

PÓRTICO MÚLTIPLE DISIMÉTRICO SOMETIDO A SOBRECARGA MÓVIL

POR VICENTE ALMODÓVAR, INGENIERO DE CAMINOS

I

Suponemos conocido del lector el método de Cross, interesante procedimiento de cálculo de estructuras, que ha sido descrito repetidamente por nuestro compañero Fernández Casado en la REVISTA DE OBRAS PÚBLICAS y en su libro *Cálculo de Estructuras Reticulares*, en el cual, con demasiada concisión, tal vez, se desarrolla el estudio del citado método, presentándose algunas aplicaciones a diversas estructuras aporticadas.

No obstante, indicaremos, para quienes no lo conozcan o lo hayan olvidado, una breve síntesis del sistema, en el que lo más interesante, sin duda, es la simultaneidad físico-matemática a todo lo largo de su desarrollo. Partiendo de la estructura con nudos absolutamente rígidos, se llega a la estructura real deshaciendo por etapas esta rigidez, permitiendo, primero, los giros, y después, los desplazamientos. La marcha del cálculo, en líneas generales, es la siguiente:

A) Determinación de las características de cada barra:

- a) Factor de transmisión.
- b) Rigidez.

B) Cálculo de los momentos de empotramiento perfecto, correspondientes a cada hipótesis de carga.

C) Distribución de dichos momentos (repartición en cada nudo y transmisión de los que correspondan al extremo opuesto de las barras).

D) Estudio de los desplazamientos que pueden producirse en la estructura (temperatura, asiento de apoyos, viento, disimetría, etc.).

E) Cálculo y distribución de los momentos de empotramiento debidos a desplazamiento sin giro de las barras.

F) Superposición de estos momentos y los obtenidos, según C), estableciendo las ecuaciones de los desplazamientos y deduciendo, en fin, los momentos definitivos.

G) Combinación de las cargas con diversas hipótesis de sobrecarga para obtener los momentos flectores máximos positivos y negativos.

II) Superponiendo a los momentos hiperestáticos los isostáticos, se determina la ley de variación de momentos flectores.

I) Determinación de los esfuerzos cortantes (suma de los hiperestáticos e isostáticos).

K) Cálculo de reacciones y esfuerzos longitudinales en cada barra (si los acortamientos o alargamientos por ellos producidos tuvieran importancia, se repite el proceso señalado en E).

L) Conociendo ya en cada barra los valores máximos de momentos flectores, esfuerzos cortantes y longitudinales, se procede a la comprobación de secciones, y si se trata de estructuras de hormigón armado, a la distribución de armaduras.

Es, por consiguiente, esencial la fijación de las características en las diferentes barras, puesto que el factor de transmisión es el coeficiente por el que deberemos multiplicar los momentos para su transmisión al otro extremo de la pieza, y las rigideces nos servirán para repartir, proporcionalmente a sus valores, los momentos en cada nudo.

Cuando el momento de inercia es constante en cada barra, los coeficientes de transmisión valen $1/2$, y las rigideces $\frac{4EI}{L}$. Si las vigas fuesen de inercia variable, pueden determinarse ambos valores por un proceso de cálculo no muy costoso, basado en los teoremas de Mohr, expresándose las rigideces en función de las de inercia constante mediante un coeficiente de rigidez.

* * *

Apliquemos ahora el procedimiento sucintamente indicado, cuyos detalles se apreciarán mejor en el desarrollo, al pórtico múltiple disimétrico sometido a sobrecarga móvil.

Es interesante hacer notar la enorme dificultad que para resolver el caso de sobrecarga móvil ofre-

cen los sistemas de Müller Breslau, Ritter etc., que no permiten realmente la determinación de las líneas de influencia de momentos flectores en estructura tan complicada como el pórtico de varios tramos, porque resulta de tal complejidad hallar los valores de momentos, etc., para el caso de so-

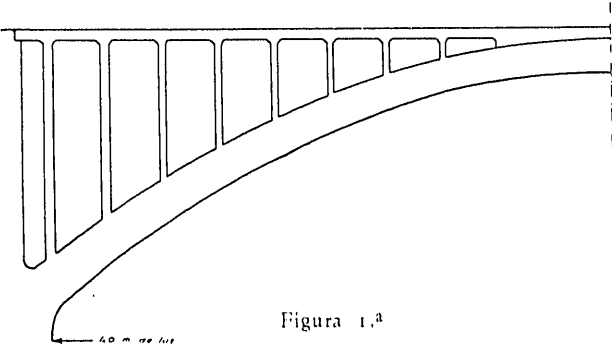


Figura 1.ª

brecarga única, concentrada o repartida, que puede imaginarse lo que costaría llegar a fijar las líneas de influencia para una sobrecarga cualquiera de carretera o ferrocarril, siendo así prácticamente inabordable este problema.

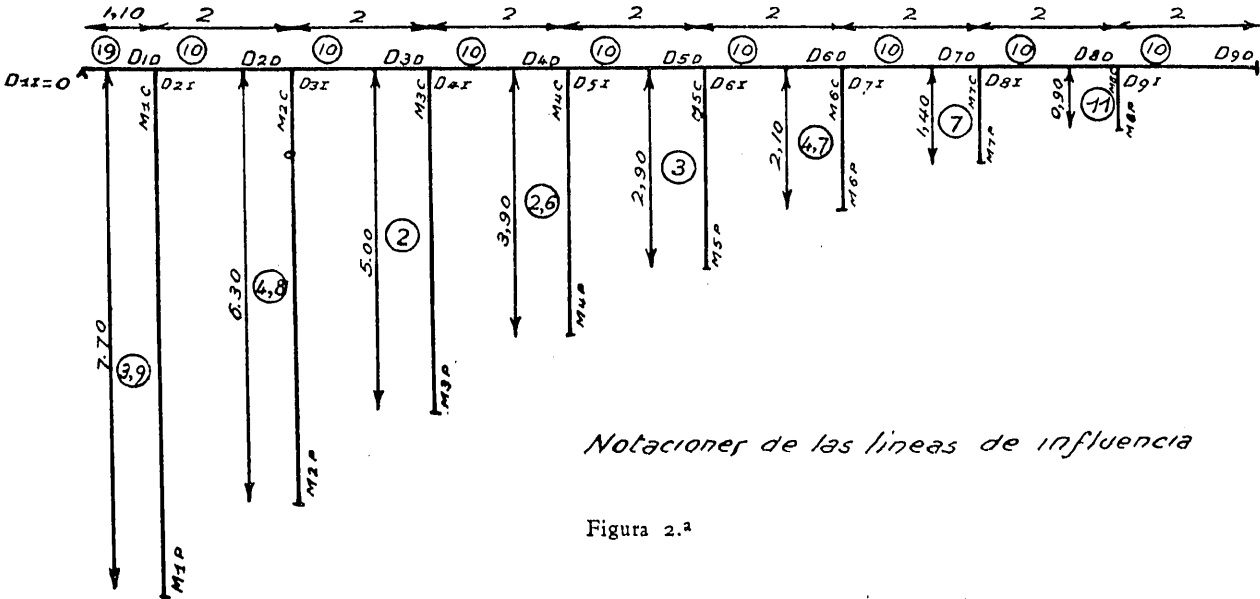
El pórtico de nueve tramos estudiado (fig. 1.ª)

Características.

