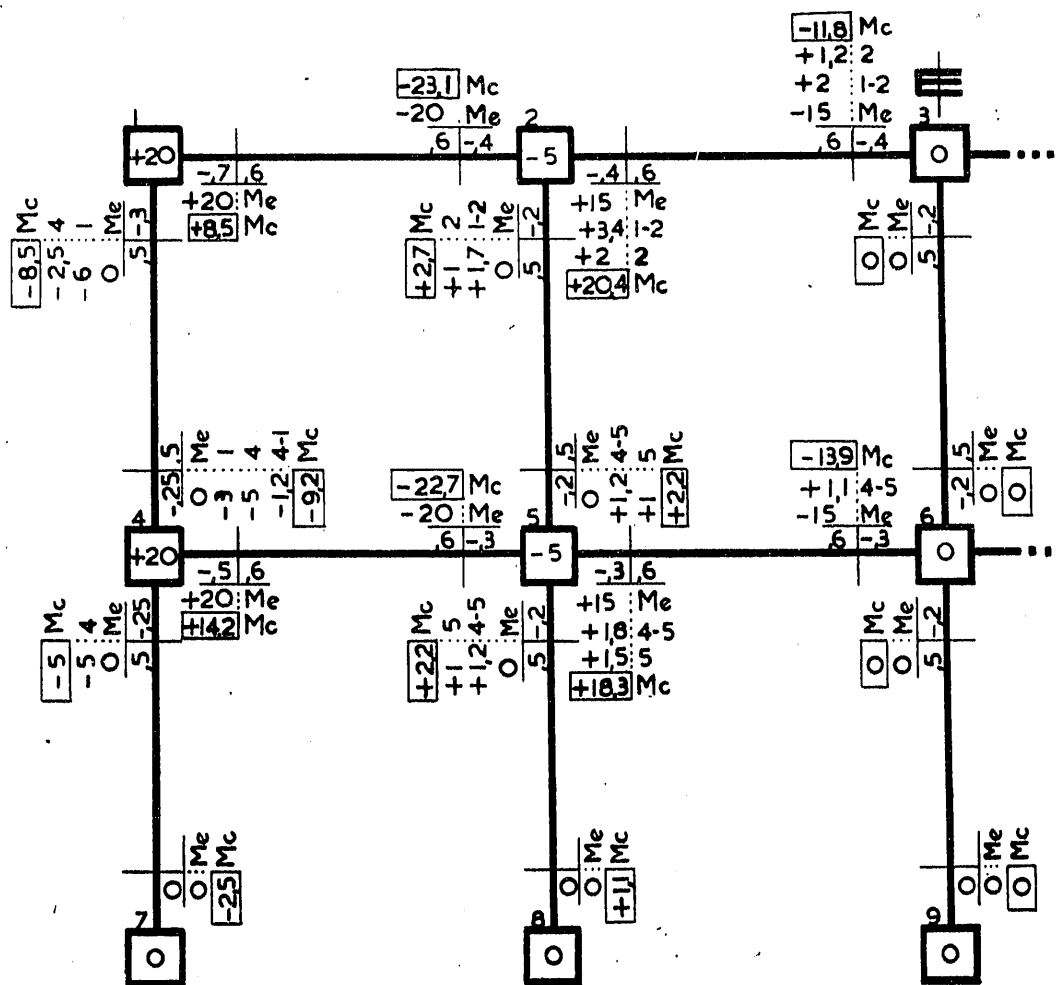


Figura 11.

cientes de compensación contiguos a aquellos de absorción de valor cero, ya que éstos son verdaderas barreras que impiden toda propagación a través de ellos; por esta razón no consignamos en el croquis de cálculo los valores de los coeficientes de compensación para momentos aplicados en los extremos inferiores de las columnas del piso bajo.

También en este caso vamos a suspender las propagaciones cuando los momentos sean menores que

les son cero por simetría; los de los pies de las columnas del piso bajo tendrán un momento de continuidad igual al producto del de sus cabezas por el coeficiente de compensación de los momentos aplicados en dichas cabezas, y los restantes momentos, por ser su valor el necesario para conseguir el equilibrio de los nudos respectivos.

El croquis de cálculo de este tanteo, viene ilustrado en la figura 11. No creemos necesaria ninguna

aclaración complementaria de lo ya expuesto, para poder seguir los cálculos allí consignados.

4. Campo de aplicación.

El método de análisis que acabamos de describir es especialmente apto para efectuar los tanteos previos de las estructuras:

1.º Por efectuarse el tanteo en un tiempo muy reducido, ya que al ser escasa la aproximación exigida, resultan muy cortos todos los recorridos posibles.

2.º Por permitir dimensionar los puntos dudosos de las estructuras con un mínimo de trabajo, pues una vez determinados los momentos no equilibrados de los nudos, quedamos en completa libertad para calcular el momento de cualquier extremo de cualquiera de los elementos que componen la estructura, sin tener que calcular los que se desarrollan en otros puntos de la misma, cosa obligada en todos los métodos numéricos basados en el planteamiento de sistemas de ecuaciones, en los gráficos y aun, parcialmente al menos, en otros métodos de análisis basados en el cálculo por aproximaciones sucesivas.

Resulta también muy satisfactoria la aplicación de este método a los análisis que requieran la obtención previa de las líneas de influencia. En tales casos nos bastará hacer la propagación de un momento no equilibrado de valor unidad, que supondremos localizado en cada uno de los nudos y sustentaciones de la estructura, en los que concurre al menos un elemento de carga variable, siendo cero los momentos no equilibrados de los restantes nudos y sustentaciones. Habremos de hacer, por consiguiente, tantas

propagaciones de momentos unitarios como nudos que cumplan tales condiciones existan en la estructura. Una vez hecho esto, determinaremos los momentos no equilibrados a que cada posición de las cargas dé lugar en la estructura empotrada correspondiente a la dada. Los productos de estos momentos no equilibrados por los momentos que las correspondientes propagaciones anteriormente efectuadas han localizado en cada extremo de cada elemento, nos darán, al sumarlos ordenadamente, los valores en cada uno de dichos extremos de los momentos que buscamos.

En aquellos análisis en que el esquema funcional revele la existencia de traslaciones de los nudos, nos bastará partir de los momentos en los empotramientos originados por una traslación unitaria de los nudos en cuestión.

Terminada la propagación, calculamos la fuerza resistente a la traslación que corresponde a este movimiento unitario. Una simple regla de tres nos dará a conocer el valor de los momentos que equilibran a la fuerza de traslación dada.

De modo aún más sencillo, pues no es necesario este ajuste final, se pueden calcular las tensiones secundarias que aparecen en una estructura como consecuencia de las deformaciones elásticas a que dan lugar las cargas solicitantes.

Por último, la determinación de los momentos de torsión que se producen en las estructuras de tres dimensiones se puede hacer fácilmente mediante la consideración de la rigidez de torsión y de los demás coeficientes que ésta lleva consigo (véase, por ejemplo, la obra del autor: *Análisis de Estructuras Continuas*).

