

La lemniscata de Bernouilli en las curvas de las carreteras¹

II

Curvas de transición en el zigzag del kilómetro 64 de la carretera de Salamanca a Cáceres

Esta carretera forma parte de las rutas directas entre las poblaciones del litoral cantábrico y la región occidental de Andalucía a través del antiguo Reino de León y de Extremadura.

Después de cruzar tres veces la divisoria Duero-Tajo en un trayecto de unos 10 km (entre el 52 y el 62), sin que de ello se den cuenta la mayoría de las personas que por aquel tramo transitan, la carretera tenía una traza muy sinuosa y un perfil muy inclinado para subir al puerto La Vallejera, situado en una estribación de la divisoria principal, y bajar después a Béjar. En la subida había cinco zigzags con radio muy pequeño y ramas con rasantes de gran inclinación, todo lo cual dificultaba extraordinariamente la circulación, tanto por la obligada reducción de velocidad como por el riesgo de accidente; el plano que se acompaña (fig. 1) es suficiente por sí solo para confirmar lo que se acaba de decir y para justificar la variación de trazado proyectada el año 1927 y construída el 1930.

El nuevo trazado tiene diez curvas, todas de transición total; la número 4 y la número 5 forman parte del zigzag, que ha sido absolutamente necesario establecer, y son las únicas de que se tratará en lo que sigue, dado el objeto de estas notas.

La configuración del terreno ha determinado la posición de los vértices V_4 y V_5 (fig. 2), y ha permitido que sean idénticos los ángulos en ellos de las alineaciones rectas correspondientes; por tal circunstancia, las características de las dos curvas son las mismas; por lo tanto, lo que se exponga respecto de

La configuración del terreno, al fijar entre límites muy próximos la situación de los puntos de tangen-

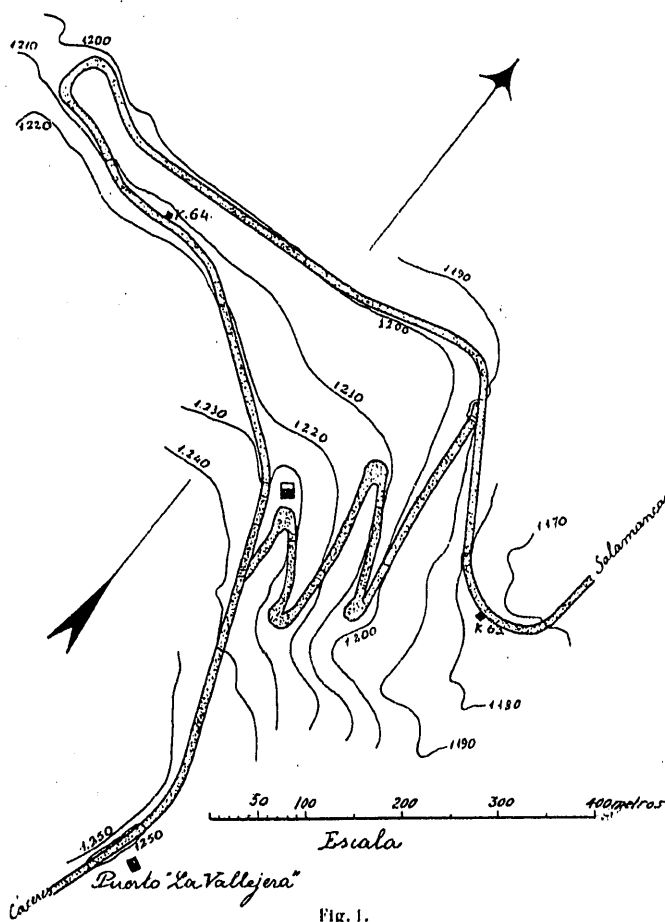


Fig. 1.

cia de entrada y de salida, así como el de la bisectriz, ha impedido determinar la constante de la lemniscata de Bernouilli, que ha de constituir la curva de transición en función de la velocidad de seguridad con la que han de circular por aquella los vehículos modernos de tracción mecánica, que es lo correcto. Después de algunos tanteos se eligió la lemniscata

$$\rho = 30 \sqrt{\sin 2\alpha}$$

Como el ángulo Δ de las dos alineaciones rectas que concurren en V_4 es $102^\circ 15'$, el polar correspondiente al punto de la bi-

sectriz será $\frac{\Delta}{6} = 17^\circ 2' 30''$.