En la figura 2.ª se expresan las características de las barras constitutivas de la estructura, deducidas como a continuación se indica:

Barra.	Longitud. — m.	Canto. — cm.	M.º inercia.	Rigidez.	Números proporcionales.
Dinteles 2.º					
al 9.º . . .	2,00	23	$I' = 2 I$	$4 EI' : 2,00$	10
Dintel 1.º . . .	1,10	23	I'	$4 EI' : 1,10$	19
Montante 1.º	7,70	26	$I'' = 3 I$	$4 EI'' : 7,70$	3,9
Idem 2.º . . .	6,30	26	I''	$4 EI'' : 6,30$	4,8
Idem 3.º . . .	5,00	18	I	$4 EI : 5,00$	2
Idem 4.º . . .	3,90	18	I	$4 EI : 3,90$	2,6
Idem 5.º . . .	2,90	18	I	$4 EI : 2,90$	3
Idem 6.º . . .	2,10	18	I	$4 EI : 2,10$	4,7
Idem 7.º . . .	1,40	18	I	$4 EI : 1,40$	7
Idem 8.º . . .	0,90	18	I	$4 EI : 0,90$	11

La mayor inercia de los dos primeros montantes es debida a que, por su mayor longitud, resistirían mal al pandeo con el espesor de los demás, como puede fácilmente comprobarse aplicando a todos ellos la fórmula de Euler.



Notaciones de las líneas de influencia

Figura 2.ª

corresponde al tablero y montantes de hormigón armado de un arco para ferrocarril de vía ancha, de 40 metros de luz. A su derecha consideraremos empotramiento perfecto, y al extremo izquierdo presenta un simple apoyo con objeto de permitir la dilatación del tablero.

También se indican en la figura 2.ª las notaciones con que se designan las secciones extremas de las diferentes piezas.

Los coeficientes de transmisión valen $1/2$. Para el primer dintel, los momentos se transmiten al apoyo y vuelven al empotramiento elásticos cambiados

de signo, sufriendo en ambos traslados la reducción de $1/2$, es decir que vuelve $1/4$ del momento.

En el 9.º dintel, los momentos que llegan al extremo derecho quedan absorbidos por el empotramiento, sin transmisión ulterior.

Pares de empotramiento.

Los momentos de empotramiento perfecto para el caso de fuerza aislada resultan de

$$\frac{Pab^2}{L^2} \quad y \quad -\frac{Pa^2b}{L^2}$$

a izquierda y derecha, y cuando se trate de carga uniforme, sobre todo el tramo, de

$$1/12 pL^2 \quad y \quad -1/12 pL^2$$

a izquierda y derecha, respectivamente.

En estas fórmulas, como es sabido, P es el valor en kilogramos de la sobrecarga aislada; p , el valor en kg./m. l. de la uniforme, y a y b , las distancias del punto de aplicación a los extremos izquierdo y derecho, es decir, $a + b = L$, siendo L la luz en metros del correspondiente tramo, resultando los momentos en mkg.

Hemos de indicar el sistema adoptado para fijar los signos de momentos flectores, que difiere del generalmente admitido. Tomamos como negativos los correspondientes al sentido de rotación de las agujas del reloj. De esta manera, es difícil la confusión y sólo hay que cuidar de invertir al final los signos de los extremos izquierdos de las barras, para la representación de la ley de momentos. Por lo que se refiere a los montantes, como lo interesante es el lado donde debe colocarse la armadura de tracción, al invertir de signo los resultados obtenidos en sus pies y dibujar la ley de variación, colocando los valores de los momentos del mismo lado de los negativos, y del contrario para los positivos, es fácil darse cuenta, en una rápida ojeada, del trabajo de cada montante.

Sobrecarga de cálculo.

Operaremos con la correspondiente a pequeñas luces de la Instrucción vigente para ferrocarriles de vía ancha, constituida por tres ejes de 26 toneladas, distanciados entre sí 1,50 metros.

Es preciso adoptar un cierto coeficiente de impacto. En la Instrucción sólo se fija para tramos metálicos, siendo absurdo considerar en nuestro caso igual coeficiente. Mendizábal, según creemos

saber, opina que deben reducirse a la tercera parte, para hormigón armado; teniendo esto en cuenta, así como algunas fórmulas alemanas, se ha fijado en un 50 por 100.

Suponemos que cada semieje actúa sobre la faja de pórtico de 1 m. de ancho, para la cual se lleva a cabo todo el cálculo que sigue.

Cada fuerza aislada, por consiguiente, será de

$$P = 13\,000 \cdot 1,50 = 19\,500 \text{ kg.}$$

Posiciones de la sobrecarga.

Para la determinación de las líneas de influencia del momento flector en las series de secciones D... y M..., es necesario estudiar un buen número de posiciones de la sobrecarga. Nos referiremos, en lo sucesivo, para la fijación de éstas a la de la fuerza central de las tres que corren sobre el pórtico.

Es indudable que lo más práctico sería estudiar sucesivamente los efectos de cada una de las tres fuerzas, superponiéndolas luego con la simple adición de las líneas de influencia de cada una, que sería la misma curva desplazada 1,50 m. a uno y otro lado. Pero para el caso que nos ocupa, hemos creído más oportuno estudiar, para las diversas posiciones, los efectos simultáneos de todos los semiejes, lo que nos permite comprobar en el mismo gráfico los momentos que corresponden a cada rueda.

Es fácil imaginar que las líneas de influencia de m. f. en dinteles presentarán tres puntos singulares, cuyas abscisas se encuentran a 1,50 m. a cada lado del nudo considerado. Esto fija, para cada nudo, las tres posiciones correlativas a estudiar de la sobrecarga.

Asimismo, es conveniente, por lo que afecta a los momentos positivos, en los que tienen gran intervención los isostáticos, considerar las abscisas en que éstos son máximos, ya que posiblemente pueden coincidir con los máximos m. f. positivos (después veremos que no sucede exactamente así). En esta forma, las abscisas centrales de los tramos constituyen, en principio, otra posición de interés de la sobrecarga.

Parece también útil hallar el máximo valor de los pares de empotramiento y determinar así dos posiciones más por tramo, a igual distancia de los nudos extremos.

