

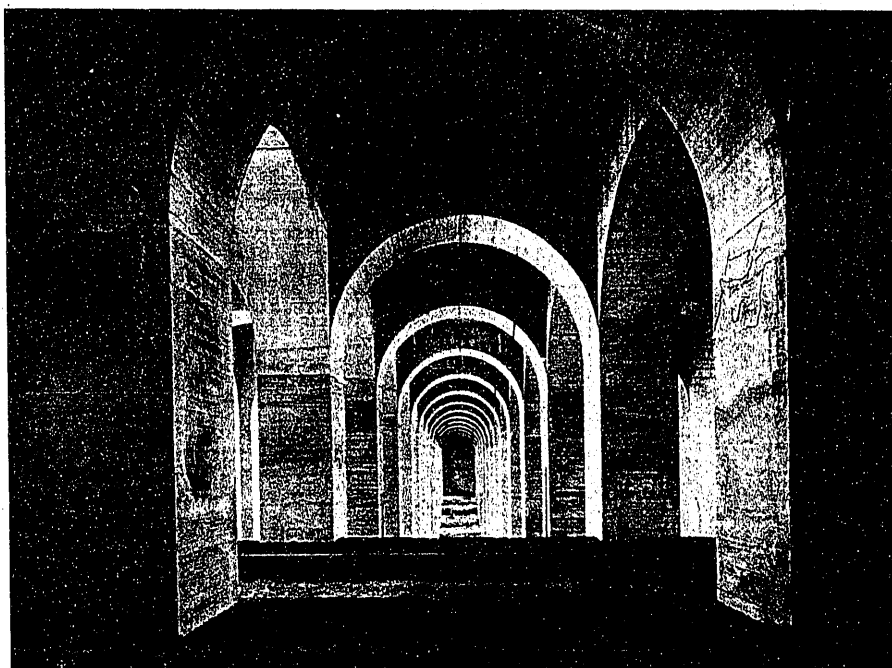
to, ha dado perfectos resultados en la práctica gracias a la proximidad y repetición de estas juntas.

El conjunto de la estructura ha resultado, gracias a esta disposición, muy económico, pues su coste no ha pasado de 200 pesetas por metro cuadrado de contención, aun incluyendo en el precio la cimentación que, como hemos dicho, representa una altura análoga a la de contención, y el comportamiento de la obra ha sido hasta la fecha completamente satisfactorio.

El otro cruce de la vaguada aguas abajo de éste, es el llamado Viaducto de Quince Ojos, para el paso de la Avenida de Puerta de Hierro.

La necesidad de proyectar un viaducto cuyas líneas armonizaran con las del muro de contención antedicho, y cuya ornamentación proyectada por los arquitectos de la Ciudad Universitaria, y todavía sin ejecutar, presenta multitud de perspectivas comunes con el viaducto, obligaron a salvar la vaguada con una arcada múltiple de bastante masa compuesta por quince arcos de siete metros de luz con pilas de 1,70 metros en sentido longitudinal, y tres arcos iguales en sentido transversal con pilas centrales de 1,70 metros de anchura y las laterales de 6,80 para alcanzar el total de 35,00 metros de anchura de la vía.

La gran longitud y rigidez de esta estructura obligaba también a establecer juntas frecuentes, cuya posición no perjudicase el efecto estético, adoptándose como menos perjudicial la solución de colocarlas en las mismas claves, convirtiendo así los arcos en dobles ménsulas, de modo que la unidad estructural está formada por una pila bastante esbelta, de la cual arrancan en la parte alta los cuatro medios arcos en forma de ménsula, que sirven de apoyo en unión de las ménsulas de los pilares contiguos a cada una de las losas cuadradas de hormigón armado que forman el tablero del viaducto. Como la luz de los arcos



Vista interior del Viaducto de Quince Ojos.

es muy pequeña, no resultaba esta solución tan anti-económica como pudiera pensarse, pues bastan unas ligeras armaduras para soportar las cargas de las ménsulas.