Las magnitudes de la tangente y de la bisectriz se determinaron con auxilio de la tabla calculada por el



Carretera de Salamanca a Cáceres, kilómetros 64 y 65. Subida al puerto de La Vallejera. Tramo antiguo, hoy día abandonado.

una de ellas es aplicable a la otra, sin variación alguna.

¹ Véase el número anterior, página 256.

ayudante de Obras públicas D. Miguel Guerra para la lemniscata fundamental

$$\rho = 100 \sqrt{\sin 2\alpha}$$

tabla en la que los valores de Δ crecen de medio en medio grado a partir de $30'$ y terminan en 130° . El dibujo de la curva en el papel se hizo con plantilla de cartulina.

La longitud del arco de lemniscata limitado por

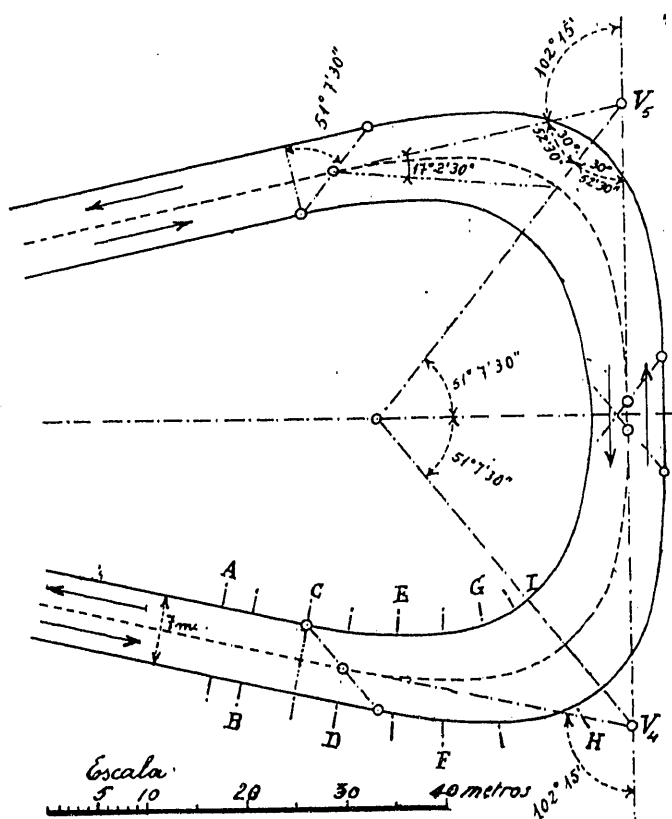


Fig. 2.

uno de los puntos de tangencia y por el de la bisectriz, puede calcularse con la fórmula empírica propuesta por Dawson después de un detenido estudio, que es

$$L = \frac{\sqrt{2k\alpha}}{\sqrt{\sin 2\alpha}} \cos m\alpha$$

en la que m es una constante función del valor de α . Para $\alpha = 17^\circ 2' 30''$, $m = 0,1824$, y por lo tanto, $L = 77,80$ m.

La fórmula que permite calcular el valor del radio mínimo R es

$$R = \frac{k^2}{3\rho}$$

Para reducir todo lo posible los cálculos que lleva consigo el establecimiento de toda curva de transición constituida por un arco de lemniscata, Dawson ha preparado unas tablas, en las que para la de constante $k = 10,3648$ están los valores de ρ , L , R y $\frac{L}{R}$, que corresponden a los de α , comprendidos entre $0^\circ 00'$ y $45^\circ 00'$, los cuales crecen de minuto en mi-

nuto hasta 4° , y de cinco en cinco minutos después. Esta tabla tiene la complicación inherente al valor fraccionario de k ; en cambio, facilita mucho el planteo de la curva con coordenadas polares.