Como $a = L - b$, tendremos:

$$\frac{Pab^2}{L^2} = \frac{P}{L^2} (L - b) b^2 = \frac{P}{L^2} (Lb^2 - b^3)$$

y su máximo tendrá lugar a la abscisa $b = 2/3 L$, así como a la simétrica $b = 1/3 L$.

Resultan, en total, seis posiciones por tramo, cuyo cálculo nos dará idea de la forma de las curvas. Para completar el estudio, sería también interesante mover el tren de sobrecarga unos centímetros a uno y otro lado de algunas de esas posiciones, como tanteo que nos permita fijar con seguridad las abscisas que den los máximos m. f.

Tres posiciones del tren, para las que todos los momentos son nulos, serán, además de las de entrada y salida sobre la estructura (1,50 m. a cada

ce preferible operar con los mismos valores de los pares en mkg. obtenidos como se ha indicado. Economizamos así dos cálculos (para cada posición) de proporcionalidad de cantidades, y los decimales, por otra parte, complican innecesariamente el trabajo, puesto que en lugar de escribir, por ejemplo, $-0,04$ será indiscutiblemente más cómodo poner -4 , lo que, repetido centenares de veces, evita una considerable pérdida de tiempo.

Pero hay otro procedimiento, al que también alude F. Casado, consistente en repartir en cada nudo el momento 100,00 (nosotros operaremos con

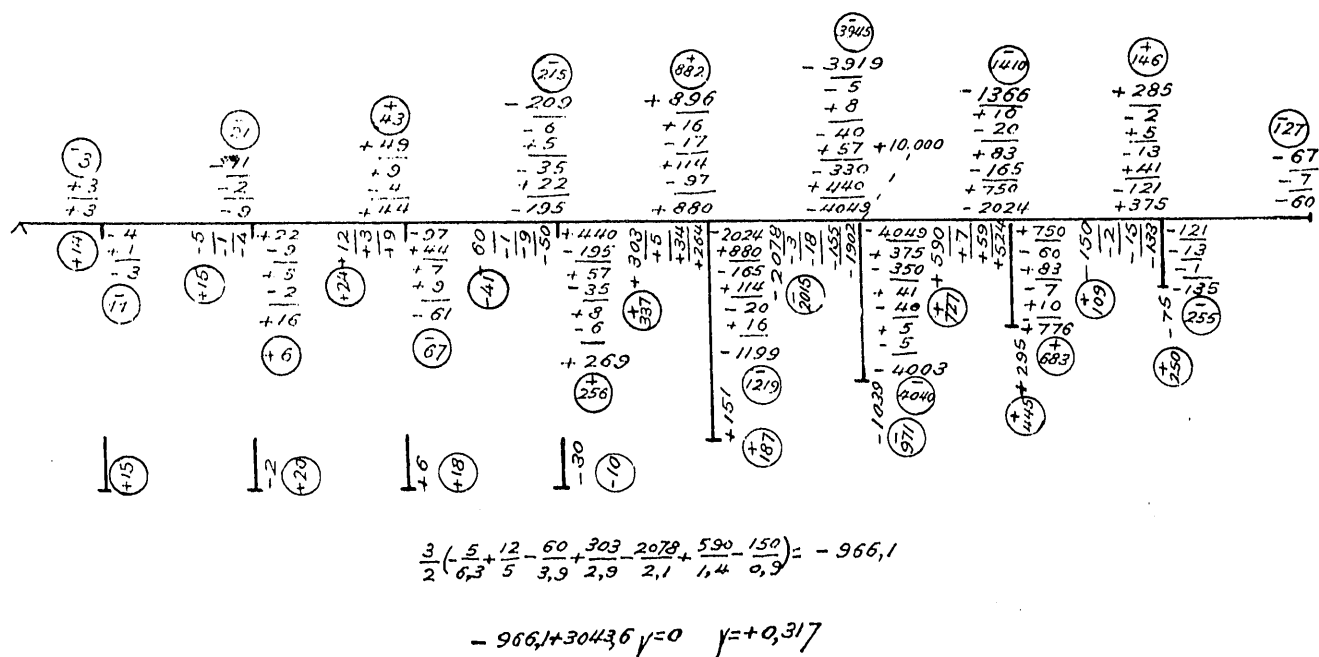


Figura 3.^a

extremo), la que corresponde a la primera rueda sobre el primer nudo, puesto que la longitud del primer tramo es inferior a la distancia entre ejes.

Modo de operar.

Muchas posiciones han de estudiarse, por lo tanto, para hacerse cargo de las variaciones de m. f. en dinteles y montantes. Nos conviene, con tal motivo, investigar cuál de los procedimientos de cálculo nos permitirá efectuar con más rapidez y, a ser posible, en serie, las operaciones.

Fernández Casado proponía fijar en 100,00 uno de los pares, con lo que corresponderán valores proporcionales a los demás, efectuándose luego los repartos y transmisiones de momentos. Nos pare-

el valor 10 000 por la razón expuesta), y después, en cada caso, con la máquina calculadora o la regla de cálculo, si no se precisa — como generalmente acontece — tanta aproximación, hallar los valores que proporcionalmente correspondan a los extremos de todas las barras, debidos a las sucesivas resultantes de momentos en los nudos.

En la figura 3.^a se presenta el ejemplo de distribución del momento $+10\,000$ mkg. en el sexto nudo. Obsérvese que los valores determinados sumando en cada extremo de barra los sucesivos repartos de momentos se han corregido después, habiéndose colocado dentro de un círculo los definitivos que nos han de servir para el cálculo posterior. Esto es debido a la disimetría, como vamos brevemente a explicar.

Si la estructura y la sobrecarga fueran simétricas obtendríamos una distribución de momentos tal, que la suma de esfuerzos transversales en montantes resultaría igual a cero. Siendo lineales las leyes de variación de m . f. en pilares — cortando al tercio de su altura a la respectiva directriz — los esfuerzos transversales en cada montante valen

$$\frac{m + m'}{h} = \frac{13m}{2h}$$

puesto que en esta etapa $m' = 1/2 m$.

los nudos superiores. Resuelto este problema, se determina y con la condición de que al superponer la distribución con la correspondiente a cada hipótesis de sobrecarga, la suma de esfuerzos transversales sea cero.

