

que el empleo de un autovehículo no esté limitado, en lo posible, dentro de las fronteras de un país y para que se presenten todas las facilidades para el desarrollo de la circulación automovilista. Los países constructores de automóviles están particularmente interesados en esta unificación de reglamentos.

3. Los reglamentos en vigor en varios países difieren bastante unos de otros, no sólo en lo referente a los límites de tolerancia, sino también, particularmente respecto al peso, en los métodos de evaluación de dichos límites. Las razones de esta discordancia son debidas a la extrema variedad de condiciones en la estructura de las carreteras y de los puentes, siendo, por consiguiente, muy difícil hacerlas desaparecer en un término previsible. La adopción de un método uniforme de

limitación daría algunas facilidades, pero no bastaría para realizar la sana política de transportes que constituye el objeto de la unificación.

4. En estas condiciones no es posible, por el momento, fijar la base práctica de unificación o codificación internacional de los reglamentos. Ni aun puede asegurarse que la progresiva semejanza de las condiciones de las redes de carreteras permitirá examinar la cuestión con mayores probabilidades de éxito. Parece conveniente que una Comisión especial se encargue de proseguir el estudio.

5. Para la circulación de vehículos ordinarios no parece necesaria la unificación de reglamentos.

Manuel AGUILAR
Ingeniero de Caminos

Método de la propagación de momentos en las estructuras múltiples¹

II

ESTRUCTURAS MALLA

En el artículo anterior, publicado en la REVISTA del 1.º de junio, se estudiaban estructuras de nudos inamovibles, en las que, partiendo de las articulaciones o empotramientos de apoyo, se podían hallar las masas elásticas de todos los nudos; esto sucede sola-

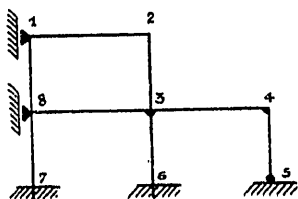


Fig. 1.

mente en las estructuras ramificadas o de malla abierta, en las que ningún grupo de barras forma un polígono cerrado. Tratemos ahora de resolver el problema de las "estructuras malla", en las que no se cumple la condición anterior. Consideremos la estructura de la figura 1, que es de nudos inamovibles, y vemos que por los métodos explicados no se pueden calcular las masas elásticas en los extremos de las barras del cuadro 1238. Para obviar esta dificultad suponemos un empotramiento en el nudo 3, con lo cual ya se pueden calcular todas las masas elásticas y efectuar la propagación de momentos; si la suma de momentos alrededor del nudo 3 fuese cero, dicho nudo quedaría equilibrado, y la hipótesis de empotramiento, o, lo que es lo mismo, de nulidad de giro, que hemos supuesto, se vería confirmada; pero si la suma de momentos alrededor del nudo no fuese cero, el nudo estaría desequilibrado, siendo preciso equilibrarlo con un momento igual y de signo contrario; este momento de equilibrio se repartirá proporcionalmente a las masas elásticas de las barras concurrentes en el nudo. Para calcular estas masas elásticas de-

bemos hacer una hipótesis de empotramiento en otro nudo, lo más alejado posible del 3, antes considerado; por ejemplo, en el 1, efectuamos la propagación y calculamos los momentos alrededor de 1; si no está equilibrado, lo equilibramos con la hipótesis anterior de empotramiento en 3, y así sucesivamente, hasta que el momento a equilibrar sea despreciable.

Este modo de operar, llevado al límite, es el que se emplea en el "Moment-Distribution Method", del profesor Hardy Cross (*Proc. Am. S. C. E.*, may 1930), en el cual se suponen empotramientos en todos los nudos, excepto en las articulaciones, y se comienza a equilibrar por el nudo que presente mayor desequilibrio. Por ejemplo, en la figura 2, calculados los momentos de empotramiento alrededor de todos los nudos, se comienza a equilibrar por el nudo 1, aplicando a dicho nudo un momento $-\Sigma M'$, que se distribuirá a las barras concurrentes proporcionalmente a sus masas elásticas, calculadas en la hipótesis de empotramiento perfecto en el otro extremo (excepto si es una articulación), es decir, proporcionalmente a: $e_{12} = 4K_{12}$, $e_{13} = 4K_{13}$, $e_{14} = 3K_{14}$, o, lo que es lo mismo, proporcionalmente a: K_{12} , K_{13} , $\frac{3}{4} K_{14}$. La técnica operatoria del método se puede reducir a la siguiente regla: "Se reparte el momento de equili-

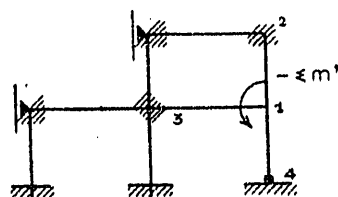


Fig. 2.

brio $-\Sigma M'$ de cada nudo, proporcionalmente a las rigideces K de las barras (reduciendo a $3/4$ las de las articuladas en el otro extremo); los coeficientes de transmisión son siempre $1/2$ (cero en las articuladas en el otro extremo); claro está que todo esto se refiere a barras de inercia constante.