De los estribos, uno de ellos en que el terreno sube rápidamente, está formado por muros en ménsula empotrados sobre una zapata inferior y formando una especie de caja de contención del terraplén interno, mientras que el otro estribo que tiene gran altura y ha de ir acompañado por los terraplenes, se ha resuelto más económicamente, continuando la misma estructura en arcada del viaducto y cerrando lateralmente estos arcos con ligeras pantallas, siguiendo la ya clásica solución ideada por el maestro D. J. E. Ribera, y con la cual el terraplén vierte por igual por el exterior que por el interior de las pantallas, compensándose los empujes de tierra sobre las mismas.

Terminaremos en otro artículo la descripción de estas obras.

Eduardo TORROJA,
Ingeniero de Caminos.

Solución general del problema de la deformación plana

En mi *Elasticidad y Resistencia de los Materiales*, tomo II, páginas 362 y siguientes, he demostrado que el método general de solución del problema elástico, consistente en reducirlo a una ecuación integral, se aplica a la deformación plana. Pero esta aplicación supone un paso al límite, puesto que hay que integrar para un cilindro indefinido, siendo, por tanto, de un gran interés teórico estudiar de una manera directa el caso de dos dimensiones, como han hecho siempre los autores en los problemas análogos de Neumann y Dirichlet.

Por otra parte, este estudio directo ofrece también gran interés práctico por la aplicación a las presas de gravedad y a otros muchos casos importantes, ya que es siempre más fácil aplicar una teoría sencilla, propia del caso especial, que otra mucho más complicada referente a otro más general.

Consideremos, pues, un cuerpo limitado por una superficie cilíndrica indefinida; tomemos un triedro de referencia levógiro tal, que OX y OY estén contenidos en el plano de la sección y que OZ sea paralelo al eje. El supuesto fundamental es que las ten-

siones y las condiciones de sustentación son constantes a lo largo de cada generatriz.

Recordemos brevemente la teoría clásica: si u , v , w son las componentes del corrimiento según los tres ejes, es fácil ver que w ha de ser siempre nulo¹ y que todas las tensiones y corrimientos son independientes de z ; estas condiciones, introducidas en las ecuaciones elásticas (página 173, tomo I de mi *Elasticidad y Resistencia de los Materiales*), dan a dichas ecuaciones el siguiente aspecto:

$$[1] \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial t_x}{\partial x} + \frac{\partial \theta}{\partial y} + P \cos \alpha &= 0 \\ \frac{\partial \theta}{\partial y} + \frac{\partial t_y}{\partial y} + P \sin \alpha &= 0 \\ \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{1}{E} \left(t_x - \frac{t_y + t_z}{m} \right) \\ \frac{\partial v}{\partial y} &= \frac{1}{E} \left(t_y - \frac{t_x + t_z}{m} \right) \\ t_z &= \frac{t_x + t_y}{m} \\ \theta &= \mu \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \\ \theta_{xz} &= \theta_{yz} = 0 \end{aligned} \right.$$

En estas ecuaciones t_x , t_y , t_z son las tres tensiones normales; θ_{xy} , θ_{xz} , θ_{yz} las tensiones tangenciales, pero como estas dos segundas son nulas y la primera es la que habremos de emplear, en ella hemos suprimido los subíndices; P es el peso del material por unidad de volumen; α el ángulo que la dirección de la gravedad, supuesta contenida en la sección recta, forma con el eje OX ; E el módulo de Young, m el de Poisson y μ el de Lamé.

Para calcular las tensiones, el procedimiento clásico consiste en postular la existencia de la función de Airy F tal que las tensiones sean dadas por los valores

$$[2] \left\{ \begin{aligned} t_x &= \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - P x \cos \alpha \\ t_y &= \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - P y \sin \alpha \\ \theta &= - \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \end{aligned} \right.$$

Introducidas estas expresiones en las ecuaciones [1], es obvio que las dos primeras quedan satisfechas. Eliminando t_z por la quinta, las tercera, cuarta y sexta toman el siguiente aspecto:

$$[3] \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{m^2 - 1}{m^2 E} \left(t_x - \frac{1}{m-1} t_y \right) \\ \frac{\partial v}{\partial y} &= \frac{m^2 - 1}{m^2 E} \left(t_y - \frac{1}{m-1} t_x \right) \\ \theta &= \mu \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \end{aligned} \right.$$

¹ Salvo, tal vez, los términos representativos de una traslación y de un giro arbitrarios, cuando el dato superficial sea la tensión.

