

ALGUNAS IDEAS ACERCA DE LAS FORMAS MÁS ECONÓMICAS DE LOS DEPÓSITOS REGULADORES DE LOS ABASTECIMIENTOS DE AGUA

POR CLEMENTE SÁENZ GARGÍA
INGENIERO DE CAMINOS

El hecho de que los depósitos reguladores de los abastecimientos de agua se construyan dobles, a los efectos de su limpieza y reparación, influye en su forma y dimensiones generales, si se atiende en el proyecto a la condición de una máxima economía de obra.

De las notas que en su día, ya alejado, tomáramos de las explicaciones de nuestro llorado profesor D. Antonio Sonier, extractamos una consecuencia que nuestro compañero D. Juan Lázaro Urra generaliza con posterioridad en su excelente tratado de abastecimiento de agua potable: dos depósitos rectangulares, iguales, adosados uno a otro, $AMND$ y $MBCN$ de la figura 1.^a, si se

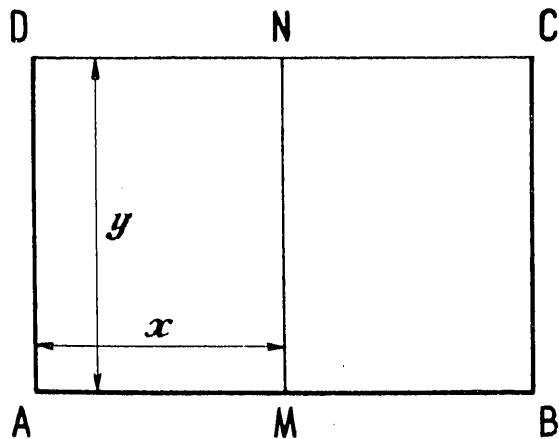


Figura 1.^a

proyectan con la obligación de cubrir una superficie de valor prefijado, $2S$, poseen un presupuesto mínimo, bajo la hipótesis de un coste uniforme por metro lineal de muro, cuando la relación de dimensiones, AM y BC , se hace igual a $3/4$.

En el caso de ir enterrada la construcción, la sección del contorno general, $ABCD$, forzosamente ha de proyectarse con un criterio distinto a la del muro divisorio, MN , y, por ejemplo, si no hay cubierta, aquélla debe de resistir por sí sola

el empuje de las tierras del emplazamiento, mientras la segunda pasa a ser la de un dique simétrico con estabilidad preparada para contrarrestar el empuje horizontal del agua por cualquiera de sus lados. El costo de un metro lineal de dicho muro adquiere así un valor k veces superior al del metro de cercamiento, y, con las notaciones de la figura, el problema se reduce a hallar el mínimo de la expresión

$$4x + 2y + ky$$

afecta a la condición

$$xy = S$$

El problema tiene carácter elemental, y su solución es

$$x = \frac{1}{2} \sqrt{(2+k)S} \quad y = 2 \sqrt{\frac{1}{2+k}S} \quad \frac{x}{y} = \frac{2+k}{4}$$

conteniendo como caso particular la

$$\frac{x}{y} = \frac{3}{4}$$

para $k = 1$.

Si k es superior a 2, x resultará más grande que y , y lo más económico pasa a ser el hacer los depósitos independientes y de planta cuadrada.

Respecto del coste total de muros, en el caso general, si es p el del metro lineal de AM , cabe comprobar que descompuesta en las partidas correspondientes a las dos orientaciones, x e y , ambas son iguales a la mitad de la expresión

$$I = 4p \sqrt{(2+k)S} \quad [1]$$

que representa aquél importe.

En particular, para $k = 1$ y $k = 2$, se tiene

$$I' = 4 \sqrt{S} p \sqrt{3} = 6,928 \sqrt{S} p$$

$$I'' = 8 \sqrt{S} p$$

* * *

Hasta aquí, de la forma rectangular. No es, sin

embargo, dicha figura la que ofrece perímetro mínimo a una área determinada.

En todos los tratados de Cálculo de variaciones, se plantea la cuestión de la determinación de la curva, $M C N$ (fig. 2.^a), que con la menor longitud posible goce de la propiedad de encerrar, en unión del segmento rectilíneo $M N$, una superficie prefijada, S , y el resultado no es otro que un arco de círculo, $M A N$, que cumpla la última condición impuesta.