Ejemplos de la manera de operar fueron perfec-

¹ Véase REVISTA de 1.º de junio último, pág. 209.

tamente expuestos por el ingeniero de Caminos señor Fernández Casado en la REVISTA del 1.º de abril.

Estructuras simétricas.—Cuando existe simetría se pueden simplificar notablemente los cálculos, ahorrándose las aproximaciones sucesivas.

Consideremos la barra de la figura 3, en la cual los momentos en los extremos son iguales y del mismo signo, con la convención de signos clásica, o sea de distinto signo con arreglo a la seguida en este artículo; el coeficiente de transmisión es, por tan-



fig. 3.

to, $c = -1$, y, según la fórmula establecida en el artículo anterior, $\varepsilon = 2K$.

La barra de la figura 4 presenta simetría de masas elásticas, es decir, $\Sigma_{12}\varepsilon = \Sigma_{21}\varepsilon = \varepsilon$. El momento M_{12} , que producirá una carga simétrica, es:

$$M_{12} = M'_{12} \times \frac{\varepsilon}{2K_{12} + \varepsilon} = \frac{M'_{12}}{1 + \frac{2K_{12}}{\varepsilon}}$$

en que M'_{12} es el momento de empotramiento perfecto. Esto se deduce rápidamente repartiendo M'_{12} en partes proporcionales a ε y $2K$.

Demostradas estas dos propiedades, la manera de

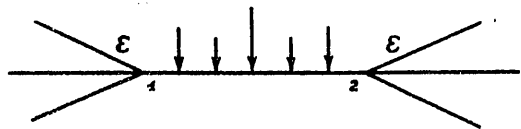


Fig. 4.

operar se reduce a lo siguiente: Calculados los momentos definitivos en los extremos de las barras cargadas, se reparten cambiados de signo a las otras barras concurrentes, y se efectúa la propagación del modo conocido en media estructura, teniendo en cuen-

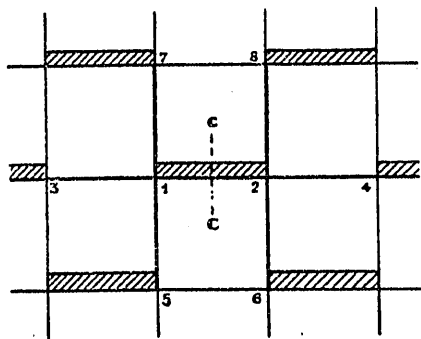


Fig. 5.

ta que la masa elástica en el extremo de una barra simétrica es $2K$.

Este modo de operar abrevia notablemente el cálculo, aun en casos de estructura de malla abierta.

Como inmediata aplicación de lo dicho calculemos el máximo momento positivo en el centro de una

viga de entramado de edificio. En la figura 5 se indica el estado de cargas que produce el máximo momento positivo en el centro de la viga 1-2. Si suponemos la estructura indefinida, los tramos de igual luz, las vigas de igual rigidez K_v y los pilares de rigidez K_p , tendremos que los ángulos de giro de los extremos de las barras 1-5, 1-3, 1-7, 2-8, 2-4, 2-6 serán iguales en cada barra (como en la figura 4), y, por tanto, las masas elásticas de las barras que concurren en 1 y 2 serán:

$$\varepsilon_{13} = \varepsilon_{24} = 2K_v \quad \varepsilon_{15} = \varepsilon_{17} = \varepsilon_{28} = \varepsilon_{26} = 2K_p$$

y las sumas,

$$\Sigma_{12}\varepsilon = \Sigma_{21}\varepsilon = 2 \times 2K_p + 2K_v = \varepsilon$$

Sustituyendo en la fórmula

$$M_{12} = M'_{12} \frac{\varepsilon}{2K_{12} + \varepsilon}$$

anteriormente establecida, tendremos

$$M_{12} = \frac{\rho l^3}{12} \frac{4K_p + 2K_v}{4K_p + 4K_v}$$

y el momento en el centro será

$$M_c = \frac{\rho l^3}{8} - M_{12} = \frac{\rho l^3}{24} \left[1 + \frac{\frac{K_v}{K_p}}{1 + \frac{K_v}{K_p}} \right]$$

que excede alrededor de un 10 por 100 del calcula-

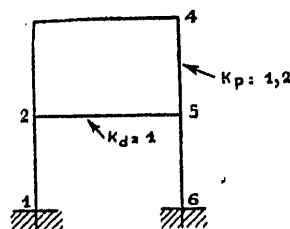


Fig. 6.

do en la hipótesis de articulación en los nudos 3, 7, 8, 4, 6, 5.

A las relaciones de rigideces de vigas y pilares 1/2, 1 y 2, entre las cuales están comprendidas las más corrientes en la práctica, corresponden los momentos en el centro

$$\frac{\rho l^3}{18} \quad \frac{\rho l^3}{16} \quad \frac{\rho l^3}{14,4}$$

en el límite para

$$K_p = 0 \quad M_c = \frac{\rho l^3}{12}$$

que corresponde al caso de viga continua indefinida.