Para la lemniscata fundamental,

$$\rho = 100 \sqrt{\sin 2\alpha}$$

el ayudante antes mencionado ha calculado la tabla de coordenadas rectangulares; los valores de x son los números enteros de 0 a 80,6; a su derecha hay una columna con los valores correspondientes de y y otra con los del ángulo de la normal a la curva con el radio polar. Esta tabla ha sido ampliada por el autor de estas notas con los valores de ρ , α , L , R , R_m (radio medio) y $\frac{L}{R}$; en lo sucesivo se le denominará "Tabla Gucoli".

Para su aplicación hay que empezar por calcular el valor de x que corresponde al punto de la bisectriz, del cual son conocidas sus coordenadas polares:

$$x = \rho \cos \alpha = k \sqrt{\sin 2\alpha} \cos \alpha$$

Como $k = 30$ m y $\alpha = 17^\circ 2' 30''$, $x = 21,51$ m, el correspondiente en la lemniscata fundamental es

$$X = \frac{100}{30} \times 21,51 = 71,70 \text{ m}$$

Los demás elementos geométricos de esta última curva tienen los valores que siguen, después de hechas las necesarias interpolaciones entre los que figuran en las tablas:

$Y = 22,10$ m	$\frac{L'}{R'} = 1,75$ m
$\rho' = 75,05$ m	$T' = 98,80$ m (tangente)
$L' = 77,80$ m	$B' = 35,00$ m (bisectriz)
$R' = 44,40$ m	
$R_m = 212,00$ m	

La multiplicación de estos valores por 0,3 da por resultado los análogos en la lemniscata

$$\rho = 30 \sqrt{\sin 2\alpha}$$

Son los siguientes:

$x = 21,50$ m	$R_m = 64,00$ m
$y = 6,65$ m	$T = 29,65$ m
$\rho = 22,50$ m	$B = 10,50$ m
$L = 23,35$ m	$\frac{L}{R} = 1,75$ m
$R = 13,35$ m	

Entre la longitud L de la curva de transición, el radio mínimo R y la velocidad de seguridad V existe la relación siguiente:

$$L = \frac{0,0703 V^3}{R}$$

de la cual se puede deducir el valor de V , por ser conocidos L y R ; este valor es $V = 16,50$ km/hora.

La fórmula de la relación centrífuga es

$$C = \frac{V^2}{128R}$$

su valor en el punto de la bisectriz será

$$C = \frac{16,5^2}{128 \times 13,35} = 0,16$$

lo cual quiere decir que el de la fuerza centrífuga es $0,16P$, siendo P el peso del vehículo. Como el coeficiente de rozamiento transversal de un firme de piedra partida húmedo es $0,28$, no habrá peligro de deslizamiento lateral, aun sin peralte, y mucho menos de vuelco, dadas las magnitudes corrientes del ancho de vía y de altura del centro de gravedad sobre el pavimento en la gran mayoría de los automóviles. Puede llegar la velocidad a 20 km/hora sin que hagan acto de presencia aquellos dos riesgos, aunque con el inconveniente de que, por ser pequeña para la misma la longitud de la transición, se producirán en el vehículo sacudidas y movimientos bruscos, molestos nada más para los ocupantes del mismo.