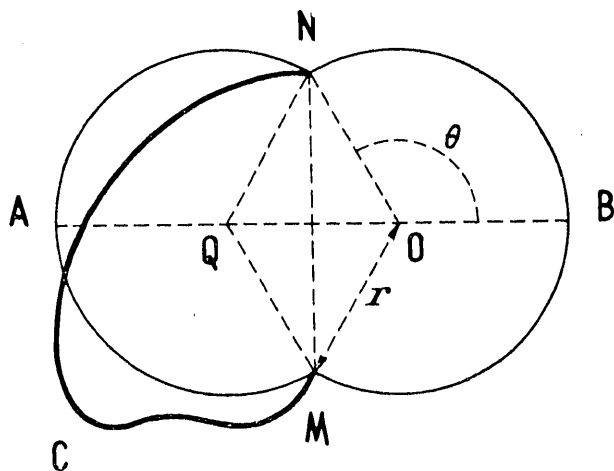


Figura 2.^a

Resulta de la aplicación de esto, al caso de los depósitos gemelos, que la figura más económica de fábrica no puede ser la rectangular sino una tal que la $A M B N$, compuesta de dos arcos de círculo iguales con una cuerda común, $M N = C$, cuya relación con el radio, r , vamos a tratar de determinar.

Designemos para ello por θ el valor en radianes del semiángulo $B O N$, correspondiente al arco, y, como antes, por k , la relación del coste del metro lineal de muro $M N$, al también unitario del $M N B$.

El del total de ellos será proporcional a la magnitud lineal

$$2 M = r (4 \theta + 2 k \sin \theta) \quad [2]$$

y como el área del segmento de círculo $M B N$, suma del sector $M B N O$ con el triángulo $M O N$, es algebraicamente

$$S = r^2 (\theta \sin \theta \cos \theta) \quad [3]$$

se podrán derivar ambas expresiones respecto a una cualquiera de sus dos variables tomadas como independientes (escogemos la r) e igualar a cero dichos resultados.

Se tiene:

$$\frac{dM}{dr} = (2\theta + k \sin \theta) + (2 + k \cos \theta) r \theta' = 0$$

$$\frac{1}{2r} \frac{dS}{dr} = (\theta - \sin \theta \cos \theta) + \sin^2 \theta r \theta' = 0$$

Multiplicando la primera de estas igualdades por $-\sin^2 \theta$, la segunda por $2 + k \cos \theta$, y sumando, resulta tras de fáciles transformaciones,

$$(\theta \cos \theta - \sin \theta) (k + 2 \cos \theta) = 0$$

Esta ecuación queda solucionada con la igualdad a cero del primer paréntesis, lo cual conduce a la trascendente

$$\theta = \text{tg } \theta$$

que tiene lugar para un ángulo θ superior a π y, por lo tanto, inservible.

Por lo contrario, la anulación del segundo paréntesis proporciona

$$\cos \theta = -\frac{k}{2} \quad [4]$$

y con ello el ángulo buscado, que es obtuso.

En el caso particular $k = 1$, θ vale 120° , y cada una de las dos circunferencias a que los arcos corresponden posee la propiedad de pasar por el centro de la vecina.

Cuando k es superior a 2, carece la solución de sentido, y lo mismo que antes, los depósitos se deben hacer separados.

Es digno de observarse el hecho de que si la superficie total del depósito se descompone en las parciales de los dos sectores

$$M B N O = M A N Q = r^2 \theta$$

y del rombo

$$M O N Q = 2 r^2 \sin \theta \cos \theta = k r^2 \sin \theta$$

existe proporcionalidad de las mismas con el costo de los muros correspondientes

$$2 r \theta \times p \quad \text{y} \quad 2 r \sin \theta \times k p.$$

Relativamente al cálculo de r , hemos de decir que se hace sin dificultad a base de la ecuación [3], una vez que se conoce θ

$$r = \sqrt{S : \left[\text{arc cos} \left(-\frac{k}{2} \right) + \frac{1}{4} k \sqrt{4 - k^2} \right]} \quad [5]$$