Otra aplicación interesante es el pórtico de dos pisos en carga simétrica (fig. 6). Supongamos distintas cargas simétricas en las vigas 2-5 y 3-4, cuyos momentos de empotramiento perfecto sean $M'_{34} = -M'_{43} = C_2$ y $M'_{25} = -M'_{52} = C_2$, las rigideces de vigas y pilares se indican en la figura, el modo de operar precisa pocas aclaraciones.

1.º *Cálculo de las masas elásticas y coeficientes de transmisión.*

$$c_{21} = 0,5 \quad \epsilon_{21} = 4K_p = 4,8 \quad \epsilon_{25} = 2K_d = 2 \text{ (por la simetría),}$$

$$\Sigma_{23}\epsilon = \epsilon_{21} + \epsilon_{25} = 4,8 + 2 = 6,8 \quad c_{32} = \frac{1}{2 + \frac{6 \times 1,2}{6,8}} = 0,327$$

$$\epsilon_{32} = \frac{6 \times 1,2}{2 - 0,327} \quad \epsilon_{34} = 2K_d = 2 \quad c_{23} = \frac{1}{2 + \frac{6 \times 1,2}{2}} = 0,178$$

$$\epsilon_{23} = \frac{6 \times 1,2}{2 - 0,178} = 3,95$$

2.º *Carga en la viga 2-5.*—Por la fórmula establecida anteriormente,

$$M_{25} = C_2 \frac{\Sigma_{25}\epsilon}{2K_d + \Sigma_{25}\epsilon} = 0,813C_2$$

este momento cambiado de signo se reparte entre

$$\begin{aligned} \epsilon_{23} \quad \epsilon_{21} \quad M_{23} &= \frac{-0,813C_2}{3,95 + 4,8} \times 3,95 = -0,367C_2 \\ M_{21} &= -0,446C_2 \end{aligned}$$

se transmite a 3 y a 1,

$$M_{32} = -0,367 \times 0,178C_2 = -0,0652C_2 = -M_{34}$$

$$M_{12} = -0,5 \times 0,446C_2 = -0,223C_2$$

3.º *Carga en la viga 3-4.*—Por consideraciones análogas,

$$\begin{aligned} M_{34} &= C_3 \frac{\epsilon_{32}}{2K_d + \epsilon_{32}} = 0,682C_3 \quad M_{32} = -0,682C_3 \\ M_{23} &= -0,327 \times 0,682C_3 = -0,223C_3 \end{aligned}$$

se reparte con signo cambiado entre ϵ_{25} y ϵ_{21}

$$\begin{aligned} M_{25} &= 0,0656C_3 \quad M_{21} = 0,1574C_3 \\ M_{12} &= 0,5M_{21} = 0,0787C_3 \end{aligned}$$

Superponiendo los dos casos de carga:

$$\begin{aligned} M_{34} &= 0,0652C_2 + 0,682C_3 \\ M_{25} &= 0,813C_2 + 0,0656C_3 \\ M_{23} &= -0,367C_2 - 0,223C_3 \\ M_{21} &= -0,446C_2 + 0,1574C_3 \end{aligned}$$

ESTRUCTURAS DE NUDOS AMOVIBLES

Vamos a estudiar las estructuras en que no exista imposibilidad mecánica de desplazamiento lineal de los nudos. El no tener en cuenta estos desplazamientos, y estudiar la estructura como si fuese de nudos inamovibles, puede conducir a un falseamiento tal de las hipótesis de partida del cálculo, que dé lugar a

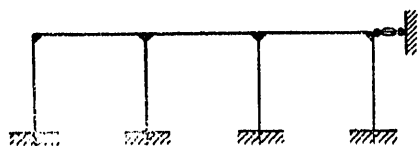


Fig. 7.

errores inaceptables. En cambio, en otros casos, como, por ejemplo, el pórtico de muchos tramos y carga casi simétrica, el error cometido puede ser despreciable.

Grado de movilidad de los nudos de una estructura. Llamaremos "grado de movilidad" de los nudos de

una estructura al número preciso de bielas de apoyo que haya que aplicar a sus nudos para convertirla en otra de nudos inamovibles.

El pórtico múltiple de la figura 7 es de primer grado de movilidad, pues añadiendo la biela de apoyo

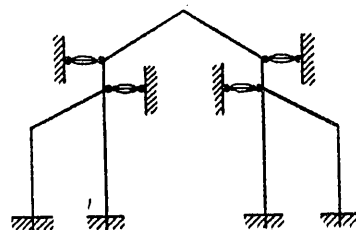


Fig. 8.

horizontal a su nudo extremo derecho quedan todos sus nudos inamovibles.

La estructura en basílica de la figura 8 es de cuarto grado de movilidad, pues es preciso añadir las cuatro bielas indicadas; la estructura de la figura 9 es de segundo grado.

