

MOMENTO DE INERCIA DE UNA SECCIÓN CIRCULAR MACIZA PARA EL MATERIAL HORMIGÓN ARMADO

POR JUAN J. GÓMEZ CORDOBÉS, INGENIERO DE CAMINOS

II

En el artículo anterior, publicado en el número 2705 de esta REVISTA, correspondiente al 1.º de septiembre de 1940, al final del mismo, anunciamos el contenido que vamos a desarrollar en el presente.

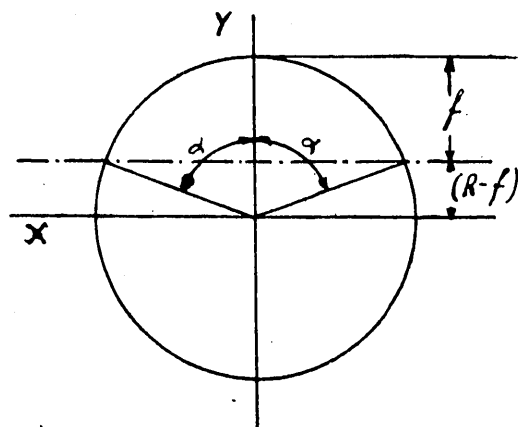
Tercer procedimiento.— En la página 198 de *Hormigón Armado*, Peña Boeuf, se obtiene la siguiente expresión para el momento de inercia de piezas de sección circular maciza:

$$I = 2 R^4 \left[\frac{\alpha}{8} - \frac{5}{12} \sin^3 \alpha \cos \alpha - \frac{\sin \alpha \cdot \cos \alpha}{8} + \frac{\cos^2 \alpha}{2} (\alpha - \sin \alpha \cdot \cos \alpha) \right].$$

La profundidad relativa o unitaria de la fibra neutra la designamos por la letra griega φ , como en el artículo anterior, y es la misma letra que emplea Peña Boeuf para designarla en la sección rectangular:

$$\frac{f}{2R} = \varphi.$$

Examinando la figura adjunta, se deduce:



$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{R-f}{R} = 1-2\varphi \\ \sin \alpha &= \frac{\sqrt{R^2 - (R-f)^2}}{R} = \sqrt{1 - (1-2\varphi)^2} = \\ &= 2\sqrt{\varphi(1-\varphi)}. \end{aligned}$$

Sustituyendo valores en la expresión anterior se obtiene:

$$\begin{aligned} I &= 2 \left[\left(\frac{1}{8} + \frac{1}{2} (1-2\varphi)^2 \right) \text{ang.} \cos (1-2\varphi) - \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{1}{8} + \frac{5}{12} (1 - (1-2\varphi)^2) + \frac{1}{2} (1-2\varphi)^2 \right) \right. \\ &\quad \left. 2(1-2\varphi) \sqrt{\varphi(1-\varphi)} \right] R^4 = \left[\left(\frac{1}{4} + (1-2\varphi) \right) \right. \\ &\quad \left. \text{ang.} \cos (1-2\varphi) - 4 \left(\frac{13}{24} + \frac{1}{12} (1-2\varphi)^2 \right) \right. \\ &\quad \left. (1-2\varphi) \sqrt{\varphi(1-\varphi)} \right] R^4. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I &= \left[\left(\frac{1}{4} + (1-2\varphi)^2 \right) \text{ang.} \cos (1-2\varphi) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{3} \left(\frac{13}{2} + (1-2\varphi)^2 \right) (1-2\varphi) \sqrt{\varphi(1-\varphi)} \right] R^4. \end{aligned}$$

Resulta el mismo valor o la misma expresión obtenida por los dos primeros procedimientos.

Cuarto procedimiento.— En los números 15, 17, 18 de la REVISTA DE OBRAS PÚBLICAS, correspondientes al año 1931, se expuso este procedimiento, pero se quedó la expresión resultante insuficientemente simplificada, por lo que vamos a recordarlo y a ultimar la simplificación.

Ver Colombo, páginas 40 y 49 de la sexta edición española.

Área del segmento de círculo:

$$\begin{aligned} s &= \frac{R^2}{2} \left(2 \text{ang.} \cos (1-2\varphi) - 4 (1-2\varphi) \sqrt{\varphi(1-\varphi)} \right) = \\ &= (\text{ang.} \cos (1-2\varphi) - 2 (1-2\varphi) \cdot \sqrt{\varphi(1-\varphi)}) \cdot R^2. \end{aligned}$$

Cuerda del segmento de círculo:

$$c = 2 \sqrt{R^2 - (R-f)^2} = 4 R \sqrt{\varphi(1-\varphi)}.$$

Distancia del centro de gravedad del segmento al centro de círculo:

$$\begin{aligned} z &= \frac{c^3}{12 \cdot s} = \frac{64 \cdot \varphi(1-\varphi) \sqrt{\varphi(1-\varphi)}}{12 (\text{ang.} \cos (1-2\varphi) - 2 (1-2\varphi) \sqrt{\varphi(1-\varphi)})} = R \\ &= \frac{16}{3} \cdot \frac{\varphi(1-\varphi) \sqrt{\varphi(1-\varphi)}}{\text{ang.} \cos (1-2\varphi) - 2 (1-2\varphi) \sqrt{\varphi(1-\varphi)}} \cdot R. \end{aligned}$$

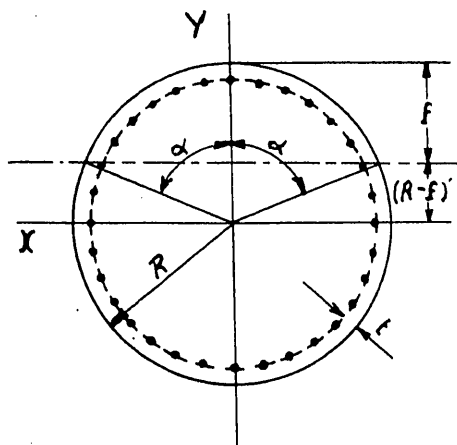
Designando por I_f e I_g las dos partes componentes del momento de inercia $I = I_g + I_f$, se tiene, sucesivamente:

$$\begin{aligned}
 I_g &= 2 \int \sqrt{R^2 - y^2} \left(y - \frac{c^3}{12 \cdot 5} \right)^2 dy = 2 \int \frac{R^2 - y^2}{\sqrt{R^2 - y^2}} \\
 &\left(y^2 - 2 \frac{c^3}{12 \cdot 5} y + \frac{c^6}{12^2 \cdot 5^2} \right) dy = 2 \left[R^2 \int \frac{y^2 dy}{\sqrt{R^2 - y^2}} - \right. \\
 &\left. - \int \frac{y^4 dy}{\sqrt{R^2 - y^2}} - 2 \frac{c^3}{12 \cdot 5} R^2 \int \frac{y dy}{\sqrt{R^2 - y^2}} + \right. \\
 &\left. + 2 \frac{c^3}{12 \cdot 5} \int \frac{y^3 dy}{\sqrt{R^2 - y^2}} + \frac{c^6}{12^2 \cdot 5^2} \right. \\
 &\left. R^2 \int \frac{dy}{\sqrt{R^2 - y^2}} - \frac{c^6}{12^2 \cdot 5^2} \int \frac{y dy}{\sqrt{R^2 - y^2}} \right]_{(1-\varphi)R}^R = \\
 &= 2 \left[- \int \frac{y^4 dy}{\sqrt{R^2 - y^2}} + 2 \frac{c^2}{12 \cdot 5} \int \frac{y^3 dy}{\sqrt{R^2 - y^2}} + \right. \\
 &\left. + \left(R^2 - \frac{c^6}{12^2 \cdot 5^2} \right) \int \frac{y^2 dy}{\sqrt{R^2 - y^2}} - 2 \frac{c^3}{12 \cdot 5} \right. \\
 &\left. R^2 \int \frac{y dy}{\sqrt{R^2 - y^2}} + \frac{c^6}{12^2 \cdot 5^2} R^2 \int \frac{dy}{\sqrt{R^2 - y^2}} \right]_{(1-2\varphi)R}^R = \\
 &= 2 \left[\frac{1}{4} \left(y^3 \sqrt{R^2 - y^2} + \frac{3}{2} R^2 \left(y \sqrt{R^2 - y^2} - \right. \right. \right. \\
 &\left. \left. - R^2 \text{ang. sen } \frac{y}{R} \right) \right) - \frac{2}{3} \frac{c^3}{12 \cdot 5} (y^2 + 2 R^2) \\
 &\sqrt{R^2 - y^2} - \frac{1}{2} \left(R^2 - \frac{c^6}{12^2 \cdot 5^2} \right) \left(y \sqrt{R^2 - y^2} - \right. \\
 &\left. - R^2 \text{ang. sen } \frac{y}{R} \right) + 2 \frac{c^3}{12 \cdot 5} R^2 \sqrt{R^2 - y^2} + \\
 &\left. + \frac{c^6}{12^2 \cdot 5^2} R^2 \text{ang. sen } \frac{y}{R} \right]_{(1-2\varphi)R}^R = 2 \left[\left(\frac{1}{4} y^2 - \right. \right. \\
 &\left. \left. - \frac{2}{3} \frac{c^3}{12 \cdot 5} y + \frac{3}{8} R^2 - \frac{1}{2} \left(R^2 - \frac{c^6}{12^2 \cdot 5^2} \right) \right) \right. \\
 &\left. y - \left(\frac{4}{3} - 2 \right) \frac{c^3}{12 \cdot 5} R^2 \sqrt{R^2 - y^2} - \left(\frac{3}{8} R^2 - \frac{1}{2} \right. \right. \\
 &\left. \left. \left(R^2 - \frac{c^6}{12^2 \cdot 5^2} \right) - \frac{c^6}{12^2 \cdot 5^2} \right) R^2 \text{ang. sen } \frac{y}{R} \right]_{(1-2\varphi)R}^R = \\
 &= 2 \left[\left(\left(\frac{1}{4} y^2 - \frac{2}{3} \frac{c^3}{12 \cdot 5} y - \frac{1}{8} R^2 + \frac{1}{2} \frac{c^6}{12^2 \cdot 5^2} \right) y + \right. \right. \\
 &\left. \left. + \frac{2}{3} \frac{c^3}{12 \cdot 5} R^2 \sqrt{R^2 - y^2} + \left(\frac{1}{8} R^2 + \frac{1}{2} \frac{c^6}{12^2 \cdot 5^2} \right) \right. \right. \\
 &\left. \left. R^2 \text{ang. sen } \frac{y}{R} \right]_{(1-2\varphi)R}^R = 2 \left[\left(\left(\frac{1}{4} y^2 - \frac{2}{3} \frac{c^3}{12 \cdot 5} \right. \right. \right. \\
 &\left. \left. y - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4} R^2 - \frac{c^6}{12^2 \cdot 5^2} \right) \right) y + \frac{2}{3} \frac{c^3}{12 \cdot 5} R^2 \right. \\
 &\left. \sqrt{R^2 - y^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4} R^2 + \frac{c^6}{12^2 \cdot 5^2} \right) R^2 \right. \\
 &\left. \text{ang. sen } \frac{y}{R} \right]_{(1-2\varphi)R}^R = 2 \left[\frac{1}{2} \left(\frac{1}{4} R^2 + \frac{c^6}{12^2 \cdot 5^2} \right) \frac{\pi}{2} - \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &- \left(\left(\frac{1}{4} (1-2\varphi)^2 R^2 - \frac{2}{3} (1-2\varphi) R \frac{c^3}{12 \cdot 5} - \right. \right. \\
 &\left. \left. - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4} R^2 - \frac{c^6}{12^2 \cdot 5^2} \right) \right) (1-2\varphi) + \frac{2}{3} \frac{c^3}{12 \cdot 5} R \right) \\
 &\left. 2 \sqrt{\varphi(1-\varphi)} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4} R^2 + \frac{c^6}{12^2 \cdot 5^2} \right) \right. \\
