

EL CÁLCULO DE UNA LÁMINA CILÍNDRICA POLILOBULAR

POR EDUARDO TORROJA, INGENIERO DE CAMINOS

Con objeto de dar a conocer a nuestros lectores la notable Memoria del Sr. Torroja, premiada recientemente por la Academia de Ciencias, se solicitó del autor un resumen de ella, que publicaremos en dos artículos. Este primero comprende exclusivamente la exposición del método empleado para el cálculo de una lámina polilobular asimétrica de gran peralte, con la novedad que impone la condición de máxima economía en la armadura principal, tal como se aplicó en la primitiva cubierta del Frontón Recoletos.

El cálculo de una lámina de cubierta formada por varios lóbulos cilíndricos de directriz circular y radios cualesquiera, que se encuentren dos a dos a lo largo de una generatriz, cuya teoría fué desarrollada y empleada en Alemania, principalmente por Finsterwalder y Dischinger, se complica y dificulta cuando los lóbulos son disimétricos y bastante peraltados, porque ello obliga a considerar por separado los efectos del peso, del viento y de la nieve, con leyes de reparto diferentes a lo largo de la directriz. Pero si además se tiene en cuenta que en la arista de unión o intersección de los lóbulos aparece necesariamente una armadura de tracción muy fuerte, que ha de considerarse como un elemento de refuerzo unido a las láminas de los lóbulos y que, por consiguiente, conviene imponer la condición previa de que esa armadura esté en condiciones económicas de trabajo, es decir, a una tensión igual o próxima a la admisible del acero, el problema presenta ya nuevas particularidades y complicaciones, porque ello equivale a obligar a los lóbulos a tener una deformación longitudinal fija en la gaviota en el momento de actuar la hipótesis más desfavorable de sobrecarga.

Vamos a ver en este primer artículo el tipo de cálculo que se obtuvo para el caso particular de la primitiva cubierta del Frontón Recoletos, formada por dos lóbulos desiguales (fig. 1) que, arrancando con tangente vertical en A y C, se encuentran ortogonalmente en B; y en un segundo artículo, exponeremos las observaciones hechas en el transcurso de la obra y su comportamiento posterior, comparándolas con los resultados del cálculo (1).

La lámina completa de doble lóbulo apoya en todo el contorno, es decir, longitudinalmente en las

dos generatrices extremas, y transversalmente en las dos directrices también extremas, mediante estructuras que aseguren la indeformabilidad de todo este contorno, pero permitiendo la libre dilatación de las generatrices y la traslación y giro de las directrices de apoyo, sin dejarlas cambiar de forma.

Adoptando como coordenadas el ángulo φ del radio o normal a la superficie con la vertical y la abscisa x a lo largo de la generatriz, y tomado como origen el punto medio de la misma, es necesario, para poder después integrar fácilmente, desarrollar en series de Fourier las expresiones de las tres cargas de peso, viento y nieve, que son, en realidad, uniformes o constantes a lo largo de las generatrices. Esto se hace mediante el siguiente conocido artificio. Sean, por ejemplo:

$$p \quad v \sin \varphi \quad n \cos \varphi,$$

respectivamente, las expresiones elegidas para las

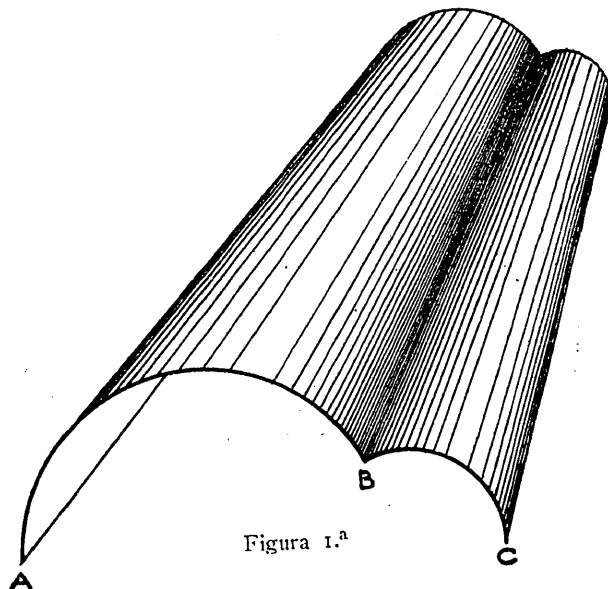


Figura 1.^a

(1) Todos los cálculos y extremos de estas notas pueden verse con toda extensión y detalle en la Memoria presentada a la Academia de Ciencias.

cargas de peso, viento y nieve a lo largo de la directriz, dada la forma de la misma, y obrando la primera y la última verticalmente, y la segunda, normalmente a la lámina (para el viento se estudió también una ley con succiones en clave, que más adelante indicaremos).

La serie

$$1 = \frac{4}{\pi} \cos \frac{\pi x}{l} - \frac{4}{3\pi} \cos \frac{3\pi x}{l} + \frac{4}{5\pi} \cos \frac{5\pi x}{l} + \dots = h' + h'' + \dots = h \quad [0]$$

es válida en el intervalo $x = \frac{l}{2}$ a $x = -\frac{l}{2}$ que

ocupa la lámina, y la designamos simbólicamente por la serie $h' + h'' + \dots = h$.

Multiplicando los términos de esta serie por las expresiones de las cargas de peso, viento y nieve, según la directriz que acabamos de indicar, tendremos las expresiones buscadas de estas cargas en forma de serie de Fourier.

Para simplificar, designaremos también con los símbolos s, q, u, v , las integrales 1.^a, 2.^a, 3.^a y 4.^a de las anteriores expresiones h a lo largo de x .

Consideremos un elemento diferencial de lámina a todo espesor, como el indicado en la figura 2, y sean: g , el espesor; dx , la longitud; $d\varphi$, el ángulo de las normales extremas; R , el radio; X, Y, Z , las componentes de las cargas o fuerzas exteriores, por unidad de superficie, sobre la generatriz, sobre la tangente a la directriz y sobre la normal, respectivamente; ξ, η, ζ , las deformaciones según las mismas direcciones; T y Q , las tensiones normales a todo espesor, según la generatriz y la tangente a la directriz; N , la cortante según la normal; S , la cortante en el plano tangente a la superficie; M , el momento flector alrededor de la generatriz, y θ , el giro de la normal por efecto de la deformación. Prescindiendo de los momentos de torsión y de los flectores o de curvatura de las generatrices, que en estas láminas

de espesor muy pequeño y de longitud según las generatrices francamente superior a los radios de curvatura de los lóbulos, resultan despreciables, quedan por considerar solamente las tensiones que se indican en la figura.

Las ecuaciones de equilibrio y compatibilidad que resultan de la consideración de este elemento diferencial, son las nueve ecuaciones diferenciales siguientes:

Proyección de fuerzas sobre la generatriz:

$$R \frac{dT}{dx} + \frac{dS}{d\varphi} + RX = 0. \quad [1]$$

Proyección de fuerzas sobre la tangente a la directriz:

$$\frac{dQ}{d\varphi} + R \frac{dS}{dx} - N + RY = 0. \quad [2]$$

Proyección de fuerzas sobre la normal:

$$\frac{dN}{d\varphi} + Q + RZ = 0. \quad [3]$$

Equilibrio de momentos alrededor de la generatriz:

$$\frac{dM}{d\varphi} - RN = 0. \quad [4]$$

Alargamiento según la generatriz:

$$\frac{d\xi}{dx} = \frac{T}{Eg}. \quad [5]$$

Alargamiento según la tangente a la directriz:

$$\frac{d\eta}{Rd\varphi} - \frac{\zeta}{R} = \frac{Q}{Eg}. \quad [6]$$

Deformación angular alrededor de la normal:

$$\frac{d\xi}{Rd\varphi} + \frac{d\eta}{dx} = \frac{2S}{Eg}. \quad [7]$$

Giro de la normal:

$$\theta = \frac{d\zeta}{Rd\varphi} + \frac{\eta}{R}. \quad [8]$$

Variación de la curvatura:

$$\kappa = \frac{1}{R^2} \left(\frac{d^2\zeta}{d\varphi^2} + \zeta \right) = -\frac{12}{Eg^3} M. \quad [9]$$