Resolución de una estructura de nudos amovibles. Para resolver una estructura de nudos amovibles, la

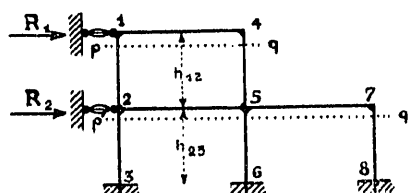


Fig. 9.

convertiremos primeramente en otra de nudos inamovibles mediante la aplicación del número preciso de bielas de apoyo; se resuelve la estructura en esta hipótesis de inamovilidad de nudos, se calculan las reacciones que se ejercen sobre la estructura por intermedio de las bielas de apoyo, y, finalmente, se halla

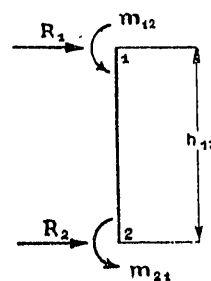


Fig. 10.

un sistema de desplazamiento de nudos tal, que anule las reacciones antes calculadas, lográndose de ese modo el equilibrio interno de la estructura.

Este segundo paso es en todo equivalente al primero; en el primero introducíamos empotramientos en los nudos para impedir sus giros; en el segundo, bielas de apoyo para impedir los desplazamientos; allí permitimos luego giros que equilibrasen los nudos en cuanto al momento, mediante la aplicación de momentos $\Sigma M'$ iguales al momento de disequilibrio cambio de signo; aquí permitimos desplazamientos que equilibren los nudos en cuanto a la proyección de esfuerzos, lo que equivale a la aplicación de fuerzas

iguales y contrarias a las reacciones que se desarrollaban por intermedio de las bielas postizas.

Cálculo de las reacciones.—El cálculo de las reacciones que se ejercen sobre la estructura por intermedio de las bielas de apoyo es un problema de Estática que no requiere especial explicación. Sin embargo, por la convención de signos adoptada en estos artículos, y para evitar equivocaciones, conviene que se haga alguna aclaración.

Consideremos la estructura de la figura 9, en la cual conocemos los momentos en los nudos. Queremos determinar las reacciones R_1 y R_2 . Estas reacciones se compondrán de un sumando isostático, debido a las cargas horizontales, y de otro hiperestático, debido a los momentos que aparecen en los nudos por la continuidad de la estructura.

En la figura 10, tomando momentos respecto a 1 y 2, deducimos:

$$R_1 = \frac{M_{12} + M_{21}}{h_{12}} \quad R_2 = -\frac{M_{12} + M_{21}}{h_{12}}$$

(Téngase en cuenta que M_1 y M_2 son momentos-reacción de los nudos sobre la barra, positivos cuando actúan en sentido contrario a las agujas de un reloj.)

En la estructura de la figura 9, supuesto un corte pq :

$$R_1 = \frac{M_{12} + M_{21} + M_{45} + M_{54}}{h_{12}}$$

Supuesto un corte $p'q'$:

$$R_1 + R_2 = \frac{M_{23} + M_{32} + M_{56} + M_{65} + M_{78} + M_{87}}{h_{23}}$$

En el caso más general de pilares no paralelos, la determinación de las reacciones es algo más complicada, pues no sólo son función de los momentos de cabeza de pilar, sino también de los que aparecen en los extremos de las vigas. Para no equivocarse, es conveniente suponer la estructura de nudos articulados con los momentos actuando en los extremos de barra, y en esta hipótesis determinar las reacciones.

Descomposición de un sistema de desplazamientos. Tenemos que hallar los momentos ocasionados por un sistema de desplazamientos de nudos. Un sistema de desplazamientos presenta tantas incógnitas como elevado sea el "grado de movilidad" de la estructura. Estas incógnitas son los desplazamientos posibles en la dirección de las bielas de apoyo añadidas. Un sistema de desplazamientos de la estructura representada en la figura 11 estaría definido por Δ_1 y Δ_2 , desplazamientos de los nudos 1 y 2 en las direcciones de las bielas aplicadas a dichos nudos.

La deformación total de la estructura (representada en la figura 11 e) se puede lograr superponiendo las dos deformaciones parciales 11 b y 11 d. En la primera de las cuales, $\Delta_1 = \Delta_1$; $\Delta_2 = 0$, y en la segunda, $\Delta_1 = 0$; $\Delta_2 = \Delta_2$. Estas deformaciones elementales se efectuarán en dos pasos. En el primero (11 a y c) se supondrán empotramientos que impidan el giro de las cabezas de los pilares (que no estén articulados); de este modo aparecerán en los nudos momentos desequilibrados. En el segundo paso (11 b

y d) se permitirá el giro de los nudos, equilibrándolos con momentos iguales y de signo contrario, que se distribuirán y transmitirán con arreglo a las masas elásticas y coeficientes de transmisión calculados para la primera etapa del cálculo, en que se suponían nudos inamovibles. No debe sorprender el que las masas elásticas no varíen con los desplazamientos, pues al final de cada paso los nudos vuelven a ser inamovibles, y por el principio de superposición se conservarán constantes los factores de proporcionalidad.