Los momentos locales han de ser inversamente proporcionales a los cuadrados de las alturas y directamente a las inercias, toda vez que corresponden a la fórmula

$$\mu = \mu' = \frac{6EI}{h^2}.$$

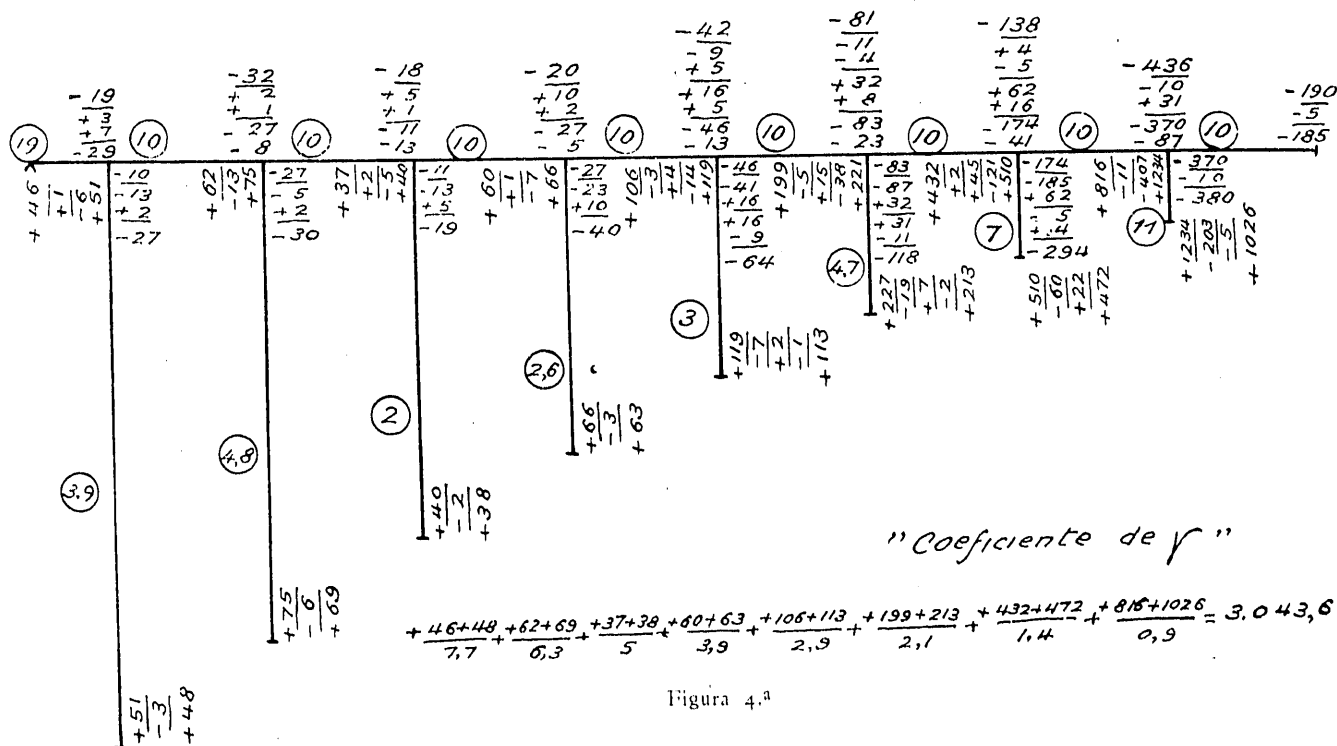


Figura 4.^a

Sumando todos ellos, en caso de disimetría, resulta

$$\frac{3}{2} \sum \frac{m}{h} = 0.$$

Es claro que llamamos m y m' a los valores de momentos en cabezas y pies de pilares, y h , a la altura de éstos.

Como no existen fuerzas horizontales, pues los momentos los suponemos debidos exclusivamente a la sobrecarga de los tres semiejes, no puede haber desequilibrio de esfuerzos transversales. Hemos de anular, por tanto, una fuerza horizontal, para lo que se considera la actuación, en cada montante, de dos momentos locales $+M\gamma...$, que correspondan a un desplazamiento idéntico horizontal en

En el siguiente cuadro se resume la determinación de los citados momentos locales:

Montantes.	Altura. h .	h^2	$1/h^2$	$1/h^2$	Números proporcionales.
1. ^o	7,70	59,29	0,017	0,051 I	51
2. ^o	6,30	39,69	0,025	0,075 I	75
3. ^o	5,00	25,00	0,040	0,040 I	40
4. ^o	3,90	15,21	0,066	0,066 I	66
5. ^o	2,90	8,41	0,119	0,119 I	119
6. ^o	2,10	4,41	0,227	0,227 I	227
7. ^o	1,40	1,96	0,510	0,510 I	510
8. ^o	0,90	0,81	1,234	1,234 I	1.234

En la figura 4.^a se hace la correspondiente distribución de estos momentos.

El coeficiente de γ vale

$$\frac{46 + 48}{7,70} + \frac{62 + 69}{6,30} + \dots = + 3\,043,6$$

Esta distribución es válida para cualquier hipótesis de sobrecarga en la forma

$$\frac{3}{2} \Sigma \frac{m}{h} + 3\,043,6 \gamma = 0,$$

ecuación de la que se deduce el valor del factor de corrección γ .

Los nuevos valores los colocamos (fig. 3.^a) dentro de un circulito, al lado de cada uno de los primitivos.

En el siguiente cuadro se resumen los momentos ya corregidos que resultan de repartir sucesivamente el momento + 10 000 mkg.