Este sistema de ecuaciones diferenciales define la variación de las tensiones y recorridos en cada elemento de la cubierta, y su integración permite, por consiguiente, conocerlos en cada punto, siempre que se hayan determinado las constantes de integración mediante las condiciones en los límites o

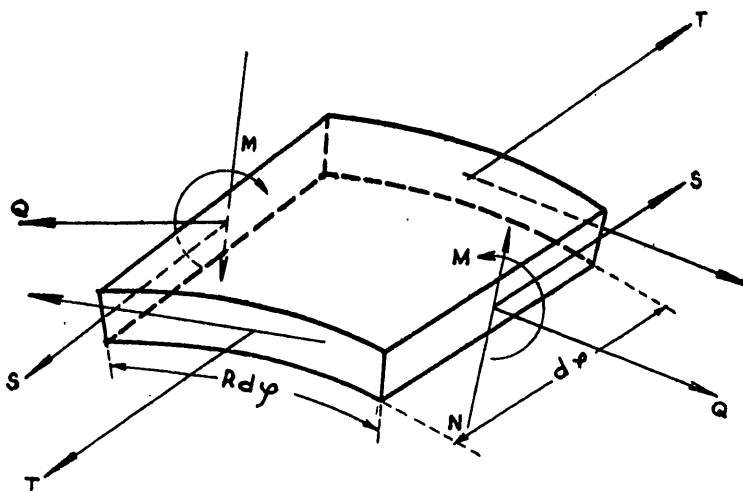


Figura 2.^a

condiciones de sustentación. Pero como las dificultades matemáticas del problema no permiten su resolución directa, para lograr ésta, y siguiendo los métodos aplicados por Dischinger en trabajos bien conocidos, se descompone la cuestión en dos problemas parciales, en los cuales se consideran separadamente las cargas exteriores, en uno, y los efectos de borde, en otro, según vamos a exponer brevemente:

Comiézase, para ello, por suponer que cada uno de los dos lóbulos que constituyen la cubierta forma parte de un cilindro completo (esto es, teniendo por directriz una circunferencia completa) sometido en toda su superficie a las cargas de peso propio, viento y nieve, expresadas por las leyes anteriormente establecidas.

En esta hipótesis, el lóbulo puede soportar dichas cargas trabajando sólo como membrana, es decir, sin esfuerzo de flexión en ninguno de sus puntos (se prescinde de las regiones próximas a los marcos frontales de apoyo, en los cuales las flexiones son despreciables) y los valores de la tracción o compresión y tensión cortante Q , T y S , y de los recorridos ξ , ζ , η , vienen dados por el sistema de ecuaciones antes establecido, cuya integración en la hipótesis presente ($M = 0$) es inmediata, así como la determinación de las constantes de integración correspondientes, mediante las condiciones de sustentación del sistema. Ahora bien; como los lóbulos, en realidad, no son cilindros completos, esta solución no coincide con el estado real. Para que así fuera, sería preciso sustituir el efecto de la parte de cilindro no existente por los recorridos y tensiones en las generatrices de borde, dados para ellas por el cálculo de cada lóbulo como membrana. Pero como en la práctica no es fácil realizar estas condiciones, se hace necesario, para tener la solución real, superponer a los resultados que se deducen del cálculo como membrana los que se obtienen suponiendo nulas las cargas exteriores y aplicado en las generatrices de borde un sistema de esfuerzos y deformaciones iguales a la diferencia entre los que da para ellas el cálculo de membrana y los que realmente producen las condiciones de sustentación. En esta forma, el lóbulo no trabaja ya como membrana, sino como lámina, es decir, trabajando a flexión en sus diferentes puntos, y la integración del sistema de ecuaciones diferenciales no es inmediata, por no ser $M = 0$, y exige artificios de cálculo que oportunamente indicaremos. Realizada esta integración, para tener el estado real de tensiones y deformaciones, basta componer en cada punto los que resultan de resolver uno y otro de los dos problemas parciales indicados.

Y aún puede simplificarse más la cuestión, descomponiendo en tres cada uno de estos problemas y calculando por separado el estado de membrana para cada una de las cargas de peso propio, viento y nieve, así como los efectos de borde que a cada uno de éstos corresponde.

Determinación de las tensiones y recorridos por efecto de membrana.

Las componentes del peso, según X , Y , Z , son:

$$X_p = 0; Y_p = p h \sin \varphi; Z_p = p h \sin \varphi. [10]$$

Introduciendo estas expresiones en las ecuaciones diferenciales y recordando que en el es-

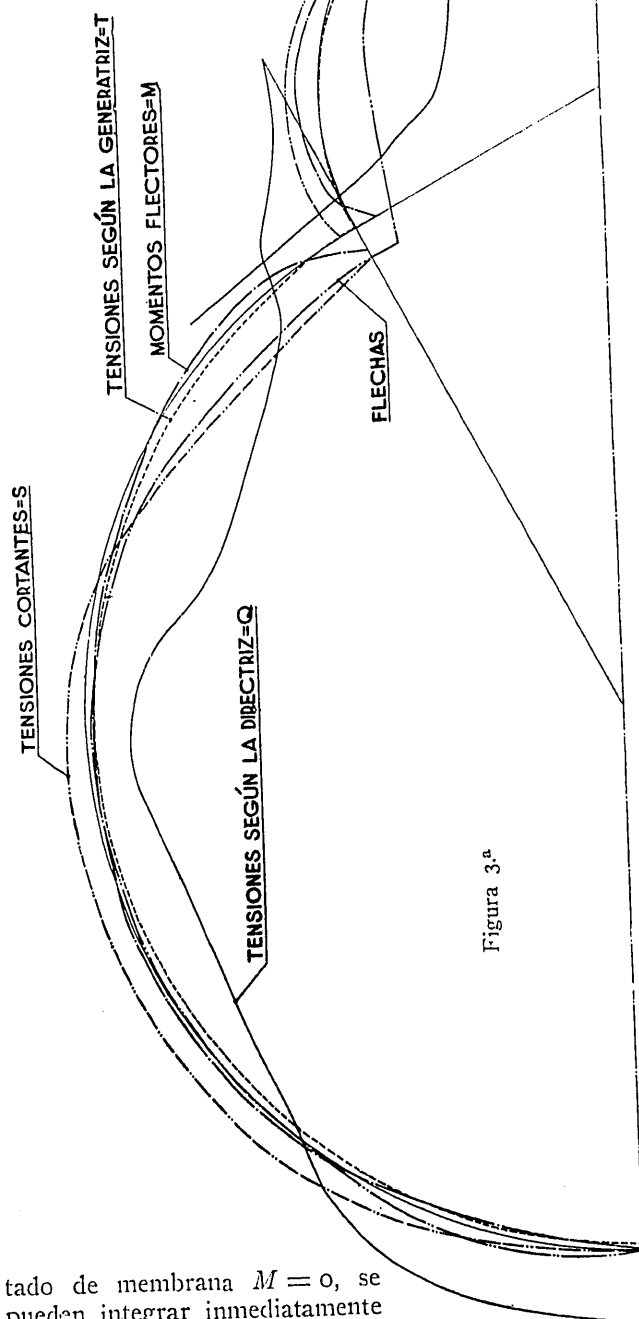


Figura 3.^a

tado de membrana $M = 0$, se pueden integrar inmediatamente las ecuaciones diferenciales y obtener las expresiones siguientes, de aplicar suce-

sivamente e integrar las ecuaciones [4], [3], [2], [1], [5], [7], [6], [8]:

$$Q_{pm} = -R p h \cos \varphi. \quad [11]$$

$$S_{pm} = -2 p s \sin \varphi. \quad [12]$$

$$T_{pm} = -\frac{2}{R} p q \cos \varphi. \quad [13]$$

$$E g \xi_{pm} = -\frac{2}{R} p u \cos \varphi. \quad [14]$$

$$E g \eta_{pm} = \left(\frac{2}{R^2} p r + 4 p q \right) \sin \varphi. \quad [15]$$

$$E g \zeta_{pm} = \left[\left(\frac{2}{R^2} p r + 4 p q \right) + R^2 p h \right] \cos \varphi. \quad [16]$$

$$E g \theta_{pm} = -R p h \sin \varphi. \quad [17]$$

En todas estas expresiones hay que poner, por cada término de la serie, los valores correspondientes.

Del mismo modo se obtienen las expresiones de las tensiones y recorridos debidas a las cargas de viento o de nieve, introduciendo en X, Y, Z las leyes correspondientes en lugar de las del peso ahora empleadas.

Integración de las ecuaciones diferenciales para efecto de borde.

Para llevar a cabo el cálculo de la cubierta como lámina, tenemos que abordar la resolución del sistema de ecuaciones diferenciales [1] a [9] inclusive, con cargas exteriores nulas, pues sólo se trata en él de determinar los efectos de borde o corte en las generatrices extremas del lóbulo.

Como estas ecuaciones son independientes del origen que se tome para las variables independientes x, φ , y para mayor comodidad del cálculo, tomaremos como origen de la variable angular (dejando inalterado el de la x) el borde izquierdo de cada lóbulo, designando por ω la nueva coordenada angular, que está ligada con la anterior por la relación

$$\varphi = \omega - \varphi_1.$$

donde φ_1 es el valor absoluto de φ , correspondiente al borde izquierdo.

La integración de este sistema de ecuaciones diferenciales, inabordable por métodos directos, puede lograrse mediante la adecuada aplicación del desarrollo en serie de Fourier a las tensiones y recorridos.

Obsérvese, para ello, que el momento flector M a lo largo de cada generatriz de la cubierta es una función de x , simétrica respecto de su punto medio, y cuyo desarrollo en serie de Fourier carece, por tanto, de términos en seno. Si, además, se toma el intervalo $-\frac{l}{2}, +\frac{l}{2}$, como representativo de un semiperíodo de la función M , siendo simétrico de este respecto de su extremo el semiperíodo siguiente, se

anulan los coeficientes de los términos en coseno de los múltiples pares del argumento fundamental, que es $\frac{\pi x}{l}$, con lo cual dicho desarrollo puede relacionarse, término a término, con el de las cargas expresadas mediante la serie [0] y las que de ella se deducen. Por otra parte, los coeficientes de este desarrollo de M , que tienen valores fijos para cada generatriz, varían al pasar de una a otra y son, por tanto, funciones de ω . Puede, pues, escribirse como expresión del momento flector en un punto cualquiera de la cubierta:

$$M = -\Sigma f_{\mu}(\omega) \times \cos \frac{\mu x}{l}, \quad [18]$$

donde μ toma los valores $\pi, -3\pi, 5\pi$.

Sentado esto, de la ecuación [4] se deduce:

$$N = -\frac{1}{K} \Sigma \frac{d f_{\mu}}{d \omega} \cos \frac{\mu x}{l}. \quad [19]$$

De la [3]:

$$Q = \Sigma \frac{1}{R} \frac{d^2 f_{\mu}}{d \omega^2} \cos \frac{\mu x}{l}. \quad [20]$$

De la [1]:

$$\frac{dT}{dx} = -\frac{1}{R} \times \frac{dS}{d\omega},$$

que integrada, y observando que la constante de integración es nula por serlo T y $\cos \frac{\mu x}{l}$ para $x = \pm \frac{l}{2}$, da:

$$T = -\Sigma \frac{l^2}{\mu^2 R^3} \left(\frac{d^2 f_{\mu}}{d \omega^2} + \frac{d^4 f_{\mu}}{d \omega^4} \right) \cos \frac{\mu x}{l}.$$

Continuando igualmente con las ecuaciones [5], [7], [6], [8] y [9], por este orden, se llega, en fin, a la ecuación:

$$\begin{aligned} E g z = \Sigma \frac{1}{R^2} \left[-\frac{d^2 f_{\mu}}{d \omega^2} + \frac{2 l^2}{\mu^2 R^2} \left(\frac{d^2 f_{\mu}}{d \omega^2} + \frac{d^4 f_{\mu}}{d \omega^4} \right) - \right. \\ \left. - \frac{l^4}{\mu^4 R^4} \left(\frac{d^4 f_{\mu}}{d \omega^4} + \frac{d^6 f_{\mu}}{d \omega^6} \right) - \frac{d^4 f_{\mu}}{d \omega^4} + \frac{2 l^2}{\mu^2 R^2} \left(\frac{d^4 f_{\mu}}{d \omega^4} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{d^6 f_{\mu}}{d \omega^6} \right) - \frac{l^4}{\mu^4 R^4} \left(\frac{d^6 f_{\mu}}{d \omega^6} + \frac{d^8 f_{\mu}}{d \omega^8} \right) \right] \cos \frac{\mu x}{l} = \\ = E g \frac{12}{E g^3} \Sigma f_{\mu} \cos \frac{\mu x}{l}. \end{aligned}$$

Ordenando y haciendo:

$$\nu = \mu^2 \frac{R^2}{l^2}, \quad \lambda = \frac{R}{g} \sqrt{3},$$

queda, por último:

$$\begin{aligned} \frac{1}{R^2} \Sigma \left\{ \left[\frac{d^8 f_{\mu}}{d \omega^8} + 2(1-\nu) \frac{d^6 f_{\mu}}{d \omega^6} + (1-4\nu+\nu^2) \frac{d^4 f_{\mu}}{d \omega^4} - \right. \right. \\ \left. \left. - (2\nu-\nu^2) \frac{d^2 f_{\mu}}{d \omega^2} + 4\nu^2 \lambda^2 f_{\mu} \right] \cos \frac{\mu x}{l} \right\} = 0. \quad [21] \end{aligned}$$

Ahora bien: como esta condición ha de cumplirse para todos los puntos de la lámina, y, por tanto,

para todos los valores de x , es preciso que los paréntesis cuadrados (que son independientes de x) sean todos nulos, quedando así definida, finalmente, cada una de las funciones $f \mu$ mediante la ecuación diferencial:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^8 f \mu}{d \omega^8} + 2(1 - \nu) \frac{d^6 f \mu}{d \omega^6} + (1 - 4\nu + \nu^2) \frac{d^4 f \mu}{d \omega^4} - \\ - (2\nu - \nu^2) \frac{d^2 f \mu}{d \omega^2} + 4\nu^2 \lambda^2 f \mu = 0, \end{aligned} \right\} [22]$$

en la cual, el parámetro ν varía con la función al dar a μ los valores ya indicados π , -3π , 5π ...

Esta ecuación diferencial es lineal, homogénea y de coeficientes constantes; su integral general es, por consiguiente, de la forma:

$$f \mu(\omega) = F_1 e^{m_1 \omega} + F_2 e^{m_2 \omega} + \dots + F_8 e^{m_8 \omega},$$

donde $F_1, F_2 \dots F_8$ son las constantes de integración, y $m_1, m_2 \dots m_8$ las raíces de la ecuación característica:

$$m^8 + 2(1 - \nu) m^6 + (1 - 4\nu + \nu^2) m^4 - (2\nu - \nu^2) m^2 + 4\nu^2 \lambda^2 = 0.$$

Dadas las dimensiones que tiene nuestra lámina, los coeficientes de las potencias de m en esta ecuación son pequeños respecto del término independiente, y las raíces de la misma son, por tanto, todas imaginarias, conjugadas dos a dos, naturalmente. Y por carecer la ecuación de los términos en potencias impares de la variable, dichas raíces son también dos a dos iguales y de signo contrario. Los ocho valores de m se obtienen, pues, haciendo todas las combinaciones de signos en dos expresiones del tipo:

$$\begin{aligned} m_{1, 2, 3, 4} &= \pm J_1 \pm K_1 \cdot i \\ m_{5, 6, 7, 8} &= \pm j_1 \pm k_1 \cdot i. \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta estas relaciones y aplicando la transformación de Euler, para evitar el manejo de elementos imaginarios, la integral general antes indicada puede ponerse en la forma:

$$f \mu(\omega) = e^{J_1 \omega} (A \operatorname{sen} K_1 \omega + B \operatorname{cos} K_1 \omega) + e^{j_1 \omega} (C \operatorname{sen} k_1 \omega + D \operatorname{cos} k_1 \omega) + e^{-J_1 \omega} (G \operatorname{sen} K_1 \omega + L \operatorname{cos} K_1 \omega) + e^{-j_1 \omega} (H \operatorname{sen} k_1 \omega + O \operatorname{cos} k_1 \omega) \quad [23]$$

El cálculo de los valores de J_1, K_1, j_1 y k_1 , partes reales e imaginarias de las raíces de la ecuación característica, puede hacerse por el método empleado por Dischinger en el cálculo de las cubiertas de Francfort y Budapest, por ejemplo; pero es más sencillo y rápido el siguiente, basado, como aquél, en la circunstancia de ser muy pequeños, respecto del término independiente, los demás coeficientes de la ecuación característica.

Sea

$$m^8 + z_1 m^6 + z_2 m^4 + z_3 m^2 + w = 0;$$

dicha ecuación característica. Despejando m en el primer término, se tiene:

$$m = \sqrt[8]{-w - z_1 m^6 - z_2 m^4 - z_3 m^2}.$$

Haciendo $\tau = \sqrt[8]{-w}$ y desarrollando por la fórmula de Newton:

$$\begin{aligned} m = (\tau^8 - z_1 m^6 - z_2 m^4 - z_3 m^2)^{1/8} = \tau - \frac{1}{8} \tau^{-7} (z_1 m^6 + \\ + z_2 m^4 + z_3 m^2) - \frac{1}{8} \times \frac{7}{8} \tau^{-15} (z_1 m^6 + z_2 m^4 + \\ + z_3 m^2) + \dots \end{aligned}$$

Tomando los dos primeros términos del desarrollo, se obtiene como valor aproximado:

$$m = \tau - \frac{1}{8} z_1 \tau^{-7} m^6 \simeq \tau - \frac{z_1}{8 \tau}.$$

Y sustituyendo este valor en lugar de m en el desarrollo, y limitando éste en los términos en τ^{-3} , resulta finalmente como valor de m :

$$m = \tau - \frac{z_1}{8 \tau} + \left(\frac{5 z_1^2}{16} - z_2 \right) \frac{1}{8 \tau^3}.$$

El error cometido al limitar así el desarrollo, representado aproximadamente por los términos en τ^{-5} de éste, vale:

$$\epsilon \simeq \frac{z_1^3 - 2,4 \cdot z_1 z_2 - 6,4 \cdot z_3}{50 \tau^5}.$$

Haciendo ahora $\rho = \sqrt[8]{w}$ (valor asimétrico); recordando que:

$$\tau = \sqrt[8]{-w} = \rho \left(\cos \frac{(2n+1)\pi}{8} + i \cdot \operatorname{sen} \frac{(2n+1)\pi}{8} \right),$$

teniendo en cuenta que estos seno y coseno sólo tienen dos valores numéricamente distintos, que corresponden a $n=0$ y $n=1$; sustituyendo estos valores de τ en las fórmulas anteriores; separando la parte real y la imaginaria de m (que son las J_1, K_1, j_1 y k_1 antes consideradas), y sustituyendo los valores numéricos de las líneas trigonométricas que intervienen en las fórmulas, resulta, finalmente:

$$\begin{aligned} \pm J_1 &= 0,9238795 \left(\rho - \frac{z_1}{8 \rho} \right) + 0,0478354 \left(\frac{5 z_1^2}{16} - z_2 \right) \frac{1}{\rho^3} \\ \pm K_1 &= 0,3826834 \left(\rho + \frac{z_1}{8 \rho} \right) - 0,1154849 \left(\frac{5 z_1^2}{16} - z_2 \right) \frac{1}{\rho^3} \\ \pm j_1 &= 0,3826834 \left(\rho - \frac{z_1}{8 \rho} \right) - 0,1154849 \left(\frac{5 z_1^2}{16} - z_2 \right) \frac{1}{\rho^3} \\ \pm k_1 &= 0,9238795 \left(\rho + \frac{z_1}{8 \rho} \right) + 0,0478354 \left(\frac{5 z_1^2}{16} - z_2 \right) \frac{1}{\rho^3} \end{aligned} \quad [24]$$

Llamemos también $J_2, J_3, K_2 \dots J_n, K_n$ los valores que se deducen sucesivamente de los anteriores por las simples leyes de recurrencia:

$$\left. \begin{aligned} J_n &= J_{n-1} \cdot J_1 - K_{n-1} \cdot K_1 \\ K_n &= J_{n+1} \cdot K_1 + J_1 \cdot K_{n+1} \dots \end{aligned} \right\} \quad [25]$$

Antes de seguir adelante, conviene hacer dos ob-

servaciones, que simplifican en gran manera el cálculo a desarrollar.

Es la una, que de los ocho términos que componen cada función f_μ , los cuatro que tienen negativo el exponente de e son funciones periódicas decrecientes con los valores crecientes de ω , y los otros cuatro son funciones crecientes con estos valores, o lo que es igual, si se toma una generatriz de borde de la lámina como origen de la variable ω y se designa por Ω el ángulo total del lóbulo, los cuatro primeros términos representan ondas amortiguadas desde el borde $\omega = 0$ al $\omega = \Omega$, y los otros cuatro términos, ondas amortiguadas de $\omega = \Omega$ a $\omega = 0$. Cuando el espesor de la lámina es pequeño y su ángulo grande, como sucede en nuestro caso, los exponentes son grandes, y las ondas, por tanto, muy amortiguadas. Si, además, las condiciones en ambos bordes son comparables en magnitud, la influencia de cada una de las ondas que parten del otro es despreciable al lado de las que nacen en aquél, y se puede, por consiguiente, reducir a los cuatro términos correspondientes la expresión de cada función f_μ , al tratar de determinar sus constantes por las condiciones en los bordes; quedando así reducida la expresión de f_μ a la siguiente:

$$f_\mu(\omega) = e^{J_1 \omega} (A \operatorname{sen} K_1 \omega + B \cos K_1 \omega) + e^{J_2 \omega} (C \operatorname{sen} k_1 \omega + D \cos k_1 \omega) \dots \quad [26]$$

en la cual, J_1 y j_1 , son los valores negativos, y K_1 y k_1 , los positivos de estos coeficientes, y A, B, C, D , las constantes a determinar, como iremos viendo por las condiciones de borde.

La otra observación se refiere al planteamiento de estas condiciones. Conocida la forma de estas funciones f_μ , a reserva de determinar sus constantes de integración, las ecuaciones [1] a [9] de equilibrio y deformación del elemento de lámina permi-

ten expresar en forma análoga las tensiones y los recorridos $M, N, T, Q, S, \xi, \eta, \zeta$ y θ , obteniéndose para cada uno de ellos un desarrollo de la forma:

$$\Sigma \phi_\mu \cdot \cos \frac{\mu x}{l},$$

o bien

$$\Sigma \phi_\mu \operatorname{sen} \frac{\mu x}{l},$$

en el cual los coeficientes ϕ_μ de los senos o cosenos son funciones sólo de ω , cuya forma será deducida oportunamente. Y las condiciones en los bordes se reducen a igualar dos desarrollos de este tipo en senos o dos en cosenos. Pero como estas condiciones han de cumplirse para todos los puntos de la generatriz de borde, es decir, para todos los valores de x , ello implica la igualdad de los coeficientes correspondientes, dos a dos. Lo cual quiere decir que el cálculo de las funciones f_μ y de las tensiones y deformaciones del sistema puede hacerse término a término, combinando por separado los términos que ocupan el mismo lugar en los desarrollos de las cargas, tensiones y recorridos. No es preciso insistir en la importancia de esta simplificación, que hace posible un cálculo que, de otro modo, no lo sería prácticamente, siendo de advertir que de ordinario bastará considerar los dos o tres primeros términos de cada desarrollo para obtener una aproximación suficiente.

Formación de las expresiones de las tensiones y los recorridos por el efecto de borde de las generatrices extremas en cada lóbulo.

Con la expresión [26] es fácil formarlas, pues basta llevar el valor de f a las expresiones de las distintas tensiones y recorridos en función de las

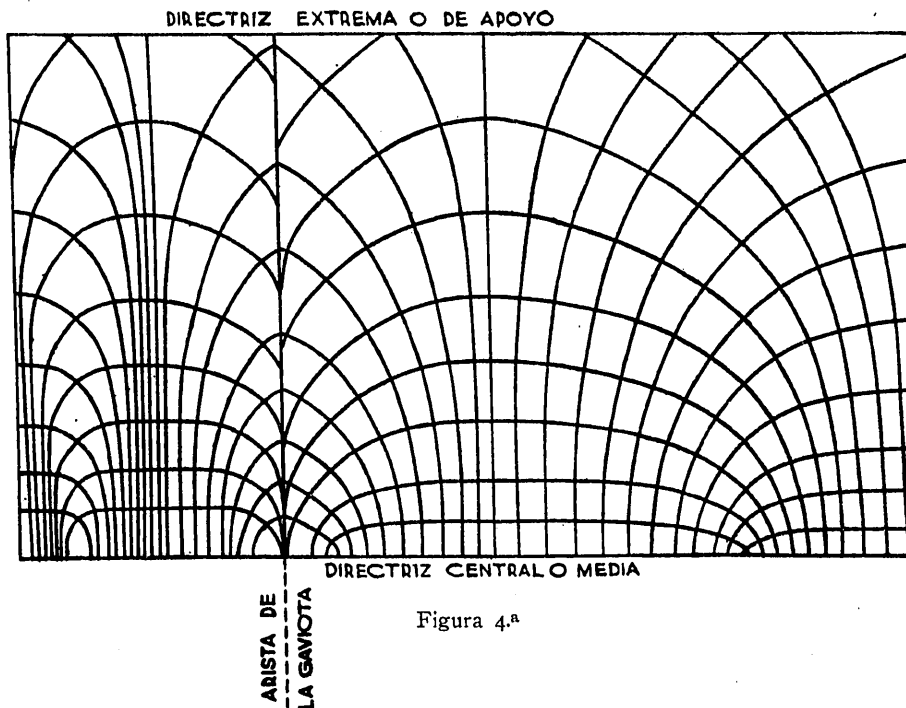


Figura 4.^a

sucesivas derivadas de f (expresiones [19], [20] y demás que no hemos escrito, hasta la [21]).

La primera derivada de f , según [26], es:

$$\frac{df}{d\omega} = A (J_1 e^{J_1 \omega} \operatorname{sen} K_1 \omega + K_1 e^{J_1 \omega} \cos K_1 \omega) + \\ + B (J_1 e^{J_1 \omega} \cos K_1 \omega - K_1 e^{J_1 \omega} \operatorname{sen} K_1 \omega) + \\ + C (j_1 e^{j_1 \omega} \operatorname{sen} k_1 \omega + k_1 e^{j_1 \omega} \cos k_1 \omega) + \\ + D (j_1 e^{j_1 \omega} \cos k_1 \omega - k_1 e^{j_1 \omega} \operatorname{sen} k_1 \omega),$$

y teniendo presente la ley de formación de J y $K_{\bar{n}}$ que expresan las fórmulas [25], puede ponerse como expresión general de cualquier derivada de f :

$$\frac{d^n f}{d\omega^n} = A (J_{\bar{n}} e^{J_1 \omega} \operatorname{sen} K_1 \omega + K_{\bar{n}} e^{J_1 \omega} \cos K_1 \omega) + \\ + B (J_{\bar{n}} e^{J_1 \omega} \cos K_1 \omega - K_{\bar{n}} e^{J_1 \omega} \operatorname{sen} K_1 \omega) + \\ + C (j_{\bar{n}} e^{j_1 \omega} \operatorname{sen} k_1 \omega + k_{\bar{n}} e^{j_1 \omega} \cos k_1 \omega) + \\ + D (j_{\bar{n}} e^{j_1 \omega} \cos k_1 \omega - k_{\bar{n}} e^{j_1 \omega} \operatorname{sen} k_1 \omega) \quad [27]$$

Por la fórmula de la expresión de las derivadas y por la de las ecuaciones [19], [20]...[21], antes citada, se comprende que las tensiones y los recorridos en un punto cualquiera ($x\omega$) de la lámina pueden encuadrarse bajo esta forma general para cada término de las series:

$$\operatorname{sen} \frac{\mu x}{l} \left\{ \begin{aligned} & A (\alpha \cdot e^{J_1 \omega} \cos K_1 \omega + \beta \cdot e^{J_1 \omega} \operatorname{sen} K_1 \omega) + \\ & B (\beta \cdot e^{J_1 \omega} \cos K_1 \omega - \alpha \cdot e^{J_1 \omega} \operatorname{sen} K_1 \omega) + \\ & C (\gamma \cdot e^{j_1 \omega} \cos k_1 \omega + \delta \cdot e^{j_1 \omega} \operatorname{sen} k_1 \omega) + \\ & D (\delta \cdot e^{j_1 \omega} \cos k_1 \omega - \gamma \cdot e^{j_1 \omega} \operatorname{sen} k_1 \omega) \end{aligned} \right\} \quad [28]$$

o bien:

$$\left(\operatorname{sen} \frac{\mu x}{l} \text{ ó } \cos \frac{\mu x}{l} \right) [A a_\omega + B b_\omega + C c_\omega + D d_\omega]$$

representando por a_ω , b_ω , c_ω , d_ω las expresiones de los paréntesis anteriores. Y los valores de los coeficientes α , β , γ y δ , que se deducen desarrollando las expresiones [19], [20]...[21] y teniendo presente la [27], son:

$$\begin{aligned} a_M &= -1 \\ a_N &= -\frac{1}{R} K_1 \\ a_Q &= +\frac{1}{R} K_2 \\ a_S &= -\frac{1}{R^2} (K_1 + K_3) \\ a_T &= -\frac{1}{vR} (K_2 + K_4) \\ a_\eta &= +\frac{2}{v} (K_1 + K_3) - \frac{1}{v^2} (K_3 + K_5) \\ a_\zeta &= -K_2 + \frac{2}{v} (K_2 + K_4) - \frac{1}{v^2} (K_4 + K_6) \\ a_\theta &= -K_3 + \frac{2}{v} (K_1 + 2K_3 + K_5) - \frac{1}{v^2} (K_3 + 2K_5 + K_7) \end{aligned} \quad [29]$$

Los β son idénticos, sustituyendo K por J , y los δ y γ se forman poniendo j y k , respectivamente.

Determinación de las constantes de integración en la gaviota.

Para poder formar las expresiones [28] que nos han de dar los valores de M , N , Q , S , T , $Eg\eta$, $Eg\zeta$ y $Eg\theta$ que nos interesan, nos falta solamente conocer los valores de las constantes A , B , C , D , que vienen impuestos por las condiciones límites o condiciones de sustentación en las generatrices extremas de borde.

Ya dijimos que todas estas tensiones y recorridos producidos por el efecto de cada uno de los bordes, han de sumarse a los del efecto del otro borde y a los correspondientes del efecto-membrana para formar los valores reales. Designando con los sub-índices p , v , n , los diferentes valores o expresiones, según que sean debidos al peso, viento o nieve, respectivamente, por (') (''), según correspondan al primer o segundo término de las raíces de Fourier, y por (I) (II) los correspondientes a uno u otro de los dos lóbulos que forman la lámina total; recordemos también que cada una de las constantes A , B , C , D , representa o está formada por los seis valores A'_p , A'_v , A'_n , A''_p , A''_v , A''_n , B'_p , B'_v , B'_n , B''_p , B''_v , B''_n , C'_p , C'_v , C'_n , C''_p , C''_v , C''_n , D'_p , D'_v , D'_n , D''_p , D''_v , D''_n , cuyas leyes de repartición son distintas, y a los dos primeros términos de las series de Fourier, si, como dijimos al principio, nos basta con estos dos primeros términos.

Como consecuencia de ello, en el borde común nos resultan las 48 incógnitas siguientes:

$$\begin{aligned} & A'^I_{dp} B'^I_{dp} C'^I_{dp} D'^I_{dp} A'^I_{dv} B'^I_{dv} C'^I_{dv} D'^I_{dv} A'^I_{dn} B'^I_{dn} C'^I_{dn} D'^I_{dn} \\ & A''^I_{dp} B''^I_{dp} C''^I_{dp} D''^I_{dp} A''^I_{dv} B''^I_{dv} C''^I_{dv} D''^I_{dv} A''^I_{dn} B''^I_{dn} C''^I_{dn} D''^I_{dn} \\ & A'^{II}_{dp} B'^{II}_{dp} C'^{II}_{dp} D'^{II}_{dp} A'^{II}_{dv} B'^{II}_{dv} C'^{II}_{dv} D'^{II}_{dv} A'^{II}_{dn} B'^{II}_{dn} C'^{II}_{dn} D'^{II}_{dn} \\ & A''^{II}_{dp} B''^{II}_{dp} C''^{II}_{dp} D''^{II}_{dp} A''^{II}_{dv} B''^{II}_{dv} C''^{II}_{dv} D''^{II}_{dv} A''^{II}_{dn} B''^{II}_{dn} C''^{II}_{dn} D''^{II}_{dn} \end{aligned}$$

a las que hay que añadir las seis tensiones parciales:

$$t'_p t'_v t'_n \quad t''_p t''_v t''_n,$$

según la generatriz en la gaviota o arista de unión de los dos lóbulos, cuya suma se fija como dato del problema por razones económicas y de seguridad, pero cuyos valores e importancias relativas se desconocen *a priori*; son, pues, 54 incógnitas.

Recordando que la gaviota es ortogonal, y que en un borde cualquiera se desprecia el efecto del borde opuesto del mismo lóbulo, por llegar sobradamente amortiguado, las condiciones de equilibrio o sustentación en este borde común de ambos lóbulos plantean los siete grupos siguientes de ecuaciones, con el total necesario de 54:

1) El recorrido radial del borde de cada lóbulo tiene que ser igual al tangencial del otro y, por consiguiente (pasado el término de membrana al segundo miembro), se tiene:

$$\begin{aligned} & A'_d a_\zeta + B'_d b_\zeta + C'_d c_\zeta + D'_d d_\zeta = -\zeta^I_{md} - \eta^I_d \\ & A''_d a_\zeta + B''_d b_\zeta + C''_d c_\zeta + D''_d d_\zeta = -\zeta^{II}_{mi} - \eta^{II}_d \end{aligned} \quad [30]$$

(El subíndice m indica que se refiere el símbolo

al valor correspondiente deducido como membrana o lóbulo cerrado por las expresiones [11] a [17] o similares.)

Ecuaciones que, repetidas para $(p)(v)(n)(p)(v)(n)$, dan un conjunto de doce ecuaciones y en las que el subíndice d se refiere al borde derecho, y el i , al izquierdo. (El borde común de gaviota es el derecho del lóbulo I e izquierdo del II.)

Observemos que, además de las constantes desconocidas, se desconocen también los valores de η^I , η^{II} , que han de estar, a su vez, formados por expresiones de la forma:

$$A a_\eta + B b_\eta + C c_\eta + D d_\eta + \eta. \quad [31]$$

2) El equilibrio entre las fuerzas Q , N y P da, igualmente, las doce ecuaciones siguientes:

$$\left. \begin{aligned} A_d^I a_Q + B_d^I b_Q + C_d^I c_Q + D_d^I d_Q &= -Q_{md}^I + N_i^{II} \\ A_i^{II} a_Q + B_i^{II} b_Q + C_i^{II} c_Q + D_i^{II} d_Q &= -Q_{mi}^{II} + N_d^I \end{aligned} \right\} \quad [32]$$

3) El equilibrio de momentos, da:

$$\left. \begin{aligned} A_d^I a_M + B_d^I b_M + C_d^I c_M + D_d^I d_M &= -M^{II} \\ A_i^{II} a_M + B_i^{II} b_M + C_i^{II} c_M + D_i^{II} d_M &= -M^I \end{aligned} \right\} \quad [33]$$

En realidad, estas ecuaciones son una misma, porque el primer miembro de la primera es precisamente la expresión del segundo de la otra, y viceversa; de modo que se obtienen solamente seis ecuaciones.

4) La tensión unitaria de la generatriz de borde en cada lóbulo tiene que ser igual a la del tirante común:

$$\left. \begin{aligned} A_d^I a_T + B_d^I b_T + C_d^I c_T + D_d^I d_T &= -T_{md}^I + \text{tg} \\ A_i^{II} a_T + B_i^{II} b_T + C_i^{II} c_T + D_i^{II} d_T &= -T_{mi}^{II} + \text{tg} \end{aligned} \right\} \quad [34]$$

Son doce ecuaciones.

5) La igualdad del giro de las normales en la gaviota da otras seis ecuaciones de la forma:

$$\theta_d^I = \theta_i^{II}. \quad [35]$$

6) Las tensiones unitarias, según la generatriz, correspondientes a peso, viento y nieve, para el primer término de la serie de Fourier, han de satisfacer, en la gaviota, la condición:

$$\left. \begin{aligned} t_g &= \int \int_0^{1/2} \left(\frac{d S_d^I}{d x} - \frac{d S_i^{II}}{d x} \right) d x^2 = \\ &= \frac{l^2}{\pi^2} \left(\frac{d S_d^I}{d x} - \frac{d S_i^{II}}{d x} \right) \end{aligned} \right\} \quad [36]$$

y para el segundo término de la serie, la condición:

$$\left. \begin{aligned} t_g &= \int \int_0^{1/2} \left(\frac{d S_d^I}{d x} - \frac{d S_i^{II}}{d x} \right) d x^2 = \\ &= \frac{l^2}{9\pi^2} \left(\frac{d S_d^I}{d x} - \frac{d S_i^{II}}{d x} \right) \end{aligned} \right\} \quad [37]$$

Por consiguiente, se tienen las cinco ecuaciones:

$$\left. \begin{aligned} \frac{t_p}{t_v} &= \frac{\frac{d S_{dp}^I}{d x} - \frac{d S_{ip}^{II}}{d x}}{\frac{d S_{dv}^I}{d x} - \frac{d S_{iv}^{II}}{d x}}, \quad \frac{t_p}{t_n} = \frac{\frac{d S_{dp}^I}{d x} - \frac{d S_{ip}^{II}}{d x}}{\frac{d S_{dn}^I}{d x} - \frac{d S_{in}^{II}}{d x}} \\ \frac{t_p}{t_v} &= \frac{\frac{d S_{dp}^I}{d x} - \frac{d S_{ip}^{II}}{d x}}{\frac{d S_{dv}^I}{d x} - \frac{d S_{iv}^{II}}{d x}}, \quad \frac{t_p}{t_n} = \frac{\frac{d S_{dp}^I}{d x} - \frac{d S_{ip}^{II}}{d x}}{\frac{d S_{dn}^I}{d x} - \frac{d S_{in}^{II}}{d x}} \\ \frac{t_p}{t_v} &= 9 \times \frac{\frac{d S_{dp}^I}{d x} - \frac{d S_{ip}^{II}}{d x}}{\frac{d S_{dv}^I}{d x} - \frac{d S_{iv}^{II}}{d x}}, \quad \frac{t_p}{t_n} = 9 \times \frac{\frac{d S_{dp}^I}{d x} - \frac{d S_{ip}^{II}}{d x}}{\frac{d S_{dn}^I}{d x} - \frac{d S_{in}^{II}}{d x}} \end{aligned} \right\} \quad [38]$$

a las que se añade, por último:

$$t_p + t_v + t_n + t_p + t_v + t_n = t, \quad [39]$$

con la que se establece en el tirante la tensión unitaria prevista, t , como más conveniente y con la que se tiene el total de 54 ecuaciones.

La tensión total en el cordón, será:

$$\left. \begin{aligned} \frac{l^2}{\pi^2} \left(\frac{d S_{dp}^I}{d x} - \frac{d S_{ip}^{II}}{d x} + \frac{d S_{dv}^I}{d x} - \frac{d S_{iv}^{II}}{d x} + \right. \\ \left. + \frac{d S_{dn}^I}{d x} - \frac{d S_{in}^{II}}{d x} \right) + \frac{1}{9} \frac{l^2}{\pi^2} \left(\frac{d S_{dp}^I}{d x} - \right. \\ \left. - \frac{d S_{ip}^{II}}{d x} + \frac{d S_{dv}^I}{d x} - \frac{d S_{iv}^{II}}{d x} + \frac{d S_{dn}^I}{d x} - \frac{d S_{in}^{II}}{d x} \right) \end{aligned} \right\} \quad [40]$$

Para resolver este sistema de ecuaciones, formemos los sistemas auxiliares que se indican a continuación:

$$\left. \begin{aligned} A a_\zeta + B b_\zeta + C c_\zeta + D d_\zeta &= 1 &= 0 &= 0 &= 0 \\ A a_Q + B b_Q + C c_Q + D d_Q &= 0 &= 1 &= 0 &= 0 \\ A a_M + B b_M + C c_M + D d_M &= 0 &= 0 &= 1 &= 0 \\ A a_T + B b_T + C c_T + D d_T &= 0 &= 0 &= 0 &= 1 \end{aligned} \right\} \quad [41]$$

repetidos con los índices

$$(\overset{I}{d}), (\overset{II}{i}), (\overset{I}{d}) \text{ y } (\overset{II}{i});$$

y para distinguir sus resultados, demos a las soluciones del primer sistema el subíndice $\zeta = 1$; a las de los otros, sucesivamente, $Q = 1, M = 1, T = 1$.

Es claro que si conociéramos los valores de los segundos miembros de estos grupos de ecuaciones en el sistema general, el valor de una cualquiera de las constantes desconocidas vendría dado por la suma de los productos de los valores de estas incógnitas en los cuatro sistemas auxiliares [41] por los segundos miembros antedichos. Un ejemplo aclarará esta idea mejor que cualquier explicación: A'_{dp} vendrá dado por:

$$A'_{dp} = A'_{dp}(\zeta=1) \times (-\zeta'_{mdp} - \eta'_{ip}) + A'_{dp}(Q=1) \times (-Q'_{mdp} + N'_{ip}) + A'_{dp}(M=1) \times (-M'_{ip}) + A'_{dp}(T=1) \times (-T'_{mdp} + t' p g); \quad [42]$$

siendo los paréntesis los valores de los segundos miembros que aparecen en las ecuaciones [30], [32], [33] y [34].

Análoga expresión podría escribirse para B, C y D y para los índices y subíndices:

$$\left(\begin{matrix} (I) \\ (dp) \end{matrix} \right) \left(\begin{matrix} (I) \\ (dv) \end{matrix} \right) \left(\begin{matrix} (I) \\ (dn) \end{matrix} \right) \left(\begin{matrix} (II) \\ (ip) \end{matrix} \right) \left(\begin{matrix} (II) \\ (iv) \end{matrix} \right) \left(\begin{matrix} (II) \\ (in) \end{matrix} \right) \left(\begin{matrix} (II) \\ (dp) \end{matrix} \right) \left(\begin{matrix} (II) \\ (dv) \end{matrix} \right) \left(\begin{matrix} (II) \\ (dn) \end{matrix} \right) \left(\begin{matrix} (III) \\ (ip) \end{matrix} \right) \left(\begin{matrix} (III) \\ (iv) \end{matrix} \right) \left(\begin{matrix} (III) \\ (in) \end{matrix} \right);$$

pero para formar el valor antedicho (A'_{dp}), nos faltan por conocer

$$\eta'_{ip}, N'_{ip}, M'_{ip}, t' p,$$

en cuyas expresiones están las mismas constantes desconocidas; análogas expresiones se obtendrían para los valores correspondientes a los otros subíndices.

Por otra parte, el conjunto de valores ha de satisfacer los grupos de ecuaciones [35] y [38].

Podemos resolver el problema por aproximaciones sucesivas, una vez resueltos los sistemas auxiliares. Demos unos valores cualquiera a los η, N, M y t que entran en las expresiones [42] (cero, por ejemplo, o mejor, unos valores que a ojo nos parezca que pueden coincidir con la realidad); con estos valores podemos formar los valores aproximados de las diferentes constantes A, B, C, D , aplicando las expresiones [42], y con ellas, los nuevos valores de

$\eta, N, \theta \frac{dS}{dx}$ dados por las expresiones:

$$\begin{aligned} \eta &= A a_{\eta} + B b_{\eta} + C c_{\eta} + D d_{\eta} + \eta_m \\ N &= A a_N + B b_N + C c_N + D d_N + N_m \\ \theta &= A a_{\theta} + B b_{\theta} + C c_{\theta} + D d_{\theta} + \theta_m \\ \frac{dS}{dx} &= A a_S + B b_S + C c_S + D d_S + \frac{dS_m}{dx} \end{aligned}$$

Para obtener la segunda aproximación de valores, A, B, C, D , basta repetir el cálculo de las expresiones [42], introduciendo en estos nuevos valores de η y de N , unos nuevos valores de M , fijados a sentimiento para que los dos valores θ^I y θ^{II} , últimamente deducidos, tiendan a igualarse como exigen las

ecuaciones del grupo [35], y unos nuevos valores de t que tiendan igualmente a satisfacer la ecuación del grupo [38], en cuyo denominador entre la t en cuestión, y simultáneamente la [39]. Volviendo a formar las expresiones de $N, \eta, \theta \frac{dS}{dx}$, se puede repetir el tanteo hasta obtener la aproximación deseada.

La fijación de estos valores por tanteos sucesivos es relativamente fácil; M influye muy directamente en los valores de θ resultantes y no es necesario que éstos se igualen exactamente, bastando con que las variaciones de M , que hacen cambiar de signo el valor $\theta^I - \theta^{II}$ en dos tanteos sucesivos, esté dentro de los límites prácticamente admisibles para M ; en cuanto a los valores de t , los tanteos son breves, porque tampoco es necesario que la ecuación [39] cierre exactamente, bastando con que el valor o carga unitaria del material sea aceptable.

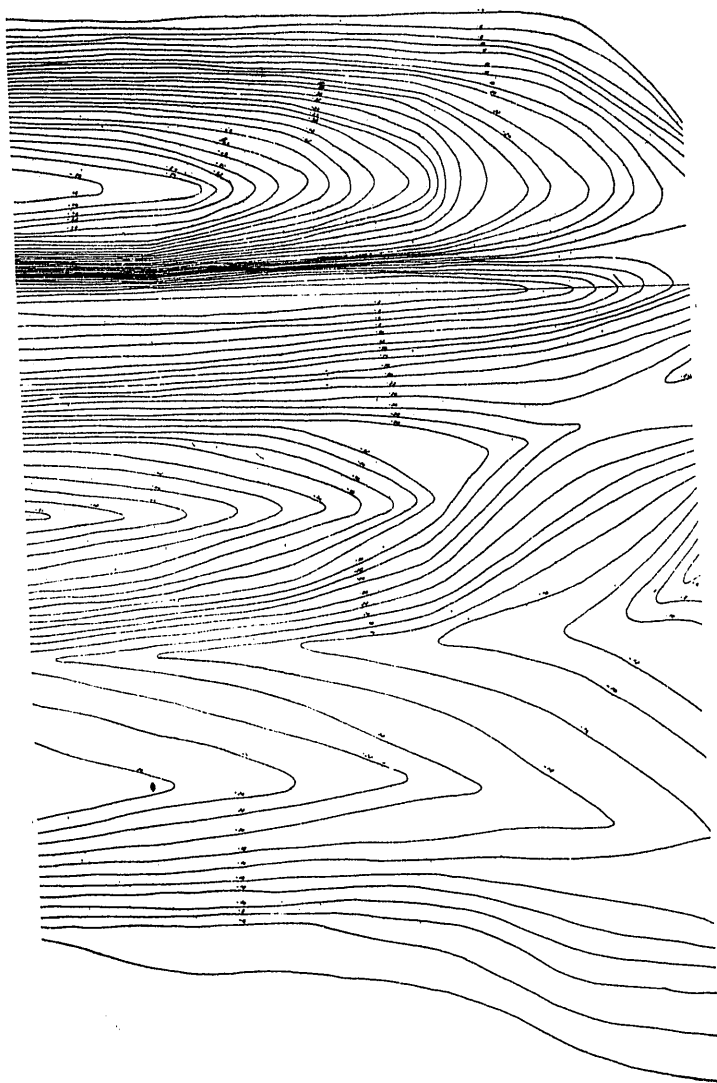


Fig. 5.—Isothermas de máximas compresiones en la superficie media desarrollada.

Determinación de las constantes de integración en los bordes exteriores.

Los bordes exteriores o generatrices extremas no comunes de cada lóbulo van articulados y con libre dilatación longitudinal, pero sin posibilidad de movimientos transversales, ni horizontal ni verticalmente.

No se dispone en ellos tirante supletorio de la lámina, como en la gaviota, porque la armadura resultante es pequeña y no sobrepasa la sección virtual de la lámina, lo cual permite simplificar mucho el problema, pues pueden establecerse por separado los sistemas de ecuaciones para peso, viento y nieve y para cada término de la serie.

En efecto, para cada uno de estos casos han de

verificarse las cuatro condiciones siguientes: Nulidad del recorrido tangencial, nulidad del momento flector, nulidad del recorrido radial y nulidad del esfuerzo cortante por no haber tirante ni elemento que lo absorba.

Resultan, pues, sistemas independientes de ecuaciones de la forma:

$$A a_{\zeta} + B b_{\zeta} + C c_{\zeta} + D d_{\zeta} = -\zeta_m$$

$$A a_{\eta} + B b_{\eta} + C c_{\eta} + D d_{\eta} = -\eta_m$$

$$A a_M + B b_M + C c_M + D d_M = 0$$

$$A a_S + B b_S + C c_S + D d_S = -\frac{d S_m}{d x}$$

repetidos para $(\cdot)$ $(\dot{})$ $(\dot{})$ $(\ddot{})$ $(\ddot{})$ $(\ddot{})$, con los que se determinan las incógnitas A, B, C, D , correspondientes a cada uno de estos seis casos.

Determinación de las tensiones y los recorridos totales.

Estos valores son, en cada punto, suma de los correspondientes a los efectos de los dos bordes y al efecto de membrana.

Estos últimos se deducen de las fórmulas [11-17], aplicando los valores correspondientes a los dos primeros términos de las series.

Basta hallar los valores para $x=0$ ó para $x=\frac{l}{2}$, según que las expresiones contengan

cos $\frac{\mu x}{l}$ ó sen $\frac{\mu x}{l}$, pues con ello quedan determinados para otros valores de x .

Como se trata de leyes sinusoidales sobre la directriz, es más práctico hallar sólo los máximos y trazar gráficamente los diagramas. Recuérdese que es necesario hallar los valores correspondientes a los dos primeros términos de la serie $(\dot{})$ $(\ddot{})$.

Para la determinación de las tensiones correspondientes a un efecto de borde, se calculan primeramente los valores de:

$$e^{j_1 \omega} \cos K_1 \omega \quad e^{j_1 \omega} \operatorname{sen} K_1 \omega \quad e^{j_1 \omega} \cos k_1 \omega \\ e^{j_1 \omega} \operatorname{sen} k_1 \omega$$

para distintos valores de ω , y se dibujan en cuatro curvas, haciendo coincidir las abscisas, con lo que se pueden apreciar los puntos o valores particulares de ω más importantes, esto es, los puntos que mejor han de definir el trazado de las curvas representativas de los distintos a, b, c, d , formados por las sumas de los productos de estos valores por constantes diferentes.

Para estos valores particulares de ω se hallan los de a, b, c, d , correspondientes a las distintas cargas y recorridos que interesan, de acuerdo con las expresiones que entran en [28], para cuya formación se habrán formado primeramente los de $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, deducidos de las [29].

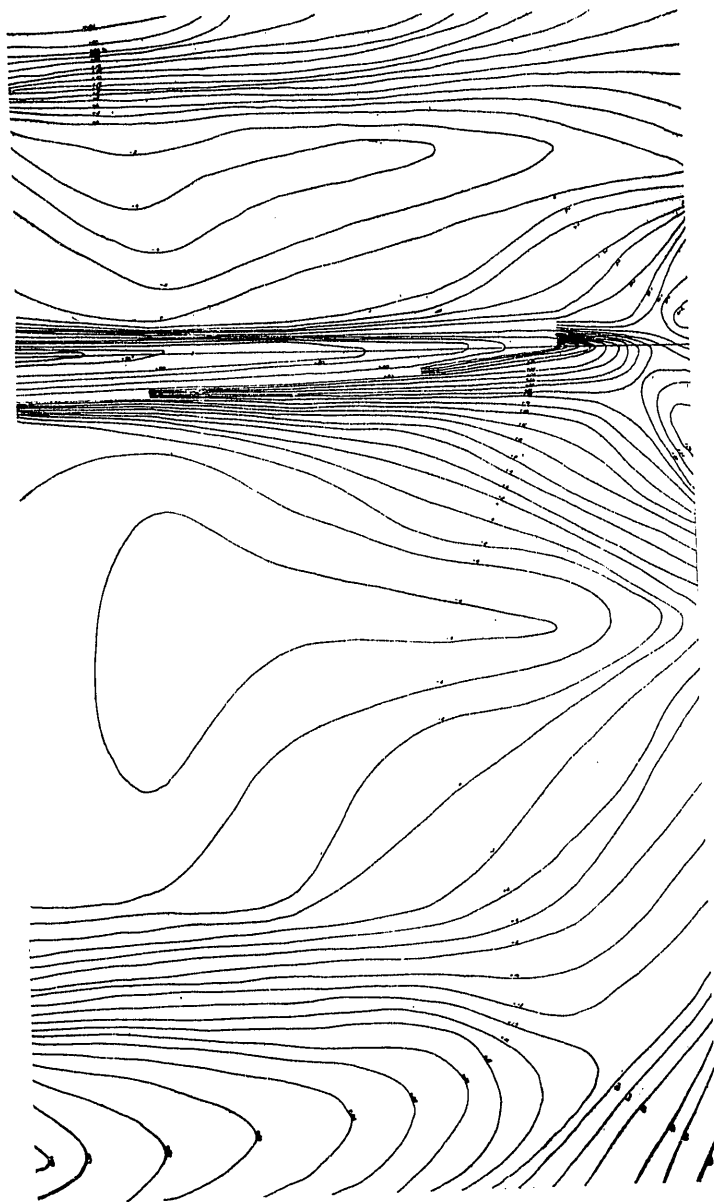


Fig. 6. — Isobaras de máximas tracciones.

Una vez obtenidos estos valores en cada lóbulo para (') y (''), se pueden formar las expresiones [28] de las tensiones y los recorridos debidos a los efectos de cada borde para los valores particulares de ω , antedichos, a partir del borde correspondiente, y trazar con ellos las curvas completas.

Tendremos así, para cada tensión o recorrido y para cada carga exterior (peso, viento o nieve), las nueve curvas correspondientes a los efectos de ambos bordes y al de membrana y a los dos términos de la serie, cuya suma algébrica nos dará el valor real.

Trazadas estas curvas sumas, ha de hacerse todavía la combinación más desfavorable de los valores de peso, de viento y de nieve para obtener la curva de valores máximos positivos y negativos de cada tensión o recorrido a lo largo de la directriz.

Para determinar los diferentes valores en otras directrices, o sea para valores de x distintos de 0 y de $\frac{l}{2}$, parece necesario aplicar las leyes ($\sin$ ó $\cos$)

$\frac{\pi x}{l}$ y ($\sin$ ó $\cos$) $\frac{3\pi x}{l}$, por separado, para cada término o parte de la tensión o del recorrido, pero podemos admitir para el conjunto que las leyes de variación a lo largo de la generatriz sean parabólicas

para T y para M , lineal para S , constante para Q , etcétera, como corresponde a la suma total de los términos de las series respectivas.

De este modo podemos acotar sobre una planta desarrollada de una lámina los valores que interesan principalmente, esto es, los de T , Q , S y M , pues los de N son pequeños y los de los recorridos en cada punto interesan menos.

Conocidos los valores de T , Q , y S en un punto cualquiera, puede ya trazarse el círculo de Mohr correspondiente, y gráficamente, la dirección y magnitud de las dos tensiones principales en el plano tangente a la lámina, y con ello, los planos de isotáticas y de isobaras de compresiones y tracciones principales máximas.

Con éstos y con los planos de isobaras de M , se fijan definitivamente las direcciones y cuantías de las armaduras y tensiones de trabajo en toda la lámina.

En las figuras se ven las formas de trabajo obtenidas en nuestro caso, y en un próximo artículo veremos la correspondencia entre los resultados de este cálculo y los de las medidas hechas en modelo reducido y en obra, así como el comportamiento de la misma.

