

principios, pero de proporciones más reducidas, no merece especial mención, aun cuando publicamos un coquis.

La tribuna de los concursos hípicas tiene una cubierta metálica sencilla y corriente y un pequeño graderío de hormigón armado, que tampoco merece llamar la atención de los lectores.

Como habrá podido observarse, no se ha perseguido, al proyectar las tribunas, ni conseguir una construcción de un estilo determinado, ni una estructura

original, ni sencilla; se ha proyectado pensando únicamente en la utilización de la tribuna: no hay un sólo elemento decorativo, no hay más arquitectura que la que da la proporción y la disposición de los elementos constructivos.

Esta es mi modestísima intervención en el proyecto de nuevo Hipódromo de Madrid con el ya afamado arquitecto D. Luis Gutiérrez Soto, cuya labor gigantesca en el resto del proyecto no podría describir cumplidamente.

Francisco FERNÁNDEZ CONDE.
Ingeniero de Caminos.

Ecuación intrínseca del campo electrostático

Sin pretender que la ecuación que vamos a dar al campo electrostático se haga por primera vez, sí es cierto que es poco conocida, ya que en algunos libros de electricidad en que la he buscado no la encontré.

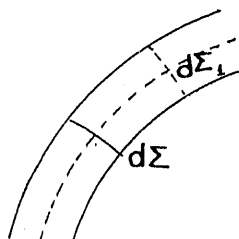
Más que la demostración, vamos a exponer la manera de obtenerla, sin pararnos a examinar el rigor de su exposición, ya que nos parece que el desarrollo matemático de la misma va a interesar poco a los lectores de esta REVISTA. Sin embargo, tiene demostración rigurosa.

Consideremos un tubo de fuerza del campo infinitamente pequeño (de sección) y dos superficies equipotenciales infinitamente próximas (una fija, $d\Sigma$, y otra móvil, $d\Sigma_1$), y apliquemos el teorema de Gauss o de flujo a través de una superficie cerrada; tendremos, llamando E_1 a la fuerza en $d\Sigma_1$ y E a la fuerza en $d\Sigma$,

$$E_1 d\Sigma_1 - E d\Sigma = \int_a^s 4\pi \delta d\Sigma_1(y) dy \quad [1]$$

Por y se designa el arco en la línea de fuerza central medido a partir de $d\Sigma$ y $d\Sigma_1$ el área de la sección en ese punto.

Consideraremos la curvatura de una línea o super-



ficie como positiva si vuelve su concavidad hacia el lado de la normal, positiva, y como negativa en caso contrario.

Recordando el teorema de Gauss sobre la curvatura total de una superficie que siendo $d\Psi$ el área determinada en la esfera de radio unidad por los radios paralelos a las normales en el contorno de $d\Sigma$, se tiene

$$\frac{d\Psi}{d\Sigma} = \frac{1}{R_1 R_2}$$

Consideremos que los elementos de superficies equipotenciales entre $d\Sigma$ y $d\Sigma_1(y)$ son superficies paralelas; tendremos que si $\frac{1}{R_1}$ y $\frac{1}{R_2}$ son las curvaturas principales en $d\Sigma$, $d\Sigma_1(y)$ a la distancia, y serán $\frac{1}{R_1 - y}$ y $\frac{1}{R_2 - y}$, y como $d\psi$ es el mismo, se tendrá

$$d\Sigma_1(y) = (R_1 - y)(R_2 - y)d\psi$$

y sustituyendo valores en [1] tendremos:

$$E_1(R_1 - S)(R_2 - S) - ER_1 R_2 = 4\pi \int_0^S (R_1 - y)(R_2 - y) \delta dy \quad [2]$$

y derivando con relación a S tendremos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial S} (R_1 - S)(R_2 - S) - E(R_1 - S + R_2 - S) &= \\ &= 4\pi \delta (R_1 - S)(R_2 - S) \end{aligned}$$

y dividiendo por $(R_1 - S)(R_2 - S)$ y llamando

$$\frac{1}{\sigma} = \frac{R_1 - S + R_2 - S}{(R_1 - S)(R_2 - S)} = \frac{1}{R_1 - S} + \frac{1}{R_2 - S}$$

que es la curvatura media de la superficie, tendremos:

$$\frac{\partial E}{\partial S} = \frac{1}{\sigma} E = 4\pi \delta \quad [3]$$

que se transforma en la ecuación de Poisson si se pone $E = \frac{\partial V}{\partial S}$, dando

$$\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} - \frac{1}{\sigma} \frac{\partial V}{\partial S} = -4\pi \delta$$

Aplicando la ecuación a una superficie conductora se deduce, aunque no sé si de una manera muy rigurosa, que alrededor de una punta en saliente, $\frac{1}{6}$ negativo, la fuerza se hace infinito, y que, al contrario, cuando la punta fuese en entrante, $\frac{1}{6}$ positivo, la fuerza se anula.