REPARTICIÓN DE + 10 000 MKG. EN EL NUDO

1.º	2.º	3.º	4.º	5.º	6.º	7.º	8.º	
0	0	0	0	0	0	0	0	D ₁ I
- 5 252	+ 1 112	- 267	+ 59	- 15	- 3	- 9	- 36	D ₁ D
- 3 302	- 1 423	+ 338	- 81	+ 13	- 11	- 14	- 50	D ₂ I
- 1 436	+ 311	- 71	+ 22	+ 2	+ 14	+ 23	+ 86	M ₁ C
- 1 065	- 4 018	+ 962	- 228	+ 46	- 21	- 14	- 59	D ₂ D
+ 687	- 3 878	- 1 469	+ 338	- 80	+ 6	- 18	- 56	D ₃ I
+ 378	- 2 104	+ 507	- 110	+ 34	+ 15	+ 32	+ 115	M ₂ C
+ 202	- 1 146	- 4 523	+ 1 052	- 242	+ 43	- 18	- 33	D ₃ D
- 165	+ 931	- 4 465	- 1 292	+ 289	- 67	+ 2	- 37	D ₄ I
- 37	+ 215	- 1 012	+ 240	- 47	+ 24	+ 16	+ 70	M ₃ C
- 50	+ 279	- 1 348	- 4 348	+ 989	- 215	+ 29	- 43	D ₄ D
+ 35	- 224	+ 1 042	- 4 376	- 1 287	+ 256	- 71	- 68	D ₅ I
+ 15	- 55	+ 306	- 1 276	+ 298	- 41	+ 42	+ 111	M ₄ C
+ 8	- 72	+ 317	- 1 345	- 4 257	+ 882	- 192	- 51	D ₅ D
- 12	+ 41	- 241	+ 999	- 4 313	- 1 219	+ 195	- 155	D ₆ I
+ 4	+ 31	- 76	+ 346	- 1 430	+ 337	- 3	+ 206	M ₅ C
- 7	+ 4	- 78	+ 314	- 1 402	- 3 945	+ 708	- 272	D ₆ D
- 7	- 28	+ 46	- 227	+ 901	- 4 040	- 1 204	- 35	D ₇ I
+ 14	+ 24	+ 32	- 87	+ 501	- 2 015	+ 496	+ 307	M ₆ C
- 9	- 22	+ 12	- 86	+ 294	- 1 410	- 3 628	+ 319	D ₇ D
- 19	- 39	- 20	+ 8	- 216	+ 683	- 3 809	- 1 569	D ₈ I
+ 28	+ 61	+ 8	+ 78	- 78	+ 727	- 2 563	+ 1 250	M ₇ C
- 29	- 60	- 18	- 32	- 120	+ 146	- 1 568	- 3 820	D ₈ D
- 24	- 53	- 13	- 49	- 19	- 255	+ 447	- 4 036	D ₉ I
+ 53	+ 113	+ 31	+ 81	+ 139	+ 109	+ 1 121	- 2 144	M ₈ C
- 12	- 26	- 7	- 24	- 10	- 127	+ 223	- 2 018	D ₉ D
- 717	+ 159	- 34	+ 13	+ 4	+ 15	+ 24	+ 89	M ₁ P
+ 191	- 1 046	+ 254	- 50	+ 22	+ 20	+ 35	+ 128	M ₂ P
- 17	+ 110	- 505	+ 122	- 21	+ 18	+ 18	+ 71	M ₃ P
+ 9	- 23	+ 154	- 634	+ 153	- 10	+ 38	+ 117	M ₄ P
+ 5	+ 24	- 36	+ 179	- 707	+ 187	+ 30	+ 214	M ₅ P
+ 14	+ 28	+ 19	- 31	+ 264	- 971	+ 305	+ 365	M ₆ P
+ 31	+ 66	+ 14	+ 66	- 6	+ 445	- 1 151	+ 1 102	M ₇ P
+ 67	+ 143	+ 37	+ 108	+ 149	+ 250	+ 875	+ 79	M ₈ P

En la figura 5.^a se indica el doble desarrollo del cálculo para una posición cualquiera de la sobrecarga: primero, por el procedimiento general, y después, por el ya indicado de distribución de mo-

De análoga manera, puede repetirse el cálculo para otra posición, siendo relativamente rápido, por el segundo método, determinar los momentos definitivos.

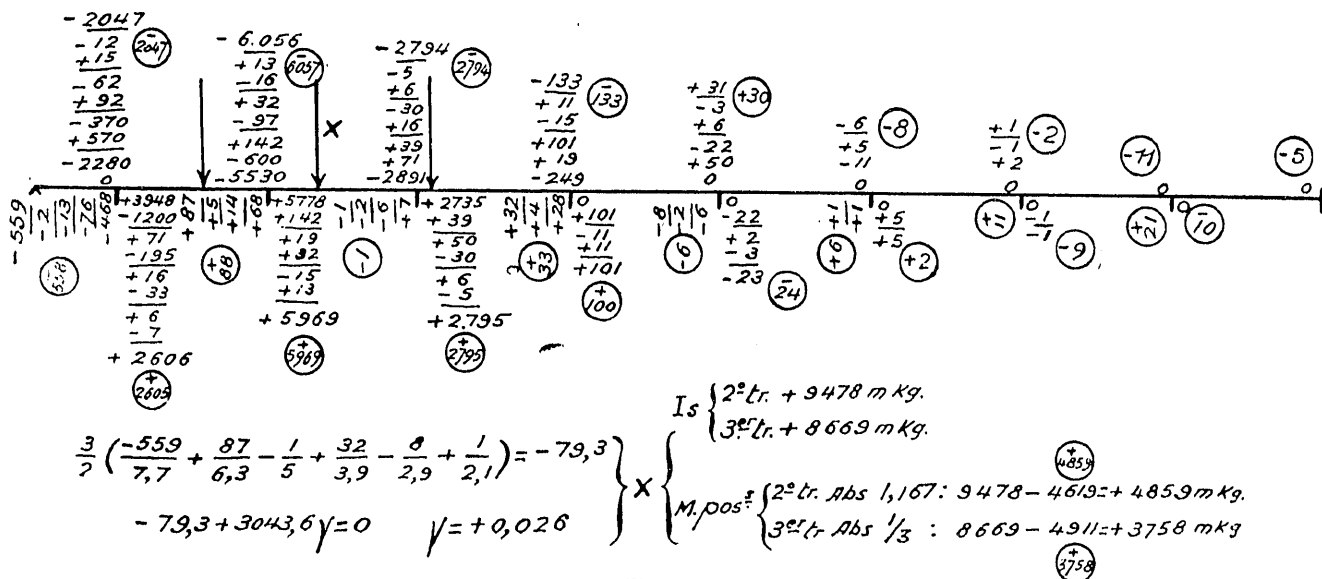


Figura 5.^a A.