Las curvas de las aristas de los paseos son lemnis-

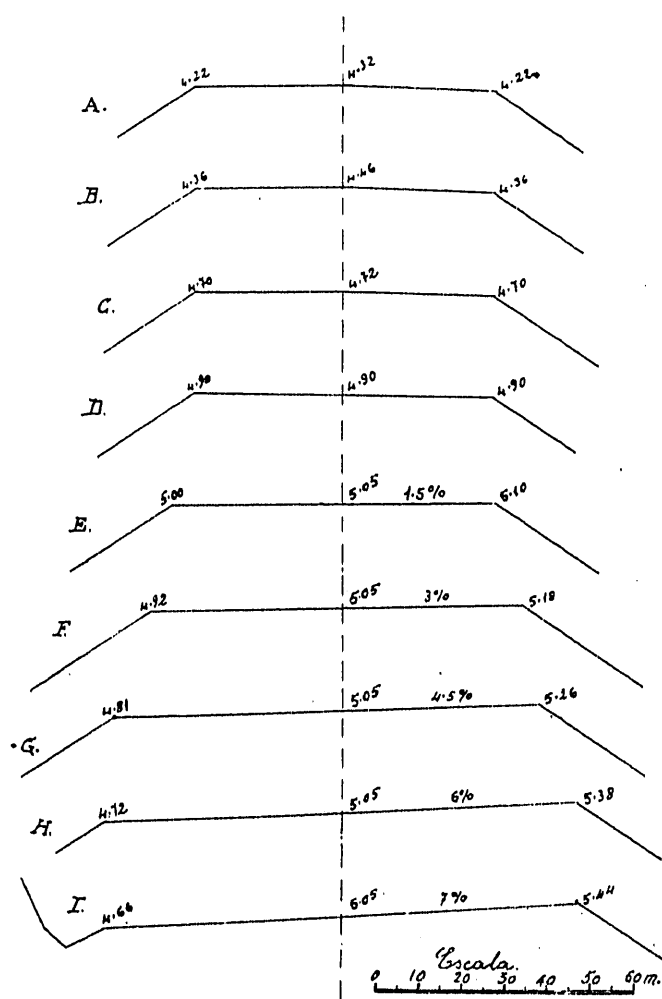


Fig. 3.

catas idénticas a la del eje de la carretera, razón por la cual el ancho de la explanación es variable, creciente desde la sección de entrada a la curva hasta la bisectriz, y decreciente desde ésta hasta la sección de salida; es lo mismo que correr paralelamente a sí misma en la dirección de la bisectriz la curva del eje hasta que sea tangente a las aristas exteriores primero, y a las interiores después, de los paseos de las

dos alineaciones rectas que concurren en el vértice de la curva que enlazan. El ancho de la carretera en recta es 7 m; en la bisectriz será

$$l' = l \sec \frac{\Delta}{2} = 7 \sec \frac{102^\circ 15'}{2} \quad l' = 7 \times 1,59 = 11,15 \text{ m}$$

con el cual pueden pasar por la curva y cruzarse automóviles de 10 m de longitud y ancho de $2,50$ m.

Perfiles Longitudinales.

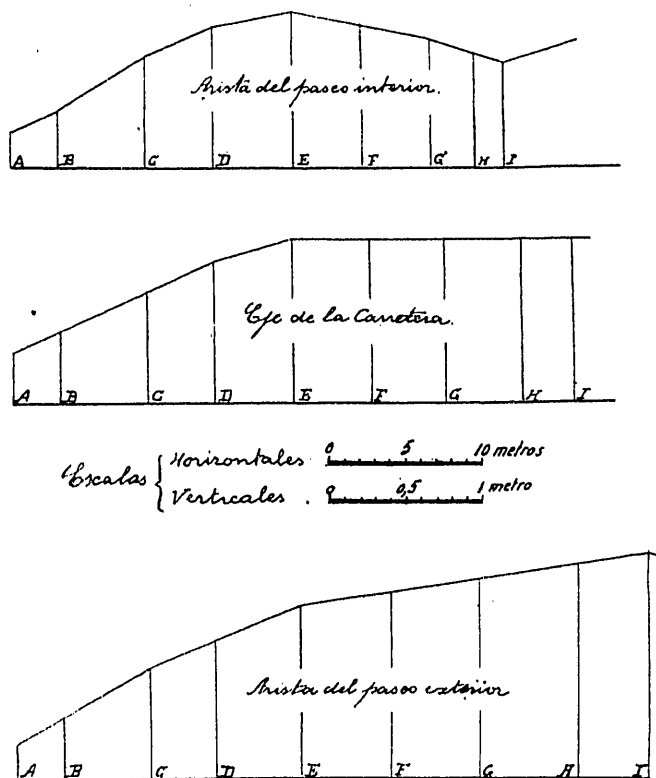


Fig. 4.

Por lo que se refiere a peralte, se adoptó el 7 por 100 en la bisectriz, con decrecimiento uniforme hasta las secciones de entrada y de salida de la curva, en la que es nulo.

Como el valor de la relación centrífuga en la bisectriz C es $0,16$, el de la componente tangencial de la fuerza centrífuga en el mismo sitio será

$$(0,16 - 0,07)P = 0,09P$$

No existirá peligro de deslizamiento lateral, porque el coeficiente de rozamiento transversal del pavimento húmedo es $0,28$, resultando un coeficiente de seguridad de 3 . Con velocidad de 11 km/hora aquella componente es nula, y con la de 19 el coeficiente de seguridad sería 2 , con el inconveniente antes indicado de que la longitud de la transición es insuficiente.