Puede aplicarse este procedimiento para determinar la capacidad de un condensador de armaduras muy próximas y paralelas; suponiendo que las super-

ficies equipotenciales intermedias son superficies paralelas, tendremos:

$$\frac{\partial LE}{\partial S} = \frac{1}{R_1 - S} + \frac{1}{R_2 - S}$$

de donde

$$LE = -L(R_1 - S) - L(R_2 - S) + LC$$

$$E = \frac{C}{(R_1 - S)(R_2 - S)}$$

y si hacemos $E = E_0 = 4\pi\delta$, siendo δ la densidad superficial de electricidad de las armaduras, para $S = 0$ tendremos:

$$E = \frac{4\pi\delta R_1 R_2}{(R_1 - S)(R_2 - S)} = \frac{4\pi\delta}{\left(1 - \frac{S}{R_1}\right)\left(1 - \frac{S}{R_2}\right)}$$

y con

$$E = -\frac{\partial V}{\partial S}$$

e integrando tendremos

$$V - V_0 = -4\pi\delta \frac{R_1 R_2}{R_1 - R_2} L \left[\frac{1 - \frac{S}{R_1}}{1 - \frac{S}{R_2}} \right]$$

la capacidad elemental será

$$dC = \frac{dQ}{V - V_0} = \frac{\delta d\Sigma}{V - V_0} = -\frac{1}{4\pi} \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right) \times \frac{d\Sigma}{L\Delta}$$

de donde

$$C = \frac{1}{4\pi} \iint_{\Sigma} \frac{\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}}{L\Delta} d\Sigma \quad [4]$$

En la que

$$\Delta = L \left[\frac{1 - \frac{\varepsilon}{R_1}}{1 - \frac{\varepsilon}{R_2}} \right]$$

siendo ε la separación de armaduras.

Si se desarrolla en serie el elemento integral, reteniendo sólo los términos de primer grado en ε , se tiene

$$C = \frac{1}{4\pi} \iint_{\Sigma} \left(\frac{1}{\varepsilon} - \frac{1}{2} \frac{1}{\sigma} \right) d\Sigma$$

$$C = \frac{1}{4\pi} \times \frac{S}{\varepsilon} - \frac{1}{8\pi} \iint_{\Sigma} \frac{d\Sigma}{\sigma} \quad [5]$$

El segundo término de corrección sólo afecta a la forma y extensión de las armaduras. Los puntos en los que $\frac{1}{6}$ es muy grande (puntas) contribuyen menos que las demás, pues si bien la densidad de electricidad es mayor, su extensión o área es menor. Para comprobarlo basta hacer la representación esférica de la armadura, con lo que se tendrá

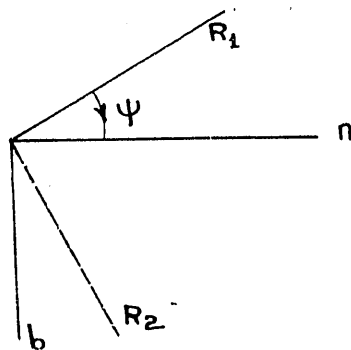
$$\iint_{\Sigma} \frac{d\Sigma}{\sigma} = \iint_{\sigma} \frac{R_1 R_2 d\psi}{\sigma} = \iint_{\sigma} (R_1 + R_2) d\psi$$

que tiende hacia cero cuando lo hacen R_1 y R_2 a la vez.

La fórmula [4] es exacta para los casos de plano, cilindro y esfera, obteniéndose las fórmulas clásicas con sólo pasar al límite.

En otro caso, para que superficies paralelas fueran equipotenciales, tendrían que ser, como fácilmente se

deduce de las fórmulas que daremos a continuación, a curvatura media constante, y esto sólo es compatible con ser paralelas en los tres casos de integración antes mencionados del plano, cilindro y esfera, que son los que se integran corrientemente de una manera elemental, por consideraciones de simetría.



Las fórmulas antes mencionadas, y que sólo daremos a título de información, son las que ligán las formas de las superficies equipotenciales con su trayectoria. La notación es la siguiente:

- S arco de una línea de fuerza.
- S_n arco de una curva de la superficie equipotencial tangente a la normal.
- S_b arco de una curva tangente a la binormal.
- $\frac{1}{\sigma}$ curvatura media de la superficie en ese punto
- igual a $\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$.
- $\frac{1}{P}$ curvatura de la línea de fuerza.
- $\frac{1}{\tau}$ torsión de la línea de fuerza.
- ϕ ángulo de la normal principal con la tangente a la línea de curvatura número 1, se tiene:

$$\frac{\partial}{\partial S_b} \left(\frac{1}{\sigma} \right) - \frac{1}{P\tau} + \frac{1}{P} \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right) \sin \phi \cos \phi = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial S_n} \left(\frac{1}{\sigma} \right) - \frac{\partial}{\partial S} \left(\frac{1}{P} \right) - \frac{1}{P} \left(\frac{\sec^2 \phi}{R_1} + \frac{\cos^2 \phi}{R_2} \right) = 0$$

Si se aplica para un campo cuyas líneas de fuerza sean rectas, se tiene:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial S_b} \left(\frac{1}{\sigma} \right) &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial S_n} \left(\frac{1}{\sigma} \right) &= 0 \end{aligned} \right\} \text{ de donde } \frac{1}{\sigma} = K$$

y como las superficies han de ser paralelas, se tienen sólo los tres casos antes mencionados.

Si se quiere que las superficies equipotenciales sean planos tendremos

$$\frac{1}{R_1} = \frac{1}{R_2} = 0$$

$$\frac{1}{P\tau} = 0 \quad \frac{\partial}{\partial S} \left(\frac{1}{P} \right) = 0$$

lo que da

$$\frac{1}{\tau} = 0 \quad \frac{1}{P} = K$$

que son los planos que pasan por una recta. Caso límite los planos paralelos.

FÉLIX VALDÉS,
Ingeniero de Caminos.