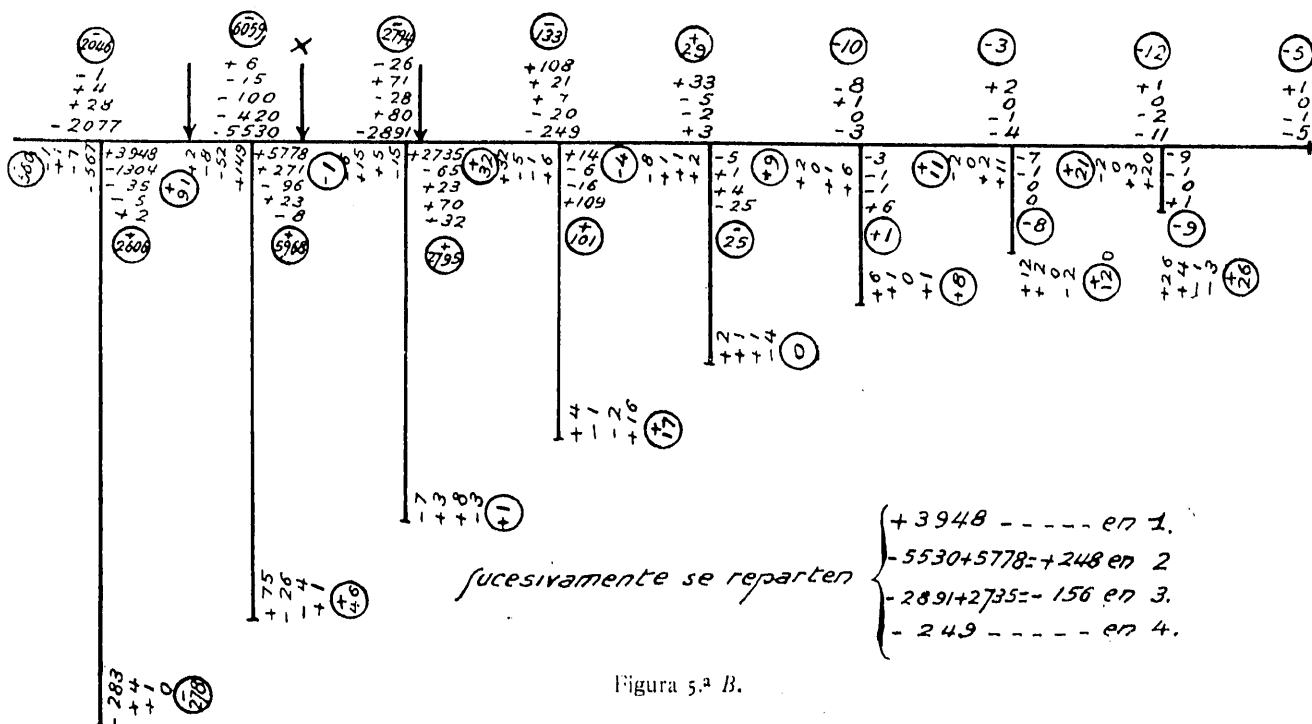


Figura 5.^a B.

mentos proporcionales a los hallados al repartir + 10 000 mkg. en cada nudo. También se dibuja la ley de variación de m. f. en cada barra, colocándose, como se ha dicho, los valores siempre del lado de las armaduras de tracción.

Valores máximos de momentos flectores.

Pueden así dibujarse por puntos las líneas de influencia para extremos de dinteles y cabezas y pies de pilares. Asimismo, para cada posición, determi-

namos el mayor m. f. positivo, coincidente siempre con una de las abscisas de los semiejes. Algunas de estas curvas se incluyen en las figuras 6.^a, 7.^a y 8.^a.

una vez persuadidos de ello, podemos fijar matemáticamente la posición exacta (fig. 9.^a) de la sobrecarga, así como el máximo m. f. producido. Como solo se precisa repartir el momento del octa-

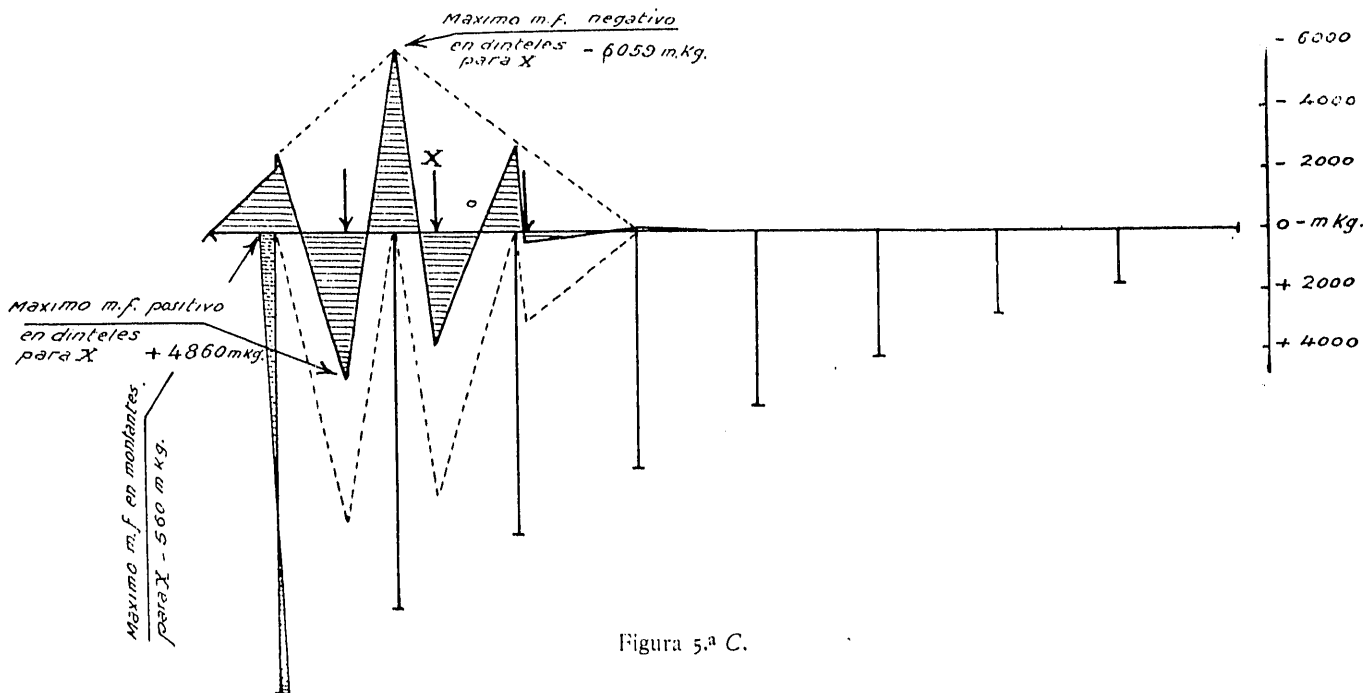


Figura 5.^a C.