En el caso particular examinado la variación del peralte por metro lineal de longitud de lemniscata en el eje de la carretera es $0,3$ por 100 .

La figura 2 es un detalle del zigzag completo; en la figura 3 se han dibujado varios perfiles transversales, y en la figura 4 los perfiles longitudinales del eje de la carretera y de las aristas de los paseos correspondientes a media curva. El primero coincide

con la rasante del perfil del proyecto; el de la arista interior tiene un punto bajo en la bisectriz; el de la exterior le tiene alto, y, por lo tanto, en la zona de circulación externa la superficie de rodadura es convexa, y en la interna, cóncava.

Con las características que tiene la curva descrita la fuerza centrífuga no entrará en acción de una manera brusca y repentina con todo su valor desde que



Zigzag del tramo nuevo en la subida al puerto de La Vallejera

el vehículo ingresa en aquella, con las consiguientes molestias, riesgo de accidente, etc.; adquirirá dicho valor, por el contrario, de manera creciente y gradual, a medida que el radio de la curva disminuye, en la primera mitad de la curva, y se reducirá a cero en forma análoga en la segunda, siempre que el valor de la velocidad sea inferior a 16,5 km/hora; pueden recorrer el zigzag y cruzarse o adelantarse en él vehículos de 10 m de longitud y ancho de 2,50 m, sin riesgo de deslizamiento lateral ni de vuelco.

Interrogados varios conductores de automóvil sobre sus impresiones respecto de las curvas de la *nueva carretera* para subir al puerto La Vallejera, contestaron algunos que "*las curvas tenían algo nuevo que facilitaba el paso por ellas; que no eran como las demás*".

El replanteo al contratista de toda la variación del trazado de los km 64 y 65 de la carretera de Salamanca a Cáceres le hizo, con toda corrección y minuciosidad, el mencionado ayudante de Obras públicas, D. Miguel Guerra. Pedidas a éste algunas explicaciones sobre el particular, las ha redactado muy completas y detalladas, en forma, además, tan clara y precisa y con tal carácter de generalidad, que nada mejor que reproducirlas íntegramente a continuación:

Replanteo de la lemniscata de Bernouilli sobre el terreno

Con todas las operaciones a realizar para ello pueden formarse cuatro grupos:

- Establecimiento del trazado poligonal del eje de la carretera y de las aristas de sus dos paseos.
- Elección de la constante a .
- Cálculo de las tangentes y de la bisectriz de la curva; y
- Replanteo, por abscisas y ordenadas sobre la tangente, de cada una de las ramas de la lemniscata.

a) Puestos los vértices del eje de la carretera, se trazan sus paralelas a uno y otro lado, a distancias iguales al valor del semiancho normal de la vía, señalando con la mayor exactitud posible los vértices del trazado poligonal de la arista de cada uno de los paseos, pues sobre ellos se han de efectuar las demás operaciones.

b) Las ecuaciones

$$T = a \sqrt{\frac{\cos \frac{\alpha}{3}}{\sin \frac{\alpha}{3}}} \quad B = a \sqrt{\frac{\sin \frac{\alpha}{6}}{\cos \frac{\alpha}{2}}}$$

$$R_{\min.} = a \frac{1}{3 \sqrt{\sin \frac{\alpha}{3}}}$$

nos dicen que el valor de a puede hacerse depender directamente del que se asigne a la tangente, a la bisectriz o al radio de la curva en el vértice; en cualquiera de los tres casos el problema tiene fácil y rápida solución sobre el terreno. Si se ha de tomar como entrada la tangente o la bisectriz, haremos uso de la tabla número 1, en la que aparecen los valores de esos elementos para los diferentes de α en la lemniscata

$$p = 100 \sqrt{\sin \frac{\alpha}{3}}$$



Primera curva del zigzag del tramo nuevo

siendo, como hemos visto, directamente proporcionales a y T ó B , bastará multiplicar por 100 la razón de la tangente o bisectriz, dada a la tangente o bisectriz tabular, para obtener el valor de a . Así, en el caso de un ángulo de las alineaciones igual a $160^{\circ} 10'$ (vértice número 1 de la variante de la Vallejera), y de que la pendiente transversal del terreno imponga una bisectriz que se aproxime a los 10 metros, la propor-

cionalidad indicada nos dice que

$$a = 100 \frac{10}{17,2031} = 58,13$$

siendo 17,2031 el valor que da la tabla para el ángulo $73^\circ 50'$ (suplementario del de las alineaciones), según aclararemos en c). Como el valor exacto obtenido complicaría innecesariamente las operaciones a practicar en los grupos c) y d), se le redondea convenientemente, a 60 por ejemplo, si el terreno lo permite.