Esto se complica algo más cuando los pilares no son todos paralelos. En la figura 12 se indica un caso general; tenemos que hallar los desplazamientos de todos los nudos correspondientes al desplazamiento Δ_2 del nudo 2. Como los acortamientos de las barras debidos a la curvatura de las elásticas son despreciables, por ser de orden superior, se puede considerar la estructura, en cuanto al desplazamiento de los nudos, como si éstos estuviesen articulados. Para el cálculo de los desplazamientos estudiaremos la estructura como una "cadena cinemática" con un grado de libertad; de este modo, por los conocidos principios de cinemática, hallaríamos los centros instantáneos de rotación C_{23} y C_{35} de las barras 2-3 y 3-5, los ángulos de giro α y β de dichas barras y los despla-

zamientos Δ_3 y Δ_5 en función de Δ_2 . Con todos estos datos podemos suponer una deformación geoméricamente posible, como la que se indica en la figura 12 c, en la cual se conservan los ángulos que forman las barras alrededor de cada nudo, y calcularíamos, como se indicará a continuación, los momentos en extremo de barra correspondientes a estos giros y desplazamientos. Si resultasen cero las sumas de momentos alrededor de cada nudo, estarían éstos equilibrados, y la deformación supuesta, además de ser posible "geoméricamente", lo sería tam-

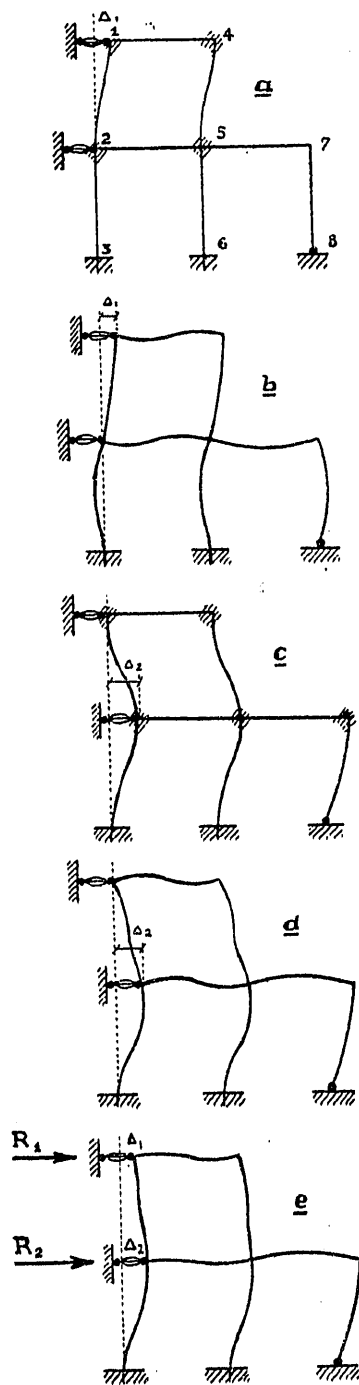


Fig. 11.

bién "mecánicamente". Si resultasen los nudos desequilibrados, se equilibrarían distribuyendo y transmitiendo los momentos de equilibrio del modo conocido.

Sólo nos resta establecer fórmulas que den los momentos en los extremos de una barra en función de los

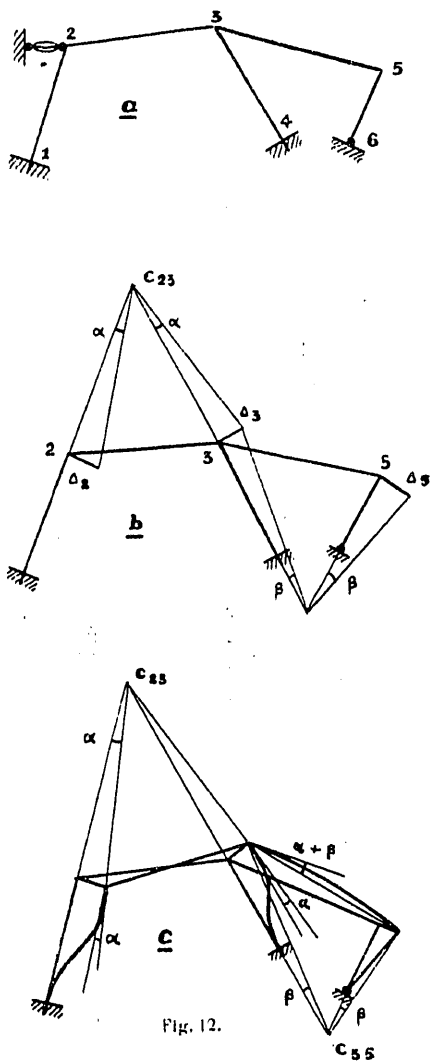


Fig. 12.

ángulos de giro de sus extremos respecto a su primitiva dirección y del desplazamiento relativo de sus extremos. Estas fórmulas son las ecuaciones del "Slope-Deflection Method".

El caso general está representado en la figura 13, y es el de una barra 1-2, en que su extremo 2 ha sufrido un desplazamiento $\Delta = \alpha l$, y sus extremos, giros θ_1 y θ_2 respecto a la dirección primitiva 1-2. Los momentos M_1 y M_2 indicados en la figura son positivos, pues son momentos-reacción de nudo sobre barra y, por tanto, de sentido contrario a las agujas de un reloj.