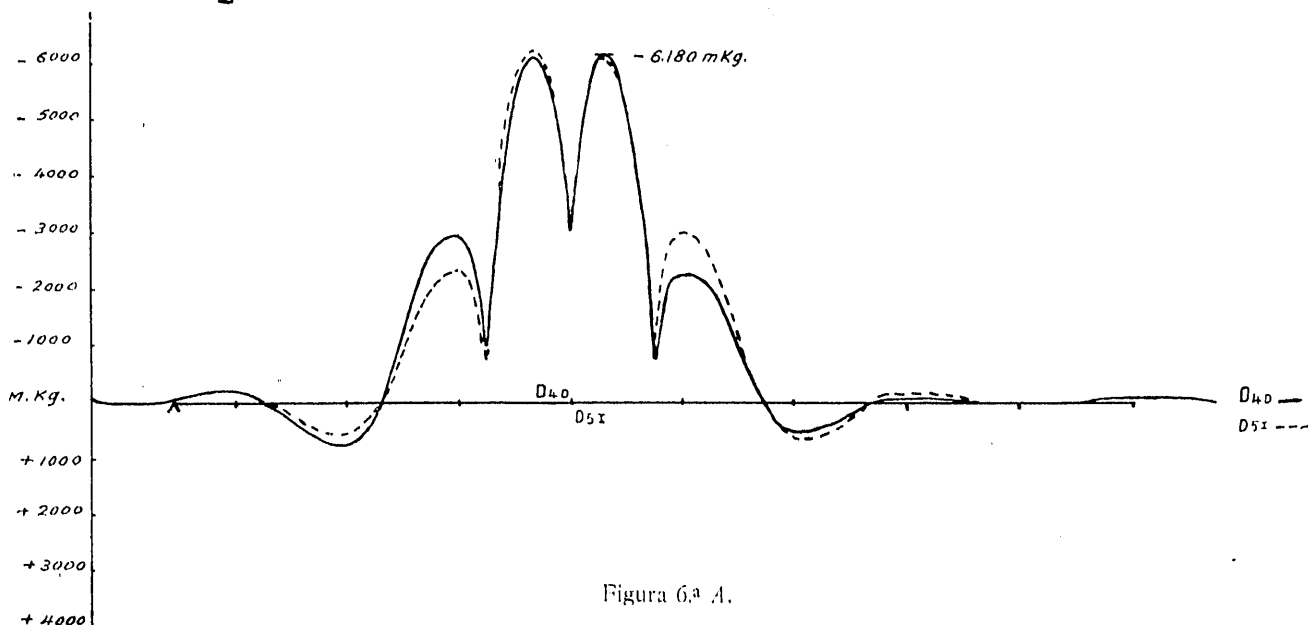


Figura 6.^a A.

Observemos que el máximo maximorum de m. f. corresponde a la actuación de la tercera fuerza sola, situada sobre el tramo noveno, en cuyo caso el máximo momento tiene lugar en el extremo empotrado de dicho tramo. No era difícil suponerlo, después de estudiar algunas posiciones de la sobrecarga, pero no juzgamos prudente extendernos más para su justificación. Lo que sí indicaremos es que,

vo nudo, se plantea para el momento negativo la siguiente ecuación

$$M = -\frac{P}{L^2} (a^2b + 0,2018 ab^2)$$

en la cual $-0,2018$ es el valor deducido para D_0D del cuadro anterior, para el citado nudo y por unidad.

Siendo a la abscisa de actuación del tercer semi-

cje, que pretendemos determinar con la condición de que sea M máximo, y como

$$b = 2 - a$$

resulta

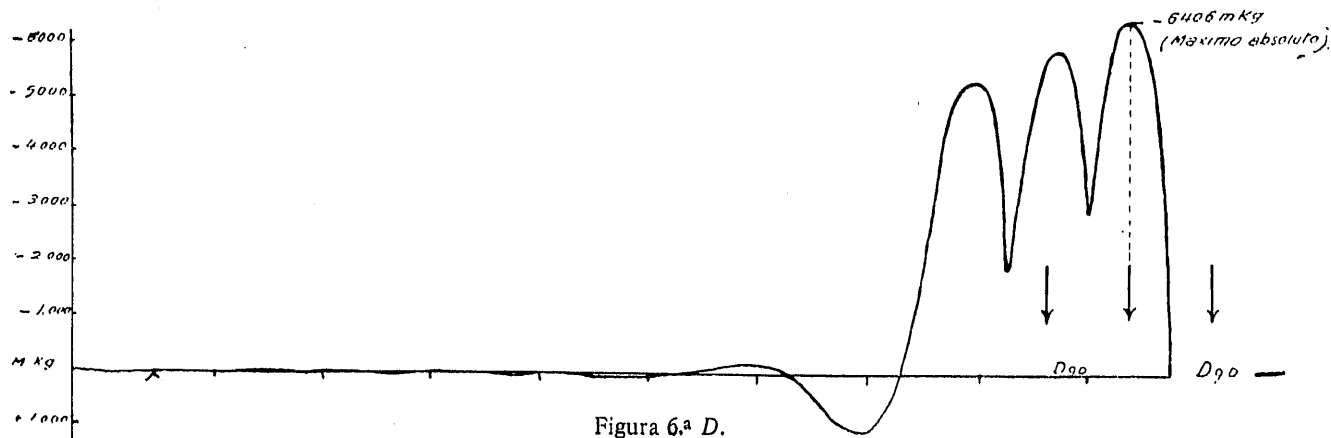
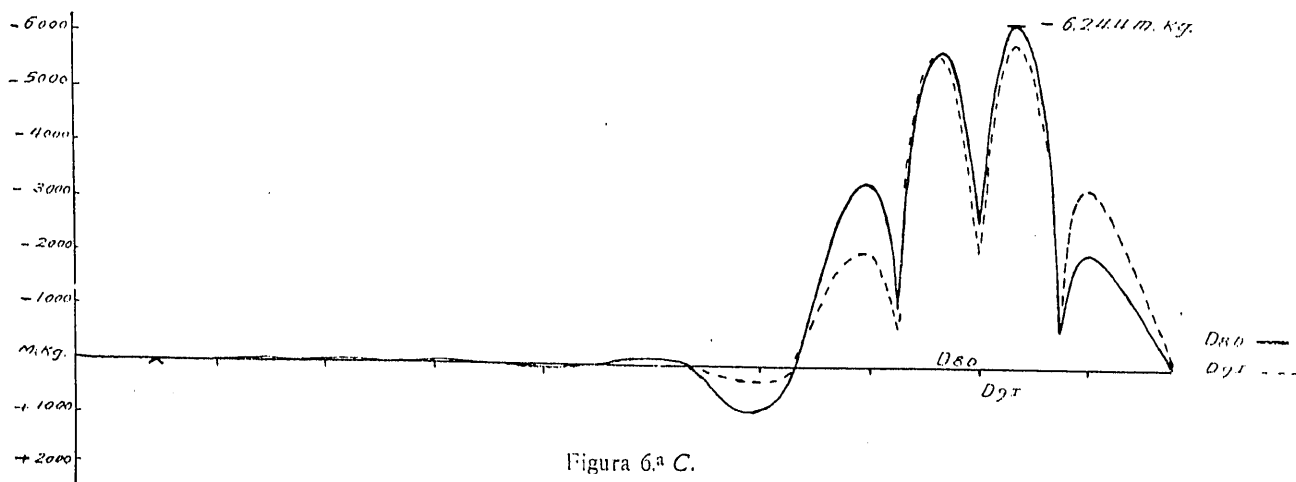
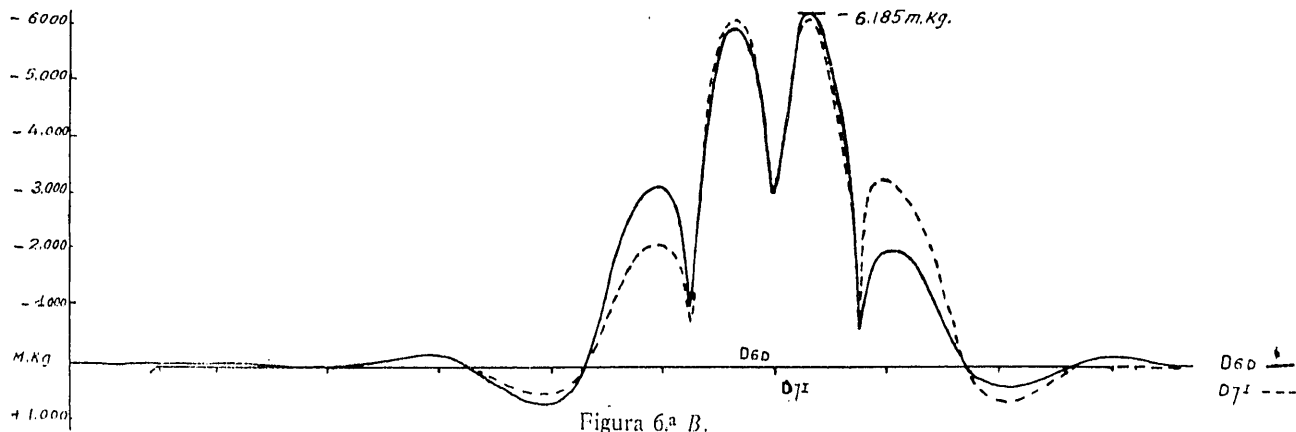
$$M = -\frac{19\,500}{4} [a^2 (2 - a) + 0,2018 a (2 - a)^2]$$