Si se nos impusiera un radio mínimo en el centro de la curva, despejando a en la tercera de las ecuaciones arriba expuestas, tendríamos esta otra:

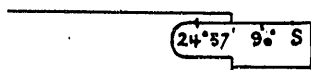
$$a = 3R_{\min.} \sqrt{\sec \frac{\alpha}{3}}$$

que se resuelve rapidísimamente con la regla logarítmica, pues basta un solo movimiento de la reglilla para obtener el valor de a .

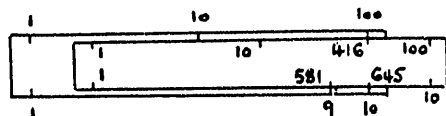
Si

$$\alpha = 73^\circ 50' \quad R_{\min.} = 30 \text{ m} \quad a = 90 \sqrt{\sec 24^\circ 37'}$$

puesta la regla con el reverso a la vista se marca en la escala de senos el ángulo $24^\circ 37'$ y sin variar la reglilla se gira la regla hasta poner el anverso delante: el 100



de la escala núm. 1 de la regla marca en la reglilla el seno de $24^\circ 37'$ (0,416); el 10 de la escala núm. 2 de la regla marca en la reglilla la raíz cuadrada de ese seno (0,645), y el 9 de la misma escala marca en la re-



glilla el valor de a (58,10), con un error menor de cinco centésimas, que redondearíamos, siempre aumentando en este caso a 60 o más, si no viene también impuesto por la bisectriz o por la tangente.

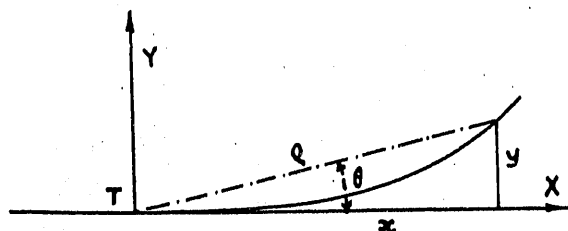
c) Definida ya la curva que se ha de replantear se calculan, con el auxilio de la tabla primera, la tangente y la bisectriz, interpolando valores si el ángulo contiene minutos. En el caso de ser $\alpha = 73^\circ 50'$ y $a = 60$.

$$T = (72,7595 + 0,01249 \times 50) \frac{60}{100} = 73,3840 \times 0,6 = 44,03 \text{ m}$$

$$B = (16,8296 + 0,00747 \times 50) \frac{60}{100} = 17,2031 \times 0,6 = 10,32 \text{ m}$$

Aplicando estos resultados al trazado poligonal de cada uno de los dos paseos se sitúan los puntos T , de tangencia, y B , de centro de curva.

d) Las cuatro ramas de lemniscata, dos en cada paseo, se replantean por abscisas y ordenadas rectangulares, sobre la tangente, tomando como origen de



coordenadas el punto de tangencia. En la figura de arriba vemos que

$$x = \rho \cos \theta = a \sqrt{\sec 2\theta} \cos \theta$$

$$(\text{por ser } \rho = a \sqrt{\sec 2\theta}) \text{ y que } y = x \tan \theta$$