Y el importe, que es producto de la longitud

2 M, que figura en [2] por el precio p , vale según [4]

$$I_0 = r (4 \theta - 4 \operatorname{sen} \theta \cos \theta) p$$

o sea, en virtud de [3] y de [5]

$$I_0 = \frac{4 S p}{r} = 4 \sqrt{S p} \sqrt{\operatorname{arc} \cos \left(-\frac{k}{2} \right) + \frac{k}{4} \sqrt{4 - k^2}}$$

Para $k = 1$, resulta

$$I_0 = 4 \sqrt{S p} \sqrt{\frac{2}{3} \pi + \frac{\sqrt{3}}{4}} = 6,359 \sqrt{S p}$$

Para $k = 2$

$$I'_0 = 4 \sqrt{S p} \sqrt{\pi} = 7,090 \sqrt{S p}$$

y los sobrecostos relativos de las secciones rectangular y cuadrada correspondientes se ve que son del orden del 9 y del 13 por 100.

* * *

Sobre el problema de la figura en alzado de los depósitos, gravitan multitud de circunstancias particulares que lo hacen variar de índole, impidiendo dar para su resolución normas de general validez. La necesidad o no necesidad de cubierta, la clase de los materiales disponibles, el terreno rocoso o térreo, con o sin empujes a tener en cuenta, etc., etc., son causas que alteran los datos que intervienen en la cuestión del máximo de economía, sin contar, claro está, con que existen otras, cual la limitación de variación de la presión y la disponibilidad del emplazamiento, que pueden relegar a segundo término el interés del asunto.

En el caso de depósitos sencillos, descubiertos y emplazados en terrenos que no necesitan sino un revestimiento uniforme, pueden ofrecer algún interés las siguientes propiedades geométricas:

1.^a La forma de revolución abierta que, a igualdad de volumen, V , posee una menor superficie, S , es la semiesfera.

Para ella,

$$S = \sqrt[3]{18 \pi} V^{\frac{2}{3}} = 3,8383 V^{\frac{2}{3}}$$

2.^a La forma cilíndrica de revolución que, a igualdad de volumen, da el mínimo superficial entre la pared lateral y el fondo es la que posee una altura igual al radio (problema llamado de la cacerola):

$$S = 3 \sqrt[3]{\pi} V^{\frac{2}{3}} = 4,394 V^{\frac{2}{3}}$$

3.^a La superficie tronco-cónica de revolución que cumple las mismas condiciones, computando juntas la base menor y el área lateral, posee un radio mayor R , un radio pequeño r , y una altura

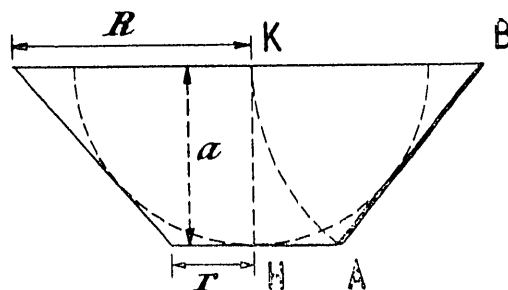


Figura 3.^a

za z , que se deducen de las siguientes fórmulas (ver figura 3.^a):

$$z = \sqrt[3]{\frac{6 V}{(2 + \sqrt{7}) \pi}} = 0,7435 \sqrt[3]{V}$$

$$r = \frac{z}{\sqrt[3]{7}} = 0,6148 z$$

$$R = \frac{1 + \sqrt{7}}{2} r = 1,8229 r = AB$$

$$\cos \hat{B} = \frac{4 - \sqrt{7}}{3} \quad \hat{B} = 63^{\circ}10'$$

$$S = \frac{3 V}{a} = B \sqrt[3]{\frac{(2 + \sqrt{7}) \pi}{6}} V^{\frac{2}{3}} = 4,035 V^{\frac{2}{3}}$$

En general, tratándose de volúmenes grandes, ninguna de tales formas es práctica por su excesiva profundidad.

* * *

Pasando al caso más corriente de que haya que contener el terreno contrarrestando su empuje y sin salir de las hipótesis de los depósitos circulares, sencillos y descubiertos, se puede estudiar primeramente la forma cilíndrica (o casi cilíndrica) encerrada entre muros, cuya estabilidad sea apropiada para la consecución de aquel fin (ver figura 4.^a). Las condiciones de resistencia vienen entonces acrecentadas elásticamente por el trabajo como bóveda de la obra.