Con estas hipótesis las ecuaciones de barra del "Slope-Deflection Method" son:

$$M_1 = 2K_{12}(2\theta_1 + \theta_2 + 3\alpha_{12}) \quad M_2 = 2K_{12}(\theta_1 + 2\theta_2 + 3\alpha_{12})$$

Si el extremo 1 está articulado,

$$M_1 = 0 \quad \text{y} \quad M_2 = 3K_{12}(\theta_2 + \alpha_{12})$$

Estas ecuaciones se establecen rápidamente partiendo del teorema de Mohr, calculando los giros $\theta_1 + \alpha_{12}$ y $\theta_2 + \alpha_{12}$ en función de M_1 y M_2 , y despejando luego M_1 y M_2 .

Casos particulares interesantes son los representados en la figura 14. En el primero, 14a, se representa un pilar, cuyos extremos, perfectamente empotrados, sufren un desplazamiento relativo $\Delta = \alpha l$ en el sentido de las agujas de un reloj; por tanto, $\theta_1 = \theta_2 = 0$, y $m_1 = m_2 = 6K_{12}\alpha_{12}$. En el segundo, 14b, el extremo 1 está articulado; por tanto, $\theta_2 = 0$ y $M_2 = 3K_{12}\alpha_{12}$.

En el caso más sencillo y más frecuente en que todos los pilares sean paralelos, sólo se utilizarán estos dos últimos casos. En el caso concreto de la figura 11, como los desplazamientos Δ son iguales en

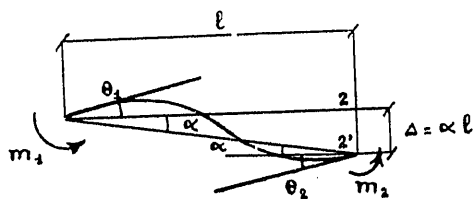


Fig. 13.

cada una de las etapas para todas las cabezas de pilar, si suponemos en los extremos del pilar 1-2 (11c) momentos

$$M_{12} = M_{21} = -6K_{12} \frac{\Delta_2}{h_{12}} = 100X_2$$

los correspondientes en los extremos de los otros pilares serán directamente proporcionales a sus

$$\frac{K}{h} \quad \text{así} \quad M_{56} = M_{65} = 100X_2 \frac{K_{56}}{K_{12}} \frac{h_{12}}{h_{23}}$$

y por excepción,

$$M_{78} = 50X_2 \frac{K_{78}}{K_{12}} \frac{h_{12}}{h_{23}}$$

pues está articulado en el otro extremo.

Efectuadas las propagaciones en las dos hipótesis (11a y c), los momentos en los nudos serán funcio-

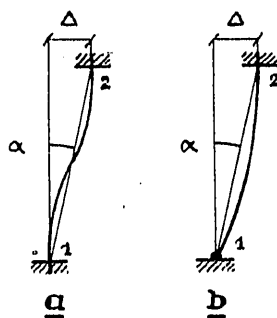


Fig. 14.

nes lineales de X_1 y X_2 , y lo mismo las reacciones $R'_1 = A_1X_1 + B_1X_2$; $R'_2 = A_2X_1 + B_2X_2$. Calculados los coeficientes A_1 , A_2 , B_1 y B_2 , establecemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$A_1X_1 + B_1X_2 + R_1 = 0 \quad A_2X_1 + B_2X_2 + R_2 = 0$$

en que R_1 y R_2 son las reacciones correspondientes al caso de inamovilidad de nudos. Este sistema condiciona el equilibrio externo de la estructura.

En este sistema de ecuaciones los coeficientes de las incógnitas no dependen del estado de cargas, son constantes de la estructura; solamente dependen del estado de cargas los términos independientes, y, por tan-

to, las incógnitas serán funciones lineales de los "términos de carga" R_1 y R_2 .

$$X_1 = D_1 R_1 + E_1 R_2 \quad X_2 = D_2 R_1 + E_2 R_2$$

Calculados X_1 y X_2 , sustituimos sus valores en las funciones lineales que representan los momentos en los extremos de barra, y de este modo hemos calculado las correcciones que por movimiento de nudos es preciso añadir a los momentos calculados en la hipótesis de inamovilidad.

Asientos accidentales de apoyos.—En el estudio de las estructuras continuas en que sean presumibles asientos de los apoyos, deben tenerse éstos muy en cuenta en el cálculo, por poder ser su efecto más importante que el mismo de las sobrecargas.

El estudio se hace con suma facilidad por este método. En la figura 15 se representa una viga continua, y queremos calcular la ley de momentos que producirá un asiento δ_3 del apoyo 3; para lo cual pasamos a la deformación definitiva (15 c) en dos etapas. En la primera (15 b) suponemos empotramientos que impidan los giros de 2 y 4, y un tercer empotramiento en 3 que descienda sin girar; en esta primera etapa aparecerán los siguientes momentos:

$$M_{23} = M_{32} = 6K_{23}\alpha_{23} = 6K_{23}\frac{\delta_3}{l_{23}}$$

$$M_{34} = M_{43} = -6K_{34}\alpha_{34} = -6K_{34}\frac{\delta_3}{l_{34}}$$

Estas expresiones se han establecido en el párrafo anterior. Los dos últimos momentos son negativos, por

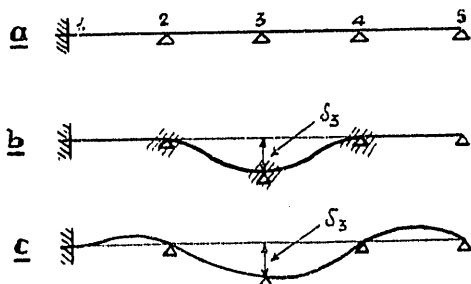


Fig. 15.

ser el desplazamiento relativo de 3 y 4 de sentido contrario al giro de las agujas de un reloj.