El valor máximo del radical corresponde a la

abscisa (de izquierda a derecha en el tramo) $a = 1,263$ m., que es la raíz positiva de la ecuación de segundo grado

$$1,1973 a^2 - 1,1928 a - 0,4036 = 0.$$

El valor máximo absoluto en la estructura, para 3 ejes de 26 toneladas, resultó, por m. l. de anchura, de $-6\,406$ mkg.



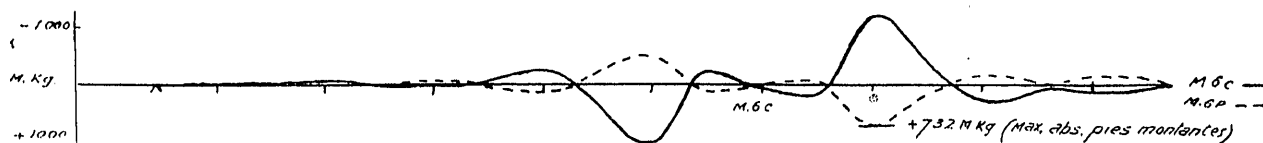


Figura 7.ª A.

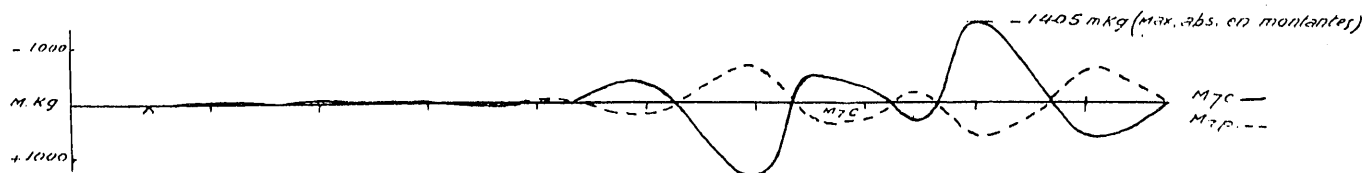


Figura 7.ª B.

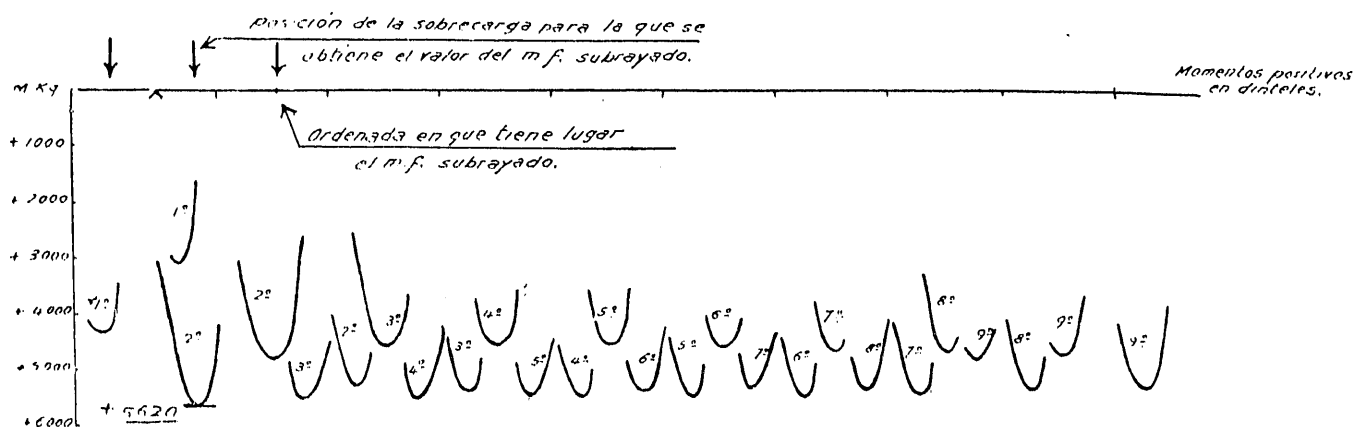


Fig. 8.ª — Trozos interesantes de las curvas de variación de m. f. positivos. En cada curva se expresa el tramo en que tienen lugar, lo que sucede para la posición de la sobrecarga, en la cual la fuerza intermedia insiste sobre la ordenada correspondiente.

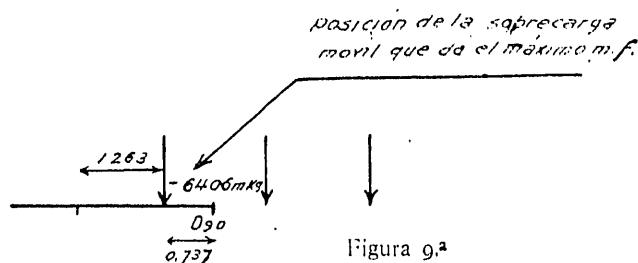


Figura 9.ª

Es curioso comprobar que el momento isostático en la abscisa de la carga aislada vale $\frac{Pab}{L}$, y como los pares (aparte signos) valen

$$\frac{Pab^2}{L^2} \quad \text{y} \quad \frac{Pa^2b}{L^2}$$

es siempre igual a su suma, puesto que $ab^2 + a^2b = abL$, con lo que nos ahorramos algunas operaciones numéricas. (Continuará.)