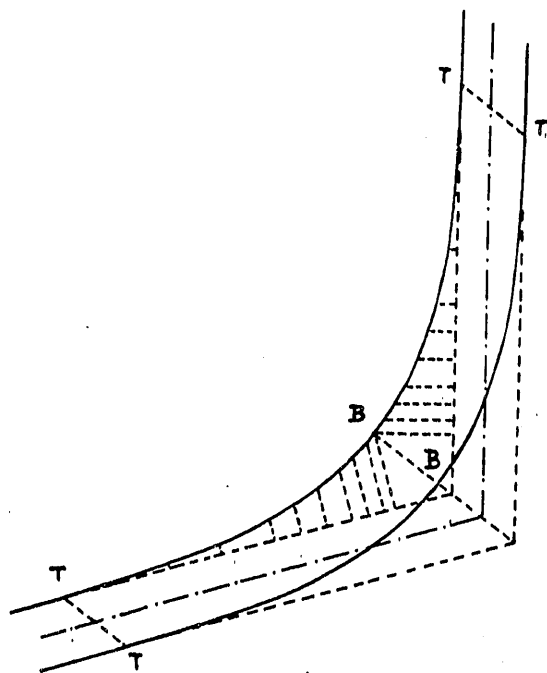
el efectuar estos cálculos para cada caso que se presente sería un trabajo impropio; pero como de esas ecuaciones se deduce la proporcionalidad entre los valores de las coordenadas y los de a , las operaciones se simplifican enormemente utilizando la tabla número 2, calculada para la lemniscata

$$\rho = 100 \sqrt{\sec 2\theta}$$

si llamamos x, y a las coordenadas tabulares y x', y' a las correspondientes de la lemniscata de coeficiente a , tendremos

$$x = x' \cdot \frac{a}{100} \quad y' = y \times \frac{a}{100}$$

la primera de estas fórmulas nos permite determinar el valor de x , con que hemos de entrar en la tabla, en función del que en el terreno se asigne a x' ; si éste es exactamente divisible por la razón $\frac{a}{100}$, el valor de x será entero, y se hallará directamente en la tabla, obteniendo el de y sin necesidad de interpolar. La segunda fórmula permite deducir el de y' en función del tabular y .



Así, en el caso de ser $a = 60$, adoptaríamos para valores de x' los múltiplos de 0,6 que resultaran más convenientes en el terreno para ser tomados como pies de las ordenadas; valores que, por ejemplo, podrían ser múltiplos de 6 en los primeros puntos de la curva, de 3 en la parte central de la misma, donde la curvatura aumenta, y de 1,80 en los próximos al vértice. Para calcular las coordenadas del último punto de cada rama, que es precisamente el B , no puede seguirse la recomendación hecha; puesto que su abscisa viene dada por la diferencia entre la tangente y la proyección de la bisectriz sobre ella, su valor será

$$x' = T - B \sec \frac{\alpha}{2} = 44,03 - 10,32 \sec 36^\circ 55' = 44,03 - 6,20 = 37,83 \text{ m}$$

(El valor del sustraendo se obtiene con la regla logarítmica, marcando en la escala de senos, en el anverso, el ángulo $36^{\circ} 55'$; sin mover la reglilla, en el anverso, la división 10,32 de la escala núm. 1 de la regla marca el número buscado. Por otra parte, no es indispensable calcular las coordenadas del punto B, aunque sí es conveniente, porque sirve de comprobación de todas las operaciones realizadas.)

Los resultados obtenidos para replantar cada una de las ramas de la lemniscata serían:

valores de x'	valores de x	valores de y	valores de y'
6	10	0,0500	0,03
12	20	0,4003	0,24
18	30	1,3555	0,81
24	40	3,2422	1,94
27	45	4,6542	2,79
30	50	6,4604	3,88
33	55	9,2685	5,25
34,8	58	10,3920	6,23
36,6	61	12,2890	7,37
37,83	63,05	13,7540	8,25

La materialidad de levantar normales a la tangente

en los pies de las ordenadas puede llevarse a cabo rápidamente y con precisión utilizando una escuadra de reflexión, o, mejor, un alineador, tal como el Zeiss, de 36 mm de diámetro; puestas una banderola en el punto de tangencia y otra en el vértice del ángulo se sitúa el alineador sobre un jalón clavado en el punto donde se va a lentar la normal, y se ordena a un obrero que mueva otra banderola a distancia conveniente y en la dirección aproximada que se busca, hasta que las imágenes de las dos antes indicadas se confundan con la que el obrero mueve.

Hemos dicho que el alineador se coloca sencillamente sobre un jalón de 1,50 m, clavado en el suelo; pero si quiere evitarse el riesgo de su caída, si acaso se tropieza involuntariamente el jalón, puede enchufarse en el extremo superior de éste una pieza metálica que termine en un espárrago, donde se enrosca el mango del alineador, que ya viene de fábrica con la hembra correspondiente. Cuando el alineador no está empalmado al jalón, se defiende el espárrago roscado de éste con un sombrerete metálico, como se indica en el croquis.



B. OLIVER Y ROMAN
Ingeniero de Caminos

Canal del Pisuega

ANTECEDENTES

Nació la idea y el anteproyecto del canal del Pisuega como consecuencia de la ley de 7 de mayo de 1909, por la cual se debía hacer la transformación del canal de Castilla en canal de riego, sin desatender su utili-

desde el punto de vista de la modificación de su pendiente, como del aumento de su sección. Solamente hubiera sido posible aumentar su dotación en uno o dos metros cúbicos, en determinados tramos, destinados a alimentar las acequias derivadas directamente del mismo y regar con ellas pequeñas zonas próximas al canal. Por todas estas razones se pensó en derivar canales o acequias, en los puntos de cruce del canal de Castilla con los dos ríos principales, Pisuega y Carrión, aprovechando las presas construídas en los mismos para servicio del canal de Castilla, y utilizándose los cauces de dichos ríos, como los cauces naturales de conducción, a dichos canales derivados, de los caudales acumulados en los pantanos de las cabeceras de los ríos Carrión y Pisuega. Siguiendo este plan se construyeron: las acequias de Palencia y de La Retención, que arrancan del cruce del canal de Castilla con el río Carrión, aprovechando la presa de Calahorra, y por las márgenes izquierda y derecha, respectivamente, de dicho río; y el canal del Pisuega, que arranca en el cruce del canal de Castilla con el río Pisuega, por la margen derecha de aquél e izquierda de éste, aprovechando la presa de San Andrés, y que es capaz de regar una zona de 20 000 Ha.

Tiene su origen, como hemos dicho, en la presa de San Andrés, agua abajo de Herrera de Pisuega, desarrollándose por la margen izquierda del canal de Castilla, por la falta de zona regable en la otra mar-

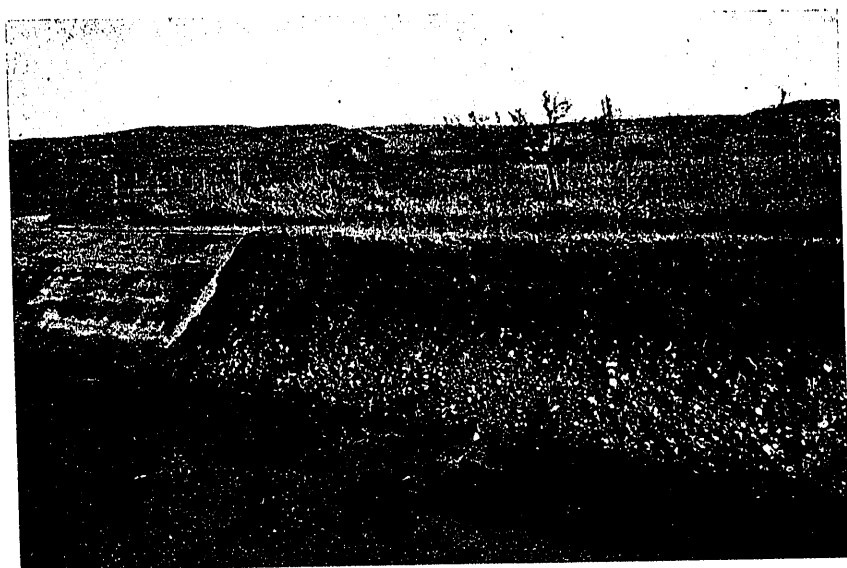


Foto 1 Canal del Pisuega. Trozo 1.º Degradación de los taludes 1 x 1; terreno con exceso de gravas y falta de elementos medios

zación industrial, como vía de comunicación y como fuente de energía. Domina el canal de Castilla una extensión de unas 60 000 Ha, en números redondos, que, aunque con dotaciones muy pequeñas para riego por hectárea, hubiera requerido, para conducir los caudales necesarios, obras de grandísimo coste, tanto