En la segunda etapa (15 c) equilibramos los momentos desequilibrados que aparecerán en los nudos (M_{23} en el nudo 2, $M_{32} - M_{34}$ en el nudo 3, y M_{43} en el nudo 4), distribuyendo y transmitiendo los momentos de equilibrio; esta segunda etapa equivale a suprimir los empotramientos, permitiendo los giros.

Si la estructura presentase pilares, como la de la figura 18, en la primera etapa descendería el pilar 2-5 sin girar sus cabezas; además se supondría un empotramiento en el nudo 3 que impidiese su giro, y luego en la segunda etapa permitiríamos los giros.

Si la estructura fuese de nudos amovibles se convertiría en una de nudos inamovibles, introduciendo luego las correcciones de movilidad.

Es preciso advertir que las K que aparecen en las expresiones de los momentos tienen la dimensión de un momento, no pudiendo asignárseles el valor pro-

porcional que habíamos utilizado en el cálculo de masas elásticas y coeficientes de transmisión.

Variaciones de temperatura, retracción de fraguado, etc.—Aparte de las causas mecánicas, se presentan en el cálculo de las estructuras otras causas, que se pueden reducir a las siguientes: variaciones de temperatura, retracción de fraguado y variación del estado higrométrico.

Es costumbre en los Reglamentos oficiales asimilar

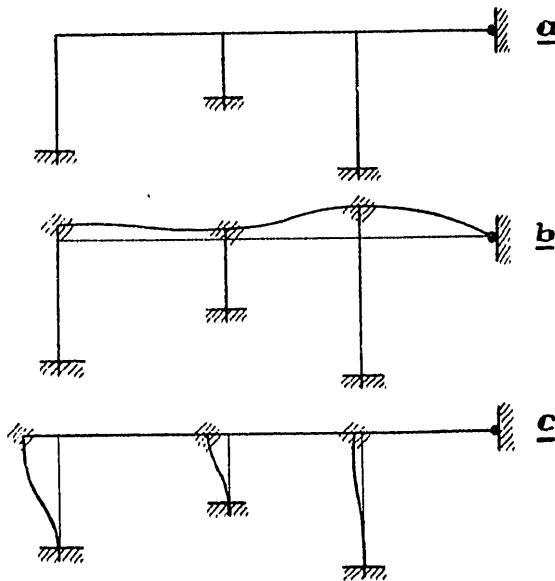


Fig. 16.

todas estas causas a una variación de temperatura uniforme a lo largo de cada pieza y en su sección transversal, y además, en ciertos casos, se supone un desnivel térmico $t_u - t_o = \Delta t$ entre el intradós y el trasdós de las piezas, con variación lineal intermedia. Esto último para piezas de sección constante equivale a un estado de cargas que ocasionara una ley uniforme de momentos flectores, y por tanto, momentos de empotramiento ficticio, $M = EI \frac{\alpha \Delta t}{d}$, en que α es el coeficiente de dilatación y d el peralte de la pieza. Como la pieza no varía de longitud en esta hipótesis, el problema no se diferencia en nada de los ya explicados.

Sólo nos queda por resolver el otro problema: el de una variación de temperatura uniforme a lo largo de cada pieza. Consideremos el caso de la figura 16:

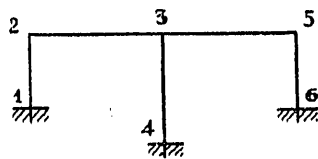


Fig. 17.

las variaciones de temperatura de cada pieza ocasionarán variaciones de longitud $\Delta l = \alpha l$ de la misma, que podremos calcular fácilmente. Hacemos dos hipótesis sucesivas. En la primera hipótesis sólo se suponen variaciones de longitud de los pilares, y llegamos a la deformación definitiva en dos etapas: en la primera (16 b) las cabezas de los pilares se desplazan sin girar, y en la segunda se permiten los giros. En la segunda hipótesis, sólo se suponen variaciones

de longitud de los dinteles; la primera etapa se indica en 16 c. La manera de llevar el cálculo no necesita mayor explicación, por ser en todo análoga a la indicada en el párrafo "Asientos accidentales de apoyos".

Si la estructura es de nudos amovibles, deberemos

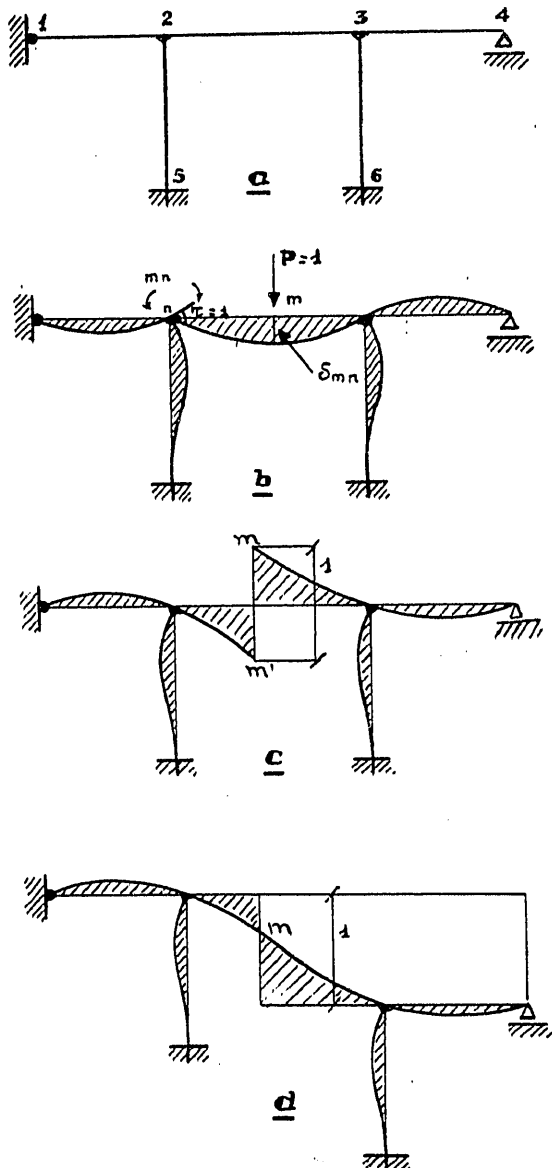


Fig. 18.

transformarla en otra de nudos inamovibles, y finalmente introducir la corrección de movilidad. En casos simétricos, como el de la figura 17, aunque la estructura es de nudos amovibles, se sabe que para variaciones de temperatura simétricas el nudo 3 no sufre desplazamientos, pudiéndose, por tanto, abreviar los cálculos.

Líneas de influencia.—Fundándose en el teorema de Betti, se pueden determinar las líneas de influencia como elásticas de deformaciones virtuales.

El enunciado del teorema de Betti es el siguiente: "Si consideramos dos deformaciones de una estructura elástica correspondientes a dos sistemas de cargas externas, el trabajo de las cargas del primer sis-

tema, si a sus puntos de aplicación se atribuyen los desplazamientos que caracterizan a la segunda deformación, es igual al trabajo de las cargas del segundo sistema si a sus puntos de aplicación se atribuyen los desplazamientos que caracterizan a la primera deformación."

Consideremos la estructura de la figura 18 a, en la que queremos determinar la línea de influencia del momento M_{23} , y vamos a demostrar que es la elástica de la deformación ocasionada por dos momentos M_n iguales y de signo contrario que actúan sobre la estructura 18 b (derivada de la 18 a, articulando el extremo 2 de la viga 2-3), y tales, que el giro relativo de dichos momentos sea $\tau = 1$. Consideremos dos sistemas de cargas actuando sucesivamente sobre la estructura 18 b: el primero formado por la carga unidad $P = 1$ sobre el punto m y por dos momentos iguales y contrarios de la misma magnitud que el M_{23} , que aparecería en la estructura 18 a al actuar allí la carga $P = 1$; este sistema de cargas no producirá giro relativo en 2. El segundo sistema de cargas estará formado únicamente por los momentos M_n , tales que en la estructura 18 b produzcan el giro relativo $\tau = 1$; este sistema producirá en m la flecha δ_{mn} . Por el teorema enunciado anteriormente,

$$1 \cdot \delta_{mn} + M_{23} \cdot 1 = M_n \cdot 0 \quad \text{o sea} \quad M_{23} = -\delta_{mn}$$

se demostraría análogamente que la deformación representada en la figura 18 c, en que los bordes m y m' de un corte en m a la viga 2-3 han sufrido un desplazamiento relativo igual a 1, permaneciendo sus tangentes paralelas, es la línea de influencia del esfuerzo cortante en m . Esta deformación se puede lograr más fácilmente haciendo descender la unidad los apoyos 6 y 4; esto se indica en la figura 18 d; como se advierte en la figura, esta deformación sirve para línea de influencia de todos los puntos de la viga 2-3.

Tanto en uno como en otro caso se pueden determinar fácilmente los momentos en extremo de barra. Las elásticas, como son producidas por leyes trapeziales de momentos, se podrán dibujar rápidamente utilizando los números

$$w_D = \frac{x}{l} - \frac{x^3}{l^3}$$

que aparecen tabulados en los tratados alemanes de *Estática de las Construcciones* (ver, por ejemplo, tablas del *Müller-Breslau* y del *Beton-Kalender*, 1934, página 248).

Este último párrafo de las líneas de influencia no se desarrolla más por no permitirlo los límites de extensión que queremos imponer a estos dos artículos, en que hemos tratado de desarrollar un método sencillo y completo aplicable a las estructuras reticuladas, abarcando los siguientes temas: estructuras de nudos inamovibles (ramificadas y de malla cerrada), correcciones de movilidad de nudos, asientos accidentales de apoyos, variaciones de temperatura y retracción de fraguado, líneas de influencia.