

MOMENTO DE INERCIA DE UNA SECCIÓN CIRCULAR MACIZA PARA EL MATERIAL HORMIGÓN ARMADO

POR JUAN J. GÓMEZ CORDOBÉS, INGENIERO DE CAMINOS

Cuatro años han transcurrido desde el comienzo de la fratricida, absurda y caótica última guerra pasada en nuestra Patria querida. Después de pasar los dieciocho primeros meses en el frente de Teruel, seguidos de quince meses de prisión en las cárceles rojas de Valencia y de otros quince meses necesarios para reparar una naturaleza sumamente quebrantada y todavía hoy bastante depauperada, creo un deber ineludible expresar mi gratitud a los compañeros de profesión, cuya benéfica protección bien pronto penetró anónimamente en las sucesivas prisiones de mi cautiverio. Y ya que mi situación ha quedado completamente ruinoso para poder corresponder a vuestro eficaz auxilio, con obsequios que salden mi cuenta pendiente, ha sido y es mi propósito corresponderos de alguna manera, aunque sea muy modestamente.

Hace unos cuarenta y cuatro años, en el colegio de Teruel, donde aprendí las primeras letras, uno de los compañeros, de familia de modestos agricultores, se presentó un día en la Escuela con dos gruesas patatas, las mayores que encontró en su casa, y se las regaló al Maestro Director, el que las aceptó, agradecidísimo, como el más estimable obsequio de los muchos que recibía anualmente de sus discípulos el día de su fiesta onomástica. Pues bien; este modestísimo compañero vuestro poco tiene disponible actualmente para obsequiaros; pero como el parvulillo del colegio de Teruel a su querido Maestro, ofrezco a los compañeros difuntos (q. e. p. d.) mis pobres oraciones cotidianas, y a los vivientes, algunos de mis elementales frutos profesionales, que expondré en algunos números de esta nuestra REVISTA.

* * *

Suele decirse que por todas partes o por todos los caminos se va a Roma. Veamos cómo por cuatro procedimientos diferentes, de los muchos que se pueden seguir, se obtiene la misma expresión del momento de inercia de la sección circular maciza

de hormigón armado, en lo referente al hormigón solamente, cuya expresión analítica es más compleja que la correspondiente a la armadura metálica.

Consideremos en coordenadas cartesianas rectangulares una circunferencia de radio R referida a su centro:

$$x^2 + y^2 = R^2.$$

Designamos por f la profundidad de la fibra neutra, y por φ , su relación al diámetro, de modo que $\frac{f}{2 \cdot R} = \varphi$.

Primer procedimiento. — Por paralelas al eje de las ordenadas, descompongamos la superficie del círculo en zonas elementales de altura constante dx . El momento de inercia elemental de una cualquiera de estas zonas está dado por la expresión:

$$dI = \frac{1}{12} [y - (1 - 2\varphi)R]^3 \cdot dx + \frac{1}{4} [y - (1 - 2\varphi)R]^3 \cdot dx = \frac{1}{3} [y - (1 - 2\varphi)R]^3 dx$$

$$\frac{y dy}{\sqrt{R^2 - y^2}} = \frac{1}{3} [\sqrt{R^2 - x^2} - (1 - 2\varphi)R]^3 dx$$

Para cada valor de la ordenada existen dos zonas elementales idénticas, por lo que, al integrar primeramente con relación a y , duplicaremos la diferencial del momento de inercia y limitaremos la integración a un solo cuadrante, con los límites:

$$y_1 = R - f = (1 - 2\varphi)R \quad y_2 = R.$$

Las diferenciales dx dy son de signos contrarios:

$$I = \frac{2}{3} \int_{y_1}^{y_2} [y - (1 - 2\varphi)R]^3 \frac{y dy}{\sqrt{R^2 - y^2}} =$$

$$= \frac{2}{3} \int_{y_1}^{y_2} [y^3 - 3(1 - 2\varphi)Ry^2 + 3(1 - 2\varphi)^2 R^2 y - (1 - 2\varphi)^3 R^3] \frac{y dy}{\sqrt{R^2 - y^2}}$$

$$\begin{aligned}
\int \frac{y^4 dy}{\sqrt{R^2 - y^2}} &= -\frac{1}{4} \left[y^3 \sqrt{R^2 - y^2} + \frac{3}{2} R^2 \left(y \sqrt{R^2 - y^2} - R^2 \operatorname{ang. sen} \frac{y}{R} \right) \right] + C_4 \\
\int \frac{y^3 dy}{\sqrt{R^2 - y^2}} &= -\frac{1}{3} \sqrt{R^2 - y^2} (y^2 + 2 R^2) + C_3 \\
\int \frac{y^2 dy}{\sqrt{R^2 - y^2}} &= -\frac{1}{2} \left(y \sqrt{R^2 - y^2} - R^2 \operatorname{ang. sen} \frac{y}{R} \right) + C_2 \\
\int \frac{y dy}{\sqrt{R^2 - y^2}} &= -\sqrt{R^2 - y^2} + C_1 \\
I &= \frac{2}{3} \left[-\frac{1}{4} \left(y^3 \sqrt{R^2 - y^2} + \frac{3}{2} R^2 \left(y \sqrt{R^2 - y^2} - R^2 \operatorname{ang. sen} \frac{y}{R} \right) \right) + \frac{3}{3} (1-2\varphi) R (y^2 + 2 R^2) \sqrt{R^2 - y^2} - \right. \\
&\quad - \frac{3}{2} (1-2\varphi)^2 R^2 \left(y \sqrt{R^2 - y^2} - R^2 \operatorname{ang. sen} \frac{y}{R} \right) + \\
&\quad \left. + (1-2\varphi)^3 R^3 \sqrt{R^2 - y^2} \right]_{(1-2\varphi)R}^R = \frac{2}{3} \left[\left(-\frac{1}{4} y^3 + \right. \right. \\
&\quad \left. + (1-2\varphi) R \cdot y^2 - \left(\frac{3}{8} + \frac{3}{2} (1-2\varphi)^2 \right) R^2 y + \left(2 + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + (1-2\varphi)^2 (1-2\varphi) R^3 \right) \sqrt{R^2 - y^2} + \left(\frac{3}{8} + \frac{3}{2} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. (1-2\varphi)^2 \right) \operatorname{ang. sen} \frac{y}{R} \right]_{(1-2\varphi)R}^R = \frac{2}{3} \left[\frac{3}{2} \left(\frac{1}{4} + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + (1-2\varphi)^2 \right) \frac{\pi}{2} - \frac{1}{4} \left(\frac{13}{2} + (1-2\varphi)^2 \right) (1-2\varphi) \cdot \right. \\
&\quad \left. \cdot 2 \sqrt{\varphi(1-\varphi)} - \frac{3}{2} \left(\frac{1}{4} + (1-2\varphi)^2 \right) \operatorname{ang. sen} (1-2\varphi) \right] \cdot \\
&\quad \cdot R^4 = \frac{2}{3} \left[\frac{3}{2} \left(\frac{1}{4} + (1-2\varphi)^2 \right) \operatorname{ang. cos} (1-2\varphi) - \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{4} \left(\frac{13}{2} + (1-2\varphi)^2 \right) (1-2\varphi)^2 \cdot 2 \sqrt{\varphi(1-\varphi)} \right] \cdot \\
&\quad \cdot R^4 = \left[\left(\frac{1}{4} + (1-2\varphi)^2 \right) \operatorname{ang. cos} (1-2\varphi) - \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{3} \left(\frac{13}{2} + (1-2\varphi)^2 \right) (1-2\varphi) \sqrt{\varphi(1-\varphi)} \right] \cdot R^4.
\end{aligned}$$

Esta es la expresión simplificada del momento de inercia. Dentro de este primer procedimiento, como comprobación, vamos a obtener la misma expresión integrando respecto a la variable x .

Para cada par de valores simétricos de x ó iguales y de signos contrarios existen dos áreas elementales idénticas, por lo que duplicamos el momento elemental y limitamos la integración a un solo cuadrante con los límites:

$$\begin{aligned}
x_1 &= 0 \quad x_2 = \sqrt{R^2 - (R-f)^2} = \sqrt{2 R f - f^2} = \\
&= 2 R \sqrt{\varphi(1-\varphi)} \\
I &= \frac{2}{3} \int_{x_1}^{x_2} (\sqrt{R^2 - x^2} - (1-2\varphi) R)^3 \cdot dx \\
(\sqrt{R^2 - x^2} - (1-2\varphi) R)^3 &= (R^2 - x^2) \sqrt{R^2 - x^2} - \\
&- 3 (1-2\varphi) R (R^2 - x^2) + 3 (1-2\varphi)^2 R^2 \sqrt{R^2 - x^2} - \\
&- (1-2\varphi)^3 R^3 \\
\int \sqrt{R^2 - x^2} \cdot dx &= \int \frac{R^2 - x^2}{\sqrt{R^2 - x^2}} dx = R^2 \\
\int \frac{dx}{\sqrt{R^2 - x^2}} - \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{R^2 - x^2}} &= R^2 \cdot \operatorname{ang. sen} \frac{x}{R} + \\
&+ \frac{1}{2} \left(x \sqrt{R^2 - x^2} - R^2 \cdot \operatorname{ang. sen} \frac{x}{R} \right) + C' = \\
&= \frac{1}{2} \left(x \sqrt{R^2 - x^2} + R^2 \operatorname{ang. sen} \frac{x}{R} \right) + C' \\
\int \frac{x^2 (R^2 - x^2)}{\sqrt{R^2 - x^2}} dx &= R^2 \int \frac{x^2 \cdot dx}{\sqrt{R^2 - x^2}} - \\
&- \int \frac{x^4 dx}{\sqrt{R^2 - x^2}} = -\frac{R^2}{2} \left(x \sqrt{R^2 - x^2} - \right. \\
&- R^2 \operatorname{ang. sen} \frac{x}{R} \left. \right) + \frac{1}{4} \left[x^3 \sqrt{R^2 - x^2} + \right. \\
&+ \frac{3}{2} R^2 \left(x \sqrt{R^2 - x^2} - R^2 \operatorname{ang. sen} \frac{x}{R} \right) \left. \right] + C'' \\
\int (R^2 - x^2) \sqrt{R^2 - x^2} \cdot dx &= R^2 \int \sqrt{R^2 - x^2} \cdot dx - \\
&- \int \frac{x^2 (R^2 - x^2)}{\sqrt{R^2 - x^2}} dx + C''' \\
I &= \frac{2}{3} \left[\frac{1}{8} \left((5 R^2 - 2 x^2) x \sqrt{R^2 - x^2} + \right. \right. \\
&+ 3 R^4 \operatorname{ang. sen} \frac{x}{R} \left. \right) - 3 (1-2\varphi) R \left(R^2 - \frac{1}{3} x^2 \right) x + \\
&+ \frac{3}{2} (1-2\varphi)^2 R^2 \left(x \sqrt{R^2 - x^2} + R^2 \operatorname{ang. sen} \frac{x}{R} \right) - \\
&- (1-2\varphi)^3 R^3 \cdot x \left. \right]_{x_1}^{x_2} = \frac{2}{3} \left[\left(\frac{1}{8} (5 R^2 - 2 x^2) + \right. \right. \\
&+ \frac{3}{2} (1-2\varphi)^2 R^2 \left. \right) x \sqrt{R^2 - x^2} - (1-2\varphi) [3 R^3 + \\
&+ (1-2\varphi)^2 R^3 - R \cdot x^2] x + \left(\frac{3}{8} + \frac{3}{2} (1-2\varphi)^2 \right) \\
&R^4 \operatorname{ang. sen} \frac{x}{R} \left. \right]_{x_1}^{x_2} = \frac{2}{3} \left[\left(\frac{1}{8} (5 R^2 - 2 x^2) + \right. \right. \\
&+ 12 (1-2\varphi)^2 R^2 \left. \right) \sqrt{R^2 - x^2} - (1-2\varphi) (3 R^3 + \\
&+ (1-2\varphi)^2 R^3 - R \cdot x^2) x + \frac{3}{2} \left(\frac{1}{4} + (1-2\varphi)^2 \right) \\
&R^4 \operatorname{ang. sen} \frac{x}{R} \left. \right]_0^R \sqrt{\varphi(1-\varphi)} = \frac{4}{3} \left[\left(\frac{1}{8} (5 - 8\varphi) (1-\varphi) + \right. \right. \\
&+ 12 (1-2\varphi)^2 \cdot \sqrt{1-4\varphi(1-\varphi)} - (1-2\varphi) (3 + \\
&+ (1-2\varphi)^2 - 4\varphi(1-\varphi) \sqrt{\varphi(1-\varphi)} + \frac{3}{4} \left(\frac{1}{4} + \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + (1 - 2\varphi)^2 \text{ ang. sen } 2\sqrt{\varphi(1-\varphi)} \Big] \cdot R^4 = \frac{4}{3} \left[\left(\frac{1}{8} (5 - 2 \right. \right. \\
& \cdot (1 - (1 - 2\varphi)^2 + 12(1 - 2\varphi)^2) (1 - 2\varphi) - (1 - 2\varphi) \\
& (3 + (1 - 2\varphi)^2 - (1 - (1 - 2\varphi)^2) \sqrt{\varphi(1-\varphi)} + \frac{3}{4} \left(\frac{1}{4} + \right. \\
& + (1 - 2\varphi)^2 \text{ ang. cos } (1 - 2\varphi) \Big] \cdot R^4 = \frac{4}{3} \left[\left(\frac{1}{8} (3 + \right. \right. \\
& + 14(1 - 2\varphi)^2) (1 - 2\varphi) - [2 + 2(1 - 2\varphi)^2 (1 - 2\varphi)] \\
& \sqrt{\varphi(1-\varphi)} + \frac{3}{4} \left(\frac{1}{4} + (1 - 2\varphi)^2 \right) \text{ ang. cos } (1 - 2\varphi) \Big] \\
R^4 &= \frac{4}{3} \left[\left(\frac{3}{8} - \frac{16}{8} + \left(\frac{14}{8} - \frac{16}{8} \right) (1 - 2\varphi)^2 \right) (1 - 2\varphi) \right. \\
& \sqrt{\varphi(1-\varphi)} + \frac{3}{4} \left(\frac{1}{4} + (1 - 2\varphi)^2 \right) \text{ ang. cos } (1 - 2\varphi) \Big] \\
R^4 &= \left[\left(\frac{1}{4} + (1 - 2\varphi)^2 \right) \text{ ang. cos } (1 - 2\varphi) - \frac{1}{3} \left(\frac{13}{2} + \right. \right. \\
& \left. \left. + (1 - 2\varphi)^2 \right) (1 - 2\varphi) \sqrt{\varphi(1-\varphi)} \right] \cdot R^4.
\end{aligned}$$

Expresión idéntica a la obtenida anteriormente integrando con relación a y dentro del primer procedimiento.

Segundo procedimiento. — Por paralelas al eje de las abscisas, descompongamos el área del círculo en zonas elementales de altura constante dy . El momento elemental de una cualquiera de estas zonas está dado por la expresión siguiente, en la que c representa la cuerda del arco:

$$\begin{aligned}
dI &= \frac{1}{12} \cdot C \cdot dy^3 + C \cdot dy [y - (1 - 2\varphi) R]^2 = \\
&= 2 \cdot \sqrt{R^2 - y^2} [y - (1 - 2\varphi) R]^2 dy = \\
&= 2 \frac{R^2 - y^2}{\sqrt{R^2 - y^2}} [y^2 - 2(1 - 2\varphi) Ry + (1 - 2\varphi)^2 R^2] dy \\
I &= 2 \left[R^2 \int \frac{y^2 dy}{\sqrt{R^2 - y^2}} - \int \frac{y^4 dy}{\sqrt{R^2 - y^2}} - \right. \\
&\quad \left. - 2(1 - 2\varphi) R^3 \int \frac{y dy}{\sqrt{R^2 - y^2}} + 2(1 - 2\varphi) R \right. \\
&\quad \left. \int \frac{y^3 dy}{\sqrt{R^2 - y^2}} + (1 - 2\varphi)^2 R^4 \int \frac{dy}{\sqrt{R^2 - y^2}} - \right. \\
&\quad \left. - (1 - 2\varphi)^2 R^2 \int \frac{y^2 dy}{\sqrt{R^2 - y^2}} \right]_{y_1}^{y_2} = \\
&= 2 \left[- \int \frac{y^4 dy}{\sqrt{R^2 - y^2}} + (1 - 2\varphi) R \int \frac{y^3 dy}{\sqrt{R^2 - y^2}} + \right. \\
&\quad \left. + [1 - (1 - 2\varphi)^2] R^2 \int \frac{y^2 dy}{\sqrt{R^2 - y^2}} - (1 - 2\varphi) R^3 \right. \\
&\quad \left. \int \frac{y dy}{\sqrt{R^2 - y^2}} + (1 - 2\varphi)^2 R^4 \int \frac{dy}{\sqrt{R^2 - y^2}} \right]_{y_1}^{y_2} =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 2 \left[\frac{1}{4} \left(y^3 \sqrt{R^2 - y^2} + \frac{3}{2} R^2 \left(y \sqrt{R^2 - y^2} - \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - R^2 \text{ ang. sen } \frac{y}{R} \right) \right) - \frac{2}{3} (1 - 2\varphi) R (y^2 + \\
&\quad + 2 R^2) \sqrt{R^2 - y^2} - \frac{1}{2} [1 - (1 - 2\varphi)^2] R^2 \\
&\quad \left(y \sqrt{R^2 - y^2} - R^2 \text{ ang. sen } \frac{y}{R} \right) + 2(1 - 2\varphi) \\
&\quad R^3 \sqrt{R^2 - y^2} + (1 - 2\varphi)^2 R^4 \text{ ang. sen } \frac{y}{R} \Big]_{y_1}^{y_2} = \\
&= 2 \left[\left(\frac{1}{4} y^3 - \frac{2}{3} (1 - 2\varphi) R y^2 + \left(\frac{3}{8} - \frac{1}{2} (1 - \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. (1 - 2\varphi)^2) R^2 y - \left(\frac{4}{3} (1 - 2\varphi) - 2(1 - 2\varphi)^2 \right) R^3 \right) \right. \\
&\quad \left. \sqrt{R^2 - y^2} - \left(\frac{3}{8} - \frac{1}{2} (1 - (1 - 2\varphi)^2) - (1 - 2\varphi)^2 \right) \right. \\
&\quad \left. R^4 \text{ ang. sen } \frac{y}{R} \right]_{(1 - 2\varphi) R}^R = 2 \left[\left(\frac{1}{8} + \frac{1}{2} (1 - 2\varphi)^2 \right) \frac{\pi}{2} - \right. \\
&\quad \left. - \left(\frac{1}{4} (1 - 2\varphi)^3 - \frac{2}{3} (1 - 2\varphi)^2 + \left(-\frac{1}{8} + \frac{1}{2} \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. (1 - 2\varphi)^2 \right) (1 - 2\varphi) + \frac{2}{3} (1 - 2\varphi) 2 \sqrt{\varphi(1-\varphi)} - \right. \\
&\quad \left. - \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{2} (1 - 2\varphi)^2 \right) \text{ ang. sen } (1 - 2\varphi) \right] R^4 = \\
&= 2 \left[\frac{1}{2} \left(\frac{1}{4} + (1 - 2\varphi)^2 \right) \left(\frac{\pi}{2} - \text{ang. sen } (1 - 2\varphi) - \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - 2 \left(\frac{13}{24} + \frac{1}{12} (1 - 2\varphi)^2 \right) (1 - 2\varphi) \sqrt{\varphi(1-\varphi)} \right] \cdot R^4 = \\
&= \left[\left(\frac{1}{4} + (1 - 2\varphi)^2 \right) \text{ ang. cos } (1 - 2\varphi) - \frac{1}{3} \left(\frac{13}{2} + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + (1 - 2\varphi)^2 \right) (1 - 2\varphi) \sqrt{\varphi(1-\varphi)} \right] \cdot R^4.
\end{aligned}$$

Como puede verse por los dos procedimientos expuestos, se obtiene la misma expresión del momento de inercia de la sección circular maciza en lo referente al hormigón solamente.

Tercer procedimiento. — Consiste en demostrar la identidad entre la expresión obtenida y la deducida en el *Hormigón Armado*, Peña Boeuf, página 198.

Cuarto procedimiento. — Fue publicado en los números 15, 17, 18 de la REVISTA DE OBRAS PÚBLICAS, correspondientes al año 1931. En este cuarto procedimiento quedó por simplificar la expresión resultante.

En un próximo número de esta REVISTA obtendremos la misma expresión del momento de inercia por los procedimientos indicados tercero y cuarto, con lo que quedará suficientemente comprobada y preparada para el cálculo de unas tablas que faciliten a los proyectistas de obras de hormigón armado el empleo de la sección circular.