Eliminando por derivación u , v de estas tres ecuaciones, es muy sabido que mediante las [2] se llega a la condición

$$[4] \quad \Delta \Delta F = 0$$

en que Δ es el signo del laplaciano.

Pues bien: nosotros vamos a partir de una solución elemental de la [4], que será la siguiente:

$$[5] \quad F = - \frac{1}{\pi} y \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{x}{y}$$

Por derivación obtenemos

$$[6] \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} &= \frac{2xy^2}{\pi(x^2 + y^2)^2} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} &= \frac{2x}{\pi(x^2 + y^2)} - \frac{2xy^2}{\pi(x^2 + y^2)^2} \\ \Delta F &= \frac{2x}{\pi(x^2 + y^2)} \\ \frac{\partial^2 \Delta F}{\partial x^2} &= \frac{4x(x^2 - 3y^2)}{\pi(x^2 + y^2)^3} \\ \frac{\partial^2 \Delta F}{\partial y^2} &= \frac{4x(3y^2 - x^2)}{\pi(x^2 + y^2)^3} \\ \Delta \Delta F &= 0 \end{aligned} \right.$$

Es, pues, evidente que [5] es solución de la biarmónica [4], cualquiera que sea el origen. Y como la biarmónica es simétrica respecto a x , y , tendremos también la solución

$$F = - \frac{1}{\pi} x \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{y}{x}$$

Tomemos por origen un punto P cualquiera del perímetro; sean μ'_1 , μ'_2 dos funciones de P (constantes respecto al punto M donde calculamos las tensiones); en resumen, la solución elemental que adoptaremos será

$$[7] \quad F = - \frac{\mu'_1}{\pi} y \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{x}{y} - \frac{\mu'_2}{\pi} x \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{y}{x}$$

Y, finalmente, integraremos esta solución elemental para todos los puntos del contorno, tomando para cada elemento por eje PX la normal al perímetro o contorno que penetra en el cuerpo, y por eje PY la tangente siempre en el sentido conveniente para que el triedro resulte levógiro.

Las tensiones que la solución elemental [7] produce en un punto cualquiera son, según las [2] y las [6]:

$$[8] \left\{ \begin{aligned} t'_x &= \frac{2\mu'_1 x^3}{\pi(x^2 + y^2)^2} + \frac{2\mu'_2 x^2 y}{\pi(x^2 + y^2)^2} - P x \cos \alpha \\ t'_y &= \frac{2\mu'_1 x y^2}{\pi(x^2 + y^2)^2} + \frac{2\mu'_2 y^3}{\pi(x^2 + y^2)^2} - P y \sin \alpha \\ \theta' &= \frac{2\mu'_1 x^2 y}{\pi(x^2 + y^2)^2} + \frac{2\mu'_2 x y^2}{\pi(x^2 + y^2)^2}; \end{aligned} \right.$$

hemos acentuado estas tensiones para recordar que están referidas a un triedro afecto al punto P .

Para hacer intuitivo el cálculo, es muy cómodo considerar μ'_1 , μ'_2 como las componentes según PX y PY de una densidad-vector μ' supuesta acumulada en P . Entonces diremos que la densidad μ' de P produce en el punto M las tensiones precedentes. Supongamos ahora que el punto M viene a tocar en un punto M_0 del contorno de la sección; sea φ el ángulo que la normal por M_0 que penetra en el cuerpo forma con PX ; las tensiones t_x , θ referentes al triedro afecto a M_0 , cuyo eje M_0X es la normal interior y cuyo eje M_0Y es la tangente al contorno, se expresarán en función de las precedentes por las dos ecuaciones siguientes:

$$t_x = t'_x \cos^2 \varphi + t'_y \sin^2 \varphi + \theta' \sin 2\varphi$$

$$\theta = \frac{1}{2} (t'_y - t'_x) \sin 2\varphi + \theta' \cos 2\varphi.$$

Sustituyendo en los segundos miembros los valores [8], estas ecuaciones toman la forma

$$[9] \left\{ \begin{aligned} t_x &= -Px \cos \alpha \cos^2 \varphi - Py \sin \alpha \sin^2 \varphi + \\ &\quad + \frac{1}{\pi} \mu'_1 A_{11} + \frac{1}{\pi} \mu'_2 A_{21} \\ \theta &= -\frac{1}{2} Py \sin \alpha \sin 2\varphi + \frac{1}{2} Px \cos \alpha \sin 2\varphi + \\ &\quad + \frac{1}{\pi} \mu'_1 A_{12} + \frac{1}{\pi} \mu'_2 A_{22} \end{aligned} \right.$$

si hacemos

$$\begin{aligned} x' &= -x \cos \varphi - y \sin \varphi \\ y' &= x \sin \varphi - y \cos \varphi \\ r &= \sqrt{x^2 + y^2} \\ A_{11} &= \frac{2x x'^2}{r^4} & A_{21} &= \frac{2y x'^2}{r^4} \\ A_{12} &= \frac{2x x' y'}{r^4} & A_{22} &= \frac{2y x' y'}{r^4} \end{aligned}$$

Adviértase que r es la distancia PM tomada en valor absoluto y que x' , y' son las coordenadas del punto P respecto al triedro afecto a M_0 y cuyo eje M_0X es la normal interior al contorno por M_0 .

Si los segundos miembros de las ecuaciones [9] se multiplican por el elemento de contorno $d\omega'$ que rodea al punto P y se integra para todo el contorno, obtenemos los valores totales de t y θ correspondientes al punto M_0 . En esta integración aparecen las integrales del tipo

$$I = \int \mu'_i \cdot A_{ij} \cdot d\omega'$$

que en general son discontinuas, es decir, que el límite I_i de la integral para un punto interior infinitamente próximo al contorno no es igual al valor I_0 calculado en el mismo contorno. Y como es I_i el valor que debe figurar en el problema elástico e I_0 el que nos da el cálculo, hay que corregir éste agregando los saltos bruscos. Sin embargo, según una observación de H. Poincaré, en su *Théorie du potentiel newtonien*, las integrales correspondientes a A_{12} y A_{21} no pueden presentar saltos bruscos, sino que se tiene $I_i = I_0$. En efecto, cada una de dichas integra-

les puede dividirse en dos partes: una, referente a un trozo pequeño de contorno que rodee a M_0 ; otra, al resto del contorno. Esta segunda parte es continua, así que podemos considerar solamente la primera, en la cual el trozo de contorno puede tomarse como rectilíneo; además, el punto M al tender hacia M_0 puede suponerse que se mueve sobre la normal al contorno. Dentro del pequeño trozo de contorno a que nos referimos puede tomarse $x' = -x$, $y' = -y$, porque los triedros P y M_0 son de ejes sensiblemente paralelos. Según esto, A_{12} y A_{21} dependen de x'^2 , y por simetría, $I_i = I_e$, siendo I_e el valor límite en el exterior del contorno, y, por tanto $I_i = I_0$ ya que I_0 está siempre comprendido entre I_i e I_e .