 &\left. \text{ang. sen } (1-2\varphi) \right] R^2 = 2 \left[\frac{1}{2} \left(\frac{1}{4} R^2 + \frac{c^6}{12^2 \cdot 5^2} \right) \right. \\
 &\left. \text{ang. cos } (1-2\varphi) - \left(\left(\frac{1}{4} (1-2\varphi)^2 R^2 - \frac{2}{3} (1-2\varphi) \right. \right. \right. \\
 &\left. \left. R \frac{c^3}{12 \cdot 5} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4} R^2 - \frac{c^6}{12^2 \cdot 5^2} \right) \right) (1-2\varphi) + \right. \\
 &\left. \left. + \frac{2}{3} \frac{c^3}{12 \cdot 5} R \right) 2 \sqrt{\varphi(1-\varphi)} \right] R^2. \\
 I_f &= s \left(\frac{c^3}{12 \cdot 5} - (1-2\varphi) R \right)^2 = \frac{c^6}{12^2 \cdot 5^2} - \\
 &- 2(1-2\varphi) R \frac{c^3}{12} + (1-2\varphi)^2 R^2 \cdot 5. \\
 I &= I_f + I_g = 2 \left[\frac{1}{2} \left(\frac{1}{4} R^2 + \frac{c^6}{12^2 \cdot 5^2} \right) \right. \\
 &\left. \text{ang. cos } (1-2\varphi) - \left(\left(\frac{1}{4} (1-2\varphi)^2 R^2 - \frac{2}{3} (1-2\varphi) R \right. \right. \right. \\
 &\left. \left. \frac{c^3}{12 \cdot 5} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4} R^2 - \frac{c^6}{12^2 \cdot 5^2} \right) \right) (1-2\varphi) + \frac{2}{3} \right. \\
 &\left. \left. R \frac{c^3}{12 \cdot 5} \right) 2 \sqrt{\varphi(1-\varphi)} \right] R^2 + \frac{c^6}{12^2 \cdot 5^2} - \\
 &- 2(1-2\varphi) R \frac{c^3}{12} + (1-2\varphi)^2 R^2 \cdot 5 = \left(\frac{1}{4} + (1-2\varphi)^2 \right) \\
 &\text{ang. cos } (1-2\varphi) \cdot R^4 - 3(1-2\varphi)^3 \sqrt{\varphi(1-\varphi)} R^4 + \\
 &+ \frac{1}{2} (1-2\varphi) \sqrt{\varphi(1-\varphi)} \cdot R^4 + \frac{c^6}{12^2 \cdot 5^2} \\
 &\left(\text{ang. cos } (1-2\varphi) \text{ang. cos } (1-2\varphi) - 2(1-2\varphi) \right. \\
 &\left. \sqrt{\varphi(1-\varphi)} - 2(1-2\varphi) \sqrt{\varphi(1-\varphi)} \right) R^2 + \\
 &+ \frac{c^3}{12 \cdot 5} \left(\frac{8}{3} (1-2\varphi)^2 R^3 - \frac{8}{3} \right. \\
 &\left. \sqrt{\varphi(1-\varphi)} R^3 - 2(1-2\varphi) \text{ang. cos } (1-2\varphi) - \right. \\
 &\left. - 2(1-2\varphi) \sqrt{\varphi(1-\varphi)} \right) R^3 = \left(\frac{1}{4} + (1-2\varphi)^2 \right) \\
 &\text{ang. cos } (1-2\varphi) R^4 + \left(\frac{1}{2} - 3(1-2\varphi)^2 \right) (1-2\varphi) \\
 &\sqrt{\varphi(1-\varphi)} R^4 + 2 \frac{c^6}{12^2 \cdot 5^2} + \frac{c^3}{12 \cdot 5} \left(\frac{8}{3} (-1 + \right. \\
 &+ (1-2\varphi)^2) \sqrt{\varphi(1-\varphi)} \cdot R^3 - 2 \cdot 5 \cdot (1-2\varphi) R) = \\
 &= \frac{1}{4} + (1-2\varphi)^2 \text{ang. cos } (1-2\varphi) + \left(\frac{1}{2} - \right. \\
 &- 3(1-2\varphi)^2) (1-2\varphi) \sqrt{\varphi(1-\varphi)} + \frac{c^3}{12 \cdot 5} \left(\frac{c^3}{6} - \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{8}{3} (1 - (1 - 2\varphi)^2) \sqrt{\varphi(1-\varphi)} \cdot R^3 - 2.5 \cdot (1 - 2\varphi) R = \\
& = \left(\frac{1}{4} + (1 - 2\varphi)^2 \right) \text{ang. cos } (1 - 2\varphi) + \left(\frac{1}{2} - \right. \\
& \left. - 3 (1 - 2\varphi)^2 \right) (1 - 2\varphi) \sqrt{\varphi(1-\varphi)} - \frac{c^3}{12 \cdot 5} \\
& 2.5 \cdot (1 - 2\varphi) R = \left(\frac{1}{4} + (1 - 2\varphi)^2 \right) \text{ang. cos } (1 - 2\varphi) + \\
& + \left(\frac{1}{2} - 3 (1 - 2\varphi)^2 \right) (1 - 2\varphi) \sqrt{\varphi(1-\varphi)} - \\
& - \frac{16}{6} (1 - (1 - 2\varphi)^2) (1 - 2\varphi) \sqrt{\varphi(1-\varphi)} = \\
& = \left[\left(\frac{1}{4} + (1 - 2\varphi)^2 \right) \text{ang. cos } (1 - 2\varphi) - \frac{1}{3} \left(\frac{13}{2} + \right. \right. \\
& \left. \left. + (1 - 2\varphi)^2 \right) (1 - 2\varphi) \sqrt{\varphi(1-\varphi)} \right] R^4. \quad [1]
\end{aligned}$$