Para hacer el problema de la terminación del radio r abordable al cálculo, se deben de superfi-

ciar, primeramente, varias secciones de muro relativas a diversas alturas z , y, dibujada la curva de sus áreas M , en función de ellas (mejor en papel

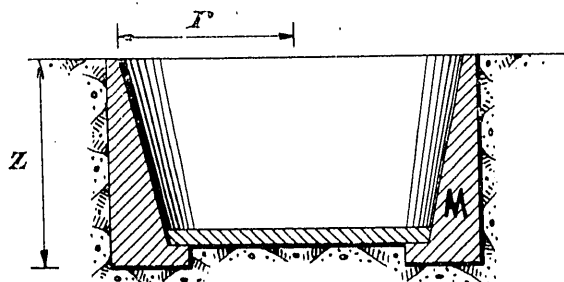


Figura 4.a

logarítmico), asimilarla, al menos en su zona interesante, a una parábola de grado n :

$$M = az^n \quad n > 1.$$

Si el precio del metro cúbico de muro es p , y q el del metro cuadrado de solera, las ecuaciones aproximadas que se plantean son:

$$V = \pi r^2 z$$

$$\text{Coste} = 2\pi r \cdot az^n \cdot p + \pi r^2 \cdot q.$$

La última, en virtud de la primera, puede escribirse así:

$$\text{Coste} = \pi \left(\frac{2apV^n}{\pi^n} r^{-(2n-1)} + qr^2 \right)$$

e igualando la derivada del paréntesis a cero resulta:

$$-\frac{2apV^n}{\pi^n} (2n-1) r^{-2n} + 2qr = 0$$

y de aquí sale:

$$r = \sqrt[2n+1]{\frac{ap}{q} (2n-1) \frac{V^n}{\pi^n}}$$

$$z = \sqrt[2n+1]{\left(\frac{q}{ap(2n-1)} \right)^2 \frac{V}{\pi}}$$

Supongamos, a título de ejemplo, un muro de mampostería estrictamente triangular que, con arreglo a la regla de Boix, tuviera un talud exterior de $\frac{3}{8}$, siendo interiormente vertical. Para él:

$$M = \frac{3}{10} z^2.$$

El $m.^2$ de una solera de hormigón de 0,30 m. de espesor viene a valer la mitad de 1 $m.^3$ de mampostería:

$$p = 2q$$

y así resulta:

$$z = \sqrt[5]{\left(\frac{16}{3 \cdot 2 \cdot 3} \right)^2 \frac{V}{\pi}} = 0,7588 \sqrt[5]{V}$$

Para una cabida de 1 000 $m.^3$, la profundidad sería de 3,02 m., y para otra de 10 000 $m.^3$, se calcula 4,78 m.; como se ve, ambas son de una magnitud bastante práctica.

Como complemento de la teoría general añadiremos que la solución dada es extensible a $n = 1$:

$$r = \sqrt[3]{\frac{ap}{q} \frac{V}{\pi}} \quad z = \sqrt[3]{\left(\frac{q}{ap} \right)^2 \frac{V}{\pi}}$$

lo que constituye una generalización del problema de la cacerola, aplicable, como él, tan sólo a terrenos sin empujé.

* * *

En relación al tema de la forma tronco-cónica, hemos de decir que tiene matemáticamente bastante dificultad. Por ello, resulta más práctico eludirlo, y aplicar, a cada inclinación del paramento, los resultados obtenidos para la figura cilíndrica, aunque con la a y la n que a dicha inclinación corresponden. Tanteando entre varias pendientes, se llega, con bastante aproximación, a la solución más conveniente.

Dejamos, para acabar, las cosas como están, sin entrar en la complicación de la cubierta; únicamente, haremos notar que, cuando ocurre, como en el caso del hormigón armado, que se puede prefiar un precio por $m.^2$ de aquella parte de obra, dicho coste se puede añadir al de la misma unidad de solera en el planteamiento del asunto. Como es natural, este aumento de q influye en el del calado z , y se traduce en una disminución del radio r , sin contar con que los muros pierden, asimismo, espesor, por la mayor estabilidad que les comunica el peso de la techumbre.

Por lo demás, creemos ocioso recordar, como bien conocidos de los proyectistas, los ingeniosos y económicos dispositivos de cubierta ideados por nuestro compañero Sánchez del Río, a quien nos place rendir desde aquí un justo homenaje.