Quedan las integrales correspondientes a A_{11} y A_{22} ; sea primeramente A_{11} la que consideremos: tendremos

$$I = \int \mu'_1 \frac{2x x'^2}{r^4} d\omega';$$

siguiendo el mismo procedimiento anterior, la descompondremos en dos partes, una referente a una pequeña porción de contorno de longitud $2a$ cuyo centro sea M_0 , otra al resto del contorno; esta segunda parte es continua cuando M_0 toca en el contorno, de modo que nos basta aquí considerar la primera; en ésta se puede tomar μ'_1 como constante¹, y al contorno podemos considerarlo como rectilíneo, tomando a bastante pequeño; por tanto, φ será nulo y $x = -x'$, $y = -y'$; de modo que nuestra integral se escribirá

$$I = 2\mu'_1 x^3 \int_{-a}^{+a} \frac{dy'}{(x^2 + y'^2)^2}.$$

Para la integral indefinida tenemos

$$\int \frac{dy'}{(x^2 + y'^2)^2} = \frac{y'}{2x^2(x^2 + y'^2)} + \frac{1}{2x^3} \arctg \frac{y'}{x}$$

y, por tanto,

$$I = 2\mu'_1 \left[\frac{xa}{x^2 + a^2} + \arctg \frac{a}{x} \right].$$

El primer término del corchete no nos interesa, porque es una función algebraica que no puede darnos saltos bruscos y que, en efecto, se anula, tanto en M como en M_0 ; el segundo es el ángulo según el cual se ve desde M el segmento a . Este ángulo es nulo cuando estamos en el segmento; de modo que

$$I_0 = 0$$

y se aproxima cuanto se quiera a $\frac{\pi}{2}$ cuando estamos a cierta distancia x , o sea

$$I_i = \pi\mu'_1.$$

Según esto,

$$I_i = \pi\mu'_1 + I_0$$

y esta relación es valedera para todos los casos, porque las hipótesis que hemos hecho para obtener los valores particulares de I_i e I_0 son legítimas para el cálculo de los saltos bruscos.

De una manera análoga se calcularía el salto brus-

¹ Elasticidad y Resistencia de los Materiales, tomo II, páginas 345 y 346.

co de la integral correspondiente a A_{22} , y, en resumen, las ecuaciones [9] integradas toman la forma siguiente:

$$[10] \left\{ \begin{aligned} t_x + P \int (x \cos \alpha \cos^2 \varphi + y \sin \alpha \sin^2 \varphi) d\omega' &= \\ &= \mu'_1 + \frac{1}{\pi} \int (\mu'_1 A_{11} + \mu'_2 A_{21}) d\omega' \\ \theta + \frac{1}{2} P \int (y \sin \alpha \sin 2\varphi - x \cos \alpha \cos 2\varphi) d\omega' &= \\ &= \mu'_2 + \frac{1}{\pi} \int (\mu'_1 A_{12} + \mu'_2 A_{22}) d\omega' \end{aligned} \right.$$

Son éstas dos ecuaciones integrales que, cuando se conocen t_x y θ en todo el contorno, nos permiten calcular μ'_1 , μ'_2 por el método de Fredholm, ya que las A_{ij} se conservan finitas cuando M_0 y P se tocan dentro del contorno; basta para evidenciarlo observar que x y x' son entonces infinitamente pequeños de segundo orden, mientras y , y' y r lo son de primero.

Con lo dicho se resuelve el problema tipo Neumann, en que se nos dan las tensiones en todo el contorno, pues una vez obtenidas las densidades μ'

mediante las ecuaciones [10], queda la función [7] completamente conocida, y, por tanto, basta hacer una integración para todo el contorno para determinar las tensiones en cualquier punto, análogamente a como hemos procedido para pasar de las ecuaciones [9] a las [10].

Pero hay otros tipos de problema elástico que tienen importancia práctica. (Véase mi *Elasticidad y Resistencia de los Materiales*, tomo I, página 177, el artículo "La solución general del problema elástico de tipo mixto", publicado por mí en la *Revista de Ingeniería Industrial* del mes de abril de 1935, y el titulado "Nota sobre el cálculo de presas", que he publicado en la *Revista de Ingeniería y Construcción* del mes de agosto de este mismo año.)

A estos nuevos tipos de problema se aplica también el método precedente, es decir, que también es posible reducirlos a una ecuación integral; ello exige, naturalmente, la determinación de los corrimientos u y v en función de F mediante las ecuaciones [3], pero como la exposición minuciosa de los cálculos correspondientes alargaría excesivamente este artículo, haremos aquí punto hasta mejor ocasión.

Manuel VELASCO DE PANDO.
Ingeniero Industrial.

Crónica

El angustioso problema ferroviario.

La persistente baja en la recaudación de los ingresos ferroviarios, a pesar del aumento de tarifas, y particularmente el extraordinario descenso en el mes de junio pasado en algunas grandes Empresas, ha dado lugar a que se acentúe de modo notable el pesimismo respecto a tan trascendental problema.

Y en tales circunstancias, un diario de escasa circulación publica cálidos elogios de la desafortunada reorganización del Consejo Superior de Ferrocarriles, criticando severamente la pasada conducta de los representantes del Estado, a los que achaca un *mal entendido celo* para los intereses del mismo y *espíritu de suspicacia*, entre otras cosas, todo ello en un tejido complicado de insidias, que nos abstenemos de recoger por hoy.

Las personas mal informadas pueden creer que el artículo ha sido inspirado por las Empresas, pues aparentemente defiende intereses de las mismas, pero nada menos cierto. Los Consejos de las Compañías de Ferrocarriles se dan perfecta cuenta de que el problema ferroviario requiere, para ser resuelto, todas las asistencias, y nunca han menospreciado la de los representantes del Estado. Únicamente pecan por no desautorizar a los arbitristas, que sin conocimientos profundos y con infinita audacia no cesan de embrollar cada vez más el asunto.

Por nuestra parte creemos que siendo indispensable para ciertos tráficos el ferrocarril, hay que procurar su mantenimiento como interés público primordial. Las mejores inteligencias serán impotentes para resolver problema de tal envergadura y que preocupa en todo el mundo, si no existe deseo de colaboración. Los intereses de las Empresas y del Estado tienen que tener un extenso campo de convivencia que hay que encontrar y definir en bien de todos.

Inspección y vigilancia de los servicios públicos de transportes por carretera.

La *Gaceta* de 17 de julio del actual publica un Decreto del Ministerio de Obras públicas por el que se

crea en cada Jefatura de Obras públicas un servicio denominado de Inspección de Carreteras. En él se da entrada a los interventores del Estado en la explotación de ferrocarriles, con *misión distinta*, según se explica en el preámbulo.

El decreto ha producido impresión desagradable, pues da lugar a confusión de funciones e inversión de categorías. Esperamos que se suspenda su aplicación hasta que se estudie con más detenimiento.

Las quejas por escasez de señales en las carreteras.

Precisamente ahora, cuando se han multiplicado de un modo notable las señales que existían en las carreteras, se producen más quejas que nunca. La razón es clara: el público se ha dado perfecta cuenta de lo que representan las señales para la seguridad del tráfico y para poder aprovechar las grandes velocidades. Todo lo que se haga para satisfacer estas demandas por parte de los servicios de Obras públicas, estará plenamente justificado.

Pero gran número de las quejas se refieren a cuestiones que hasta ahora no se consideraban específicamente de nuestro campo y tal vez debieran de serlo, aunque con las colaboraciones que se estimasen precisas.

Por ejemplo, las señales que establece el Circuito de Firmes Especiales en lugares donde se encuentran fuentes, han merecido especial favor, pues dan lugar a dividir los viajes en etapas, aprovechando para las comidas sitios de muy agradable estancia. Y por extensión se va considerando ya que deben existir en las carreteras indicadores de proximidad de monumentos artísticos o lugares de gran belleza natural. También se pide que en las bifurcaciones esté de manifiesto lo más notable de visitar en cada dirección.

Parece que el Patronato Nacional del Turismo, de acuerdo con el Ministerio de Obras públicas, debiera estudiar lo que pudiera hacerse en este respecto, y por nuestra parte tenemos la seguridad de que los ingenieros de Caminos que han tomado la iniciativa en ésta como en tantas otras cosas, estudiarán el asunto con todo ca-