Con lo expuesto, damos por suficientemente comprobada la expresión del momento de inercia de una sección circular maciza para el material hormigón armado, en lo referente al hormigón solamente.



El momento de inercia de la armadura de sección total, ω , distribuida en barras de igual diámetro e igualmente separadas con sus centros situados en una circunferencia de radio $(R - t)$, siendo β la relación de los coeficientes de elasti-

cidad del acero de la armadura y del hormigón, tiene la conocida expresión:

$$\beta \left(\frac{1}{2} (R - t)^2 + (R - f)^2 \right) \omega.$$

Poniendo t , f y ω en función del radio:

$$\frac{t}{2R} = \varpi; \quad \frac{f}{2R} = \varphi; \quad \frac{\omega}{\pi R^2} = q,$$

se tiene, para el momento de inercia de la armadura, la siguiente expresión:

$$\beta \left(\frac{1}{2} (1 - 2\varpi)^2 + (1 - 2\varphi)^2 \right) q \pi R^4 \quad [2]$$

Sumando las expresiones [1] y [2], obtendremos la expresión del momento total de inercia de la sección circular maciza para el material hormigón armado:

$$\begin{aligned}
I = & \left[\left(\frac{1}{4} + (1 - 2\varphi)^2 \right) \text{ang. cos } (1 - 2\varphi) - \right. \\
& - \frac{1}{3} \left(\frac{13}{2} + (1 - 2\varphi)^2 \right) (1 - 2\varphi) \sqrt{\varphi(1-\varphi)} + \\
& \left. + \left(\frac{1}{2} (1 - 2\varpi)^2 + (1 - 2\varphi)^2 \right) \beta q \pi \right] R^4. \quad [3]
\end{aligned}$$

Partiendo de la expresión [3], que ya parece estar suficientemente comprobada, es fácil obtener la del momento de inercia de la sección circular hueca para el material hormigón armado.

Siguiendo los cuatro procedimientos por los que se ha obtenido el momento de inercia, se obtiene el mismo momento estático de la sección circular maciza para el mismo material, lo que podría ser objeto de otro artículo.

Fácil es comprobar que tiene la siguiente expresión:

$$\begin{aligned}
m = & \left[\left(\frac{8}{3} \varphi(1-\varphi) + (1 - 2\varphi)^2 \right) 2 \sqrt{\varphi(1-\varphi)} - (1 - 2\varphi) \right. \\
& \left. \text{ang. cos } (1 - 2\varphi) + \beta q \pi \right] R^3
\end{aligned}$$

o esta otra, puesto que:

$$\begin{aligned}
& \frac{8}{3} \varphi(1-\varphi) + (1 - 2\varphi)^2 = \frac{1}{3} (2 + (1 - 2\varphi)^2) \\
m = & \left[\frac{2}{3} (2 + (1 - 2\varphi)^2) \sqrt{\varphi(1-\varphi)} - (1 - 2\varphi) \right. \\
& \left. \text{ang. cos } (1 - 2\varphi) + \beta q \pi \right] R^3
\end{aligned}$$