

trol del Consejo y de la Asamblea— interviene, en primer término, en un acto de conciliación encaminado a tratar de evitar la instancia judicial, y, cuando ésta se hace inevitable, actúa de órgano técnico asesor del Tribunal permanente de Justicia internacional. Materia eminentemente internacional ésta de las comunicaciones; cerca del 20 por 100 de las sentencias dictadas hasta la fecha por este alto organismo judicial se refieren a ella.

Aparte estos dos buenos éxitos —Congreso de Ferrocarriles de 1930 y presidencia de la Comisión de Comunicaciones y Tránsito—, la actuación internacional de España en materia de transportes ha tenido otras manifestaciones dignas de aprecio, y que contribuyen a justificar, a mi juicio, esta ligera aclaración del sombrío cuadro que de aquella actuación,

hasta la fecha, hace el Sr. Jiménez Ontiveros en su artículo. Así, la designación de los representantes de España en la Unión internacional de Ferrocarriles, para el Comité de Gerencia de este organismo; su intervención en los trabajos de la Cámara de Comercio internacional; en el Comité de Expertos formado por ésta para organizar una Conferencia internacional de Coordinación de la Carretera y el Ferrocarril; en los Congesos internacionales de Carreteras; en la Oficina internacional de *Containers*, y en tantos otros organismos.

Si es oportuno estimular nuestra actuación internacional en esta materia, no es justo desconocer las manifestaciones estimables de ella, ni conveniente dejar de alentarlas.

Federico REPARAZ

Cálculo de la armadura mínima de las piezas de hormigón armado sometidas a flexión compuesta

En los tratados de hormigón armado y en los trabajos que se refieren al cálculo de piezas de hormigón armado sometidos a flexión compuesta se llega a cuadros o ábacos que permiten encontrar unas características de la pieza objeto del cálculo en función de otras que se fijan y de los esfuerzos que la pieza tiene que resistir; pero en casi todos ellos se fijan dos premisas:

1.^a Suponer un valor único para el parámetro

$$m = \frac{E_a}{E_h}$$

(excepción hecha del libro de nuestro maestro don Alfonso Peña).

2.^a Fijar *a priori* la relación entre las dos cuantías de la pieza (a excepción del trabajo publicado por Henri Deshays).

Con respecto a la primera premisa, ya se ve que el coeficiente de elasticidad del hormigón variará con la clase de hormigón que se utilice, y, por tanto, a cada clase de hormigón le corresponderá un valor distinto del parámetro m . La segunda premisa lleva consigo que, al obligar de antemano una relación determinada entre las cuantías, no resultará seguramente el hierro bien aprovechado, lo que lleva consigo un encarecimiento de la obra.

Por todo lo dicho, si nosotros obtenemos fórmulas, que después hemos de transformar en ábacos, en las cuales se hagan los cálculos teniendo en cuenta los distintos valores que puede recibir el parámetro m ($m=8, 10, 12, 15$), según la clase de hormigón que se utilice, y, además, la relación de las cuantías no la fijamos *a priori*, sino que la determinamos por la condición de que la suma de las cuantías sea mínima, tendremos una economía de hierro, puesto que, por ser mínima la suma de las cuantías, lo es la cantidad de hierro empleada, y al ser el parámetro m el que corresponde a la clase de hormigón que se utiliza, los cálculos serán más rigurosos. Y, sobre todo, habremos eliminado causas de indeterminación al calculista que no esté muy práctico.

En resumen, el presente trabajo se reduce a dibujar unos ábacos para el cálculo de secciones de piezas de hormigón armado sometidas a flexión compuesta, con la condición de que la suma de las cuantías sea mínima, y dibujando un ábaco distinto para cada valor de m .

Con estas premisas, supongamos una pieza de hor-

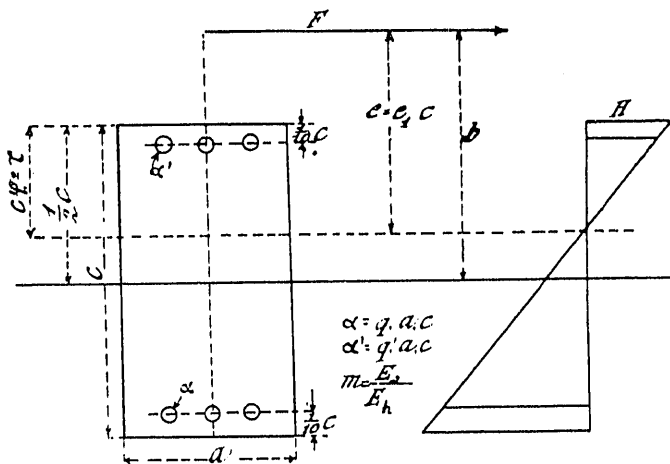


Fig. 1.

migón armado definida en la forma que se indica en la figura 1.

Con arreglo a estos datos podemos escribir las ecuaciones de equilibrio, que son:

$$\left. \begin{aligned} N &= H a c \left[\frac{\varphi}{2} + m q' \left(1 - \frac{1}{10\varphi} \right) + m q \left(\frac{9}{10\varphi} - 1 \right) \right] \\ M &= H a c^2 \left[\frac{\varphi}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{\varphi}{3} \right) + m q' \frac{2}{5} \left(1 - \frac{1}{10\varphi} \right) + \right. \\ &\quad \left. + m q \frac{2}{5} \left(\frac{9}{10\varphi} - 1 \right) \right] \end{aligned} \right\} [1]$$

En estas ecuaciones H es la carga máxima a que está sometido el hormigón; q y q' son las cuantías de las armaduras, con un valor $q = \alpha a c$ y $q' = \alpha' a c$.

Las ecuaciones [1] podemos escribirlas de esta ecuación: otra forma:

$$\left. \begin{aligned} \frac{N}{Hac} &= \frac{\varphi}{2} + mq \left(1 - \frac{1}{10\varphi}\right) + mq \left(\frac{9}{10\varphi} - 1\right) \\ \frac{M}{Hac^2} &= \frac{\varphi}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{\varphi}{3}\right) + mq' \frac{2}{5} \left(1 - \frac{1}{10\varphi}\right) + \\ &+ mq \frac{2}{5} \left(\frac{9}{10\varphi} - 1\right) \end{aligned} \right\} [2]$$

Y en estas ecuaciones vamos a formar dos parámetros que van a tener los siguientes valores:

$$\lambda = \frac{N}{mHac} \quad \mu = \frac{M}{mHac^2} \quad [3]$$

En estos valores el producto mH es constante, y ya veremos luego las ventajas que esto tiene para el cálculo, ya que los valores de M y N también son fijos por ser los esfuerzos a que la pieza tiene que resistir.

Si en las ecuaciones [2] sustituimos los valores de los parámetros [3], las ecuaciones quedarán en la forma siguiente:

$$\left. \begin{aligned} \lambda &= \frac{1}{m} \frac{\varphi}{2} + q \left(1 - \frac{1}{10\varphi}\right) - q \left(\frac{9}{10\varphi} - 1\right) \\ \mu &= \frac{1}{m} \frac{\varphi}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{\varphi}{3}\right) + q' \frac{2}{5} \left(1 - \frac{1}{10\varphi}\right) + q \frac{2}{5} \left(\frac{9}{10\varphi} - 1\right) \end{aligned} \right\} [4]$$

y despejando de estas ecuaciones los valores de q y de q' tenemos:

$$\left. \begin{aligned} q &= \frac{\varphi \left[\mu - \frac{2}{5} \lambda - \frac{\varphi}{2m} \left(\frac{1}{10} - \frac{\varphi}{3} \right) \right]}{8 \left(\frac{0,9}{10} - \frac{1}{10} \cdot \varphi \right)} \\ q' &= \frac{5\varphi \left[\mu + \frac{2}{5} \lambda - \frac{\varphi}{2m} \left(\frac{9}{10} - \frac{\varphi}{3} \right) \right]}{4 \left(\varphi - \frac{1}{10} \right)} \end{aligned} \right\} [5]$$

En estas ecuaciones existen tres cantidades desconocidas, supuestas fijadas las dimensiones de la pieza, y son q , q' y φ ; y como son solamente dos las relaciones entre ellas, para poder determinarlas necesitamos una tercera relación. Usualmente la relación que se fija es $q = k \cdot q'$, dando a k los valores de 0, 0,25, 0,50, 0,75, 1. Nosotros, para resolver el problema, la tercera relación que vamos a fijar es

$$\frac{d(q + q')}{d\varphi} = 0$$

con lo cual tendremos una relación entre q y q' que obliga a que $q + q'$ sea mínimo.

Si sumamos las dos expresiones [5] encontramos la relación siguiente:

$$q + q' = \frac{3,2 \cdot \varphi \cdot \mu + \frac{2}{5} \lambda [4\varphi - 8\varphi^2] + \frac{\varphi^3}{m} \frac{6,4}{3} - \frac{\varphi^2}{m} 1 \cdot 6}{3,2\varphi - 3,2\varphi^2 - 0,288}$$

y derivando esta expresión con respecto a φ e igualando a cero el resultado, nos queda la siguiente

$$\left. \begin{aligned} \frac{d(q + q')}{d\varphi} &= 2\mu(\varphi^2 - 0,09) - \lambda(0,09 - 0,36\varphi + \varphi^2) + \\ &+ 2 \frac{\varphi}{m} (1 - 2\varphi) \left(0,09 - \frac{\varphi}{2} + \frac{\varphi^2}{3}\right) = 0 \end{aligned} \right\} [6]$$

Esta ecuación [6], unida a las ecuaciones [5], nos resuelve matemáticamente el problema, puesto que, conociendo los esfuerzos a que una pieza está sometida, y fijadas las dimensiones de ella y la clase de hormigón que se va a utilizar, en cuanto sustituyamos los valores de N , M , a , c , m en las ecuaciones [5] y [6] encontramos los valores de q , q' y φ , que nos indican la mínima armadura para esa pieza. Claro es que esta solución no sería práctica para emplearla rápidamente en tanteos en los que se hiciera variar a las dimensiones de la pieza y a la resistencia del hormigón, y por eso vamos a dibujar unos ábacos que nos permitan hacer estos tanteos con rapidez.

Las ecuaciones [5] y [6] las podemos escribir en la forma siguiente:

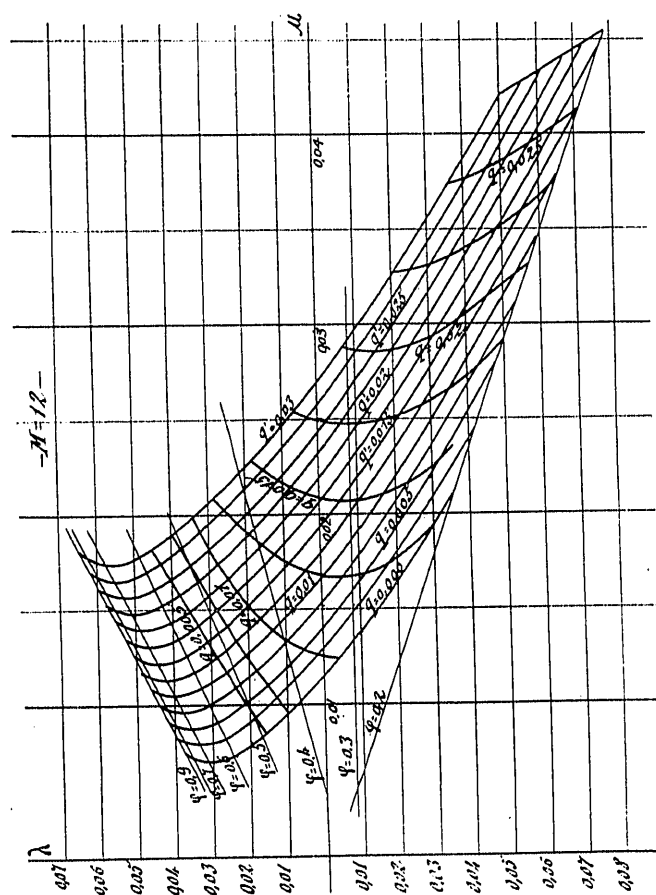
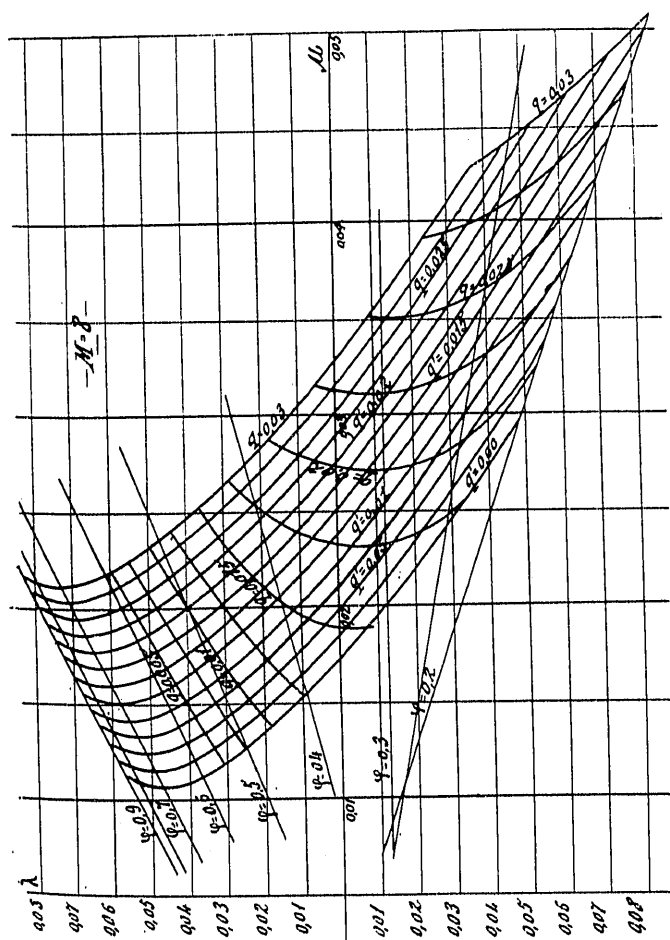
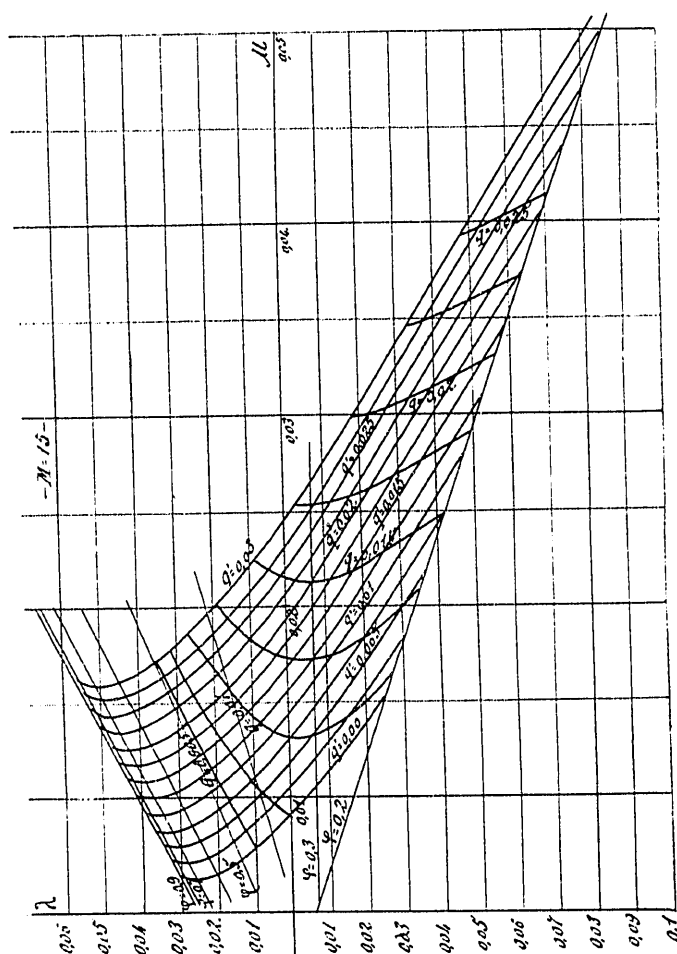
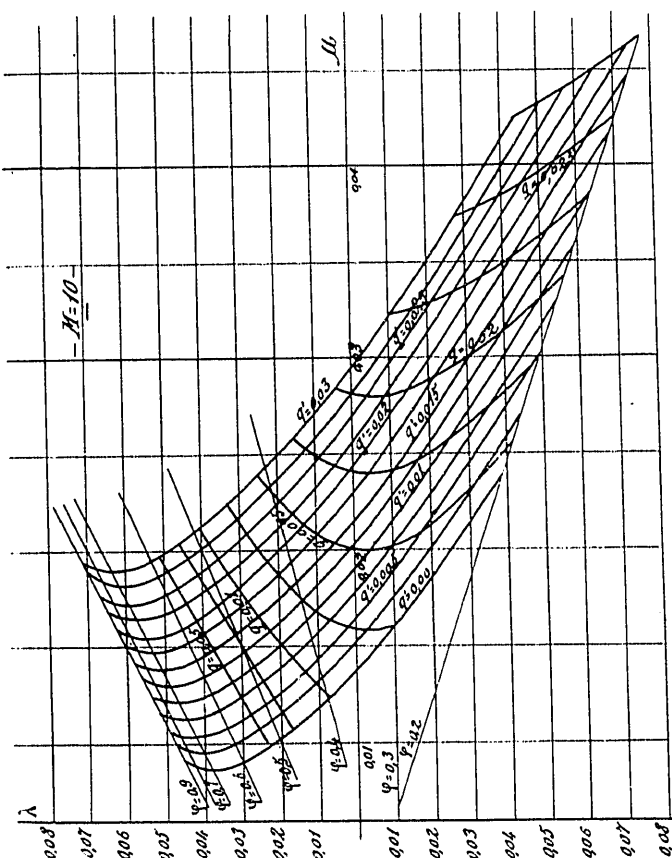
$$\lambda = -\frac{5}{2} \mu - q \frac{20(0,09 - 0,1\varphi)}{\varphi} - \frac{5\varphi}{4m} \left(0,1 - \frac{\varphi}{3}\right) \quad [7]$$

$$\lambda = -\frac{5}{2} \mu + q' \frac{2(\varphi - 0,1)}{\varphi} + \frac{5\varphi}{4m} \left(0,9 - \frac{\varphi}{3}\right) \quad [8]$$

$$\left. \begin{aligned} \lambda &= \mu \frac{2(\varphi^2 - 0,09)}{0,09 - 0,36\varphi + \varphi^2} + \\ &+ \frac{1}{m} \frac{2\varphi(1 - 2\varphi) \left(0,09 - \frac{\varphi}{2} + \frac{\varphi^2}{3}\right)}{0,09 - 0,36\varphi + \varphi^2} \end{aligned} \right\} [9]$$

A estas fórmulas hemos llegado, como nos proponíamos, dejando el parámetro m de una manera explícita, y naturalmente que para cada valor de m , que lo haremos igual a 8, 10, 12, 15 nos dará un ábaco distinto y en todo lo que sigue nos referiremos a uno determinado de los valores de m .

Al estudiar las ecuaciones [7], [8] y [9] vemos que cada una de ellas representa una familia de rectas en el plano de coordenadas $(\lambda \cdot \mu)$, y observamos que en la [7] no entra más que q , que en la [8] no entra más que q' y en la [9] no intervienen ni q ni q' . Por lo tanto, de la familia de rectas que representa la ecuación [9] podemos dibujar las que corresponden a los valores de $\varphi = 0,2, 0,25, 0,3, 0,4, 0,5, 0,6, 0,7, 0,8, 0,9$. La ecuación [7], para cada valor de q , nos da una familia de rectas de las que, si dibujamos las que corresponden a los valores de $\varphi = 0,2, 0,25, 0,3, 0,4, 0,5, 0,6, 0,7, 0,8, 0,9$, las intersecciones de cada una de estas rectas, con las del mismo valor de φ de la ecuación [9], nos dan una serie de puntos que reunidos forman la curva del plano $(\lambda \cdot \mu)$, cuyos puntos corresponden al mismo valor de q fijado. Igualmente la ecuación [8] nos da, para cada valor de q' , una familia de rectas de las que, si dibujamos las que corresponden a los valores de $\varphi = 0,2, 0,25, 0,3, 0,4, 0,5, 0,6, 0,7, 0,8, 0,9$, las intersecciones de estas rectas, con las del mismo valor de φ de la ecuación [9], nos dan una serie de puntos que reunidos forman la curva que nos fija los puntos del plano $(\lambda \cdot \mu)$, a los que corresponde el mismo valor de q' .



Las familias de rectas a que dan lugar las ecuaciones [7], [8] y [9], al variar φ , son:

$$\begin{aligned}\varphi = 0,2 \dots \lambda &= 2,5\mu - 7q - \frac{1}{m} 0,0083 \\ \varphi = 0,25 \dots \lambda &= 2,5\mu - 5,2q - \frac{1}{m} 0,0052 \\ \varphi = 0,3 \dots \lambda &= 2,5\mu - 4q \\ \varphi = 0,4 \dots \lambda &= 2,5\mu - 2,5q + \frac{1}{m} 0,0166 \\ \varphi = 0,5 \dots \lambda &= 2,5\mu - 1,6q + \frac{1}{m} 0,0416 \\ \varphi = 0,6 \dots \lambda &= 2,5\mu - q + \frac{1}{m} 0,075 \\ \varphi = 0,7 \dots \lambda &= 2,5\mu - 0,571q + \frac{1}{m} 0,1097 \\ \varphi = 0,8 \dots \lambda &= 2,5\mu - 0,25q + \frac{1}{m} 0,166 \\ \varphi = 0,9 \dots \lambda &= 2,5\mu + \frac{1}{m} 0,225\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varphi = 0,2 \dots \lambda &= -2,5\mu + q' + \frac{1}{m} 0,208 \\ \varphi = 0,25 \dots \lambda &= -2,5\mu + 1,2q' + \frac{1}{m} 0,2552 \\ \varphi = 0,3 \dots \lambda &= -2,5\mu + 1,333q' + \frac{1}{m} 0,3 \\ \varphi = 0,4 \dots \lambda &= -2,5\mu + 1,5q' + \frac{1}{m} 0,3843 \\ \varphi = 0,5 \dots \lambda &= -2,5\mu + 1,6q' + \frac{1}{m} 0,4583 \\ \varphi = 0,6 \dots \lambda &= -2,5\mu + 1,666q' + \frac{1}{m} 0,525 \\ \varphi = 0,7 \dots \lambda &= -2,5\mu + 1,714q' + \frac{1}{m} 0,583 \\ \varphi = 0,8 \dots \lambda &= -2,5\mu + 1,75q' + \frac{1}{m} 0,634 \\ \varphi = 0,9 \dots \lambda &= -2,5\mu + 1,777q' + \frac{1}{m} 0,6750\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varphi = 0,2 \dots \lambda &= -1,72\mu + \frac{1}{m} 0,013 \\ \varphi = 0,25 \dots \lambda &= -0,88\mu - \frac{1}{m} 0,057 \\ \varphi = 0,3 \dots \lambda &= -\frac{1}{m} 0,1 \\ \varphi = 0,4 \dots \lambda &= 1,32\mu - \frac{1}{m} 0,085 \\ \varphi = 0,5 \dots \lambda &= 2\mu \\ \varphi = 0,6 \dots \lambda &= 2,29\mu + \frac{1}{m} 0,092 \\ \varphi = 0,7 \dots \lambda &= 2,46\mu + \frac{1}{m} 0,165 \\ \varphi = 0,8 \dots \lambda &= 2,47\mu + \frac{1}{m} 0,21 \\ \varphi = 0,9 \dots \lambda &= 2,5\mu + \frac{1}{m} 0,225\end{aligned}$$

No consideramos para φ más que los valores comprendidos entre 0,1 y 0,9, porque los valores de φ , que no están comprendidos entre éstos, corresponderían a profundidades de la fibra neutra, que estarían fuera de las armaduras.

Si en las ecuaciones anteriormente escritas damos a m los valores $m = 8, 10, 12, 15$, para cada valor m obtenemos una serie de ecuaciones que dan lugar a un ábaco distinto. El dibujo de cada uno de los ábacos lo hacemos de la manera siguiente:

Empezamos por dibujar las rectas [9] en unos ejes de coordenadas $(\lambda \cdot \mu)$; después, en las ecuaciones [7] damos a q los valores de 0,005, 0,0075, 0,01, 0,0125, 0,015, 0,0175, 0,02, 0,0225, 0,025, 0,0275; para cada valor q de las ecuaciones [7] nos dan una familia de rectas, y su intersección con las [9] una curva, y para todos los valores de q nos resultan las 10 curvas de la familia q . Después hacemos $q' = 0,005, 0,0075, 0,01, 0,0125, 0,015, 0,0175, 0,02, 0,0225, 0,025, 0,0275, 0,03$; para cada uno de los valores de q' las ecuaciones [8] nos dan una familia de rectas, y su intersección con las rectas [9] una curva, y para todos los valores de q' nos resultan 11 curvas de la familia q' . Este es el procedimiento por el cual conseguimos los cuatro ábacos, uno para cada valor de m , que se dibujan en los ejes coordenados $(\lambda \cdot \mu)$. Recordando ahora que los valores de λ y μ son

$$\lambda = \frac{N}{m \cdot H \cdot a \cdot c} \quad \mu = \frac{M}{m \cdot H \cdot a \cdot c^2}$$

en estas expresiones tenemos que $m \cdot H = 6,50$, y como M y N son también conocidos, por ser los esfuerzos a que ha de resistir la pieza, que son datos del problema, dando valores a a y c calculamos los de λ y μ , y entrando con estos valores en el ábaco correspondiente tenemos las cuantías que corresponden a la pieza cuyas dimensiones hemos fijado; y claro es que, variando a y c , conseguiremos calcular la pieza mejor; pero sin olvidar que, para cada una de las piezas que calculemos, la cuantía es la mínima que puede tener esa pieza, y la sección así seleccionada será la mejor y la más económica.

Vamos a resolver un ejemplo que nos aclare la manera de llevar los cálculos.

Supongamos una pieza sometida a un momento flector $M = 400\,000$ m/kg y una carga normal $N = 226\,530$ kg.

Si fijamos las dimensiones de la pieza $a = 130$ cm y $c = 200$ cm, teniendo en cuenta que la c en nuestras fórmulas representa la altura total de la pieza, como ya sabemos que el producto $mH = 650$, el valor de los parámetros resulta ser:

$$\begin{aligned}\lambda &= \frac{N}{m \cdot H \cdot a \cdot c} = \frac{226\,530}{650 \times 130 \times 200} = 0,013 \\ \mu &= \frac{M}{m \cdot H \cdot a \cdot c^2} = \frac{40\,000\,000}{650 \times 5\,200\,000} = 0,012\end{aligned}$$

Si suponemos que el hormigón que vamos a utilizar es tal que $m = 10$, entrando en el ábaco calculado para este valor de m con los valores que hemos obtenido para $\lambda \cdot \mu$ encontramos para valores de las cuantías:

$$q = 0,009 \quad q' = 0,001$$

siendo el área total del hierro

$$\alpha = 0,01 \times 130 \times 200 = 260 \text{ cm}^2$$

El área que así resulta, desde luego es inferior a la que habríamos obtenido fijando *a priori* una relación entre las cuantías distinta de la que ha resultado. Podemos reducir más la cantidad de hierro procediendo de la manera siguiente:

Si describimos los valores $\lambda \cdot \mu$ sin fijar los de a y c , tenemos

$$\lambda = \frac{226\,530}{650 \times a \times c}$$

$$\mu = \frac{40\,000\,000}{650 \times a \times c^2}$$

Estas dos expresiones nos representan una serie

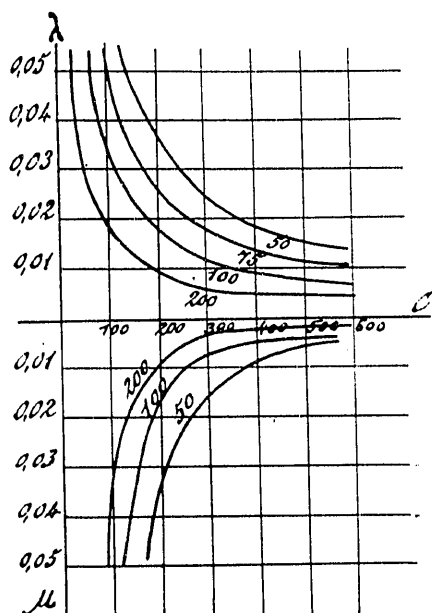


Fig. 2.

de curvas, en el plano de coordenadas $(\lambda \cdot c)$ una de ellas y en el plano de coordenadas $(\mu \cdot c)$ la otra;

de manera que, si en un sistema de ejes coordenados (figura 2) tomamos para eje de las c el horizontal, para eje de λ el vertical hacia arriba y para eje de μ el vertical hacia abajo, podremos dibujar, en este sistema de ejes, para cada valor de a una curva λ y una μ . Dibujamos tres curvas λ y otras tres curvas μ para los valores de $a = 50, 100, 200$, y definimos cada curva por tres puntos, para $c = 100, 200, 400$. Esto, sobre papel milimetrado y para los números dichos, se hace con gran rapidez.

Si suponemos, como antes, que el hormigón que vamos a utilizar corresponde a un valor de $m = 10$, a la vista del ábaco correspondiente y de la figura dibujada, como acabamos de exponer, vemos cuál es la mejor solución, y encontramos que para

$$a = 100 \quad c = 230$$

$$\lambda = \frac{226\,530}{650 \times 100 \times 230} = 0,0151$$

$$\mu = \frac{40\,000\,000}{650 \times 100 \times 52\,900} = 0,016$$

resultando para cuantías

$$q = 0,0085 \quad q' = 0,0015$$

y para valor total del área de hierro 230 cm^2 . Y ésta sí tenemos la seguridad de que es la mejor solución, y de que hemos eliminado los tanteos indeterminados, aunque sea a costa de unos cálculos sencillos.

Luis SIERRA
Ingeniero de Caminos

Bibliografía

ASSAINISSEMENT GÉNÉRAL DES VILLES ET DE PETITES COLLECTIVITÉS.—Tome II: *Collecte et traitement des déchets solides et gazeux*, par E. Mondon.—Un vol. de $16 \times 24 \text{ cm}$, 395 páginas, con 306 figuras.—París, Dunod, 1933.—Precio en rústica, 55 pesetas.

La obra de cuyo segundo tomo damos noticia en esta nota es muy interesante, porque contiene las disposiciones y los procedimientos más modernos para la recogida y tratamiento de los residuos sólidos y gaseosos de las poblaciones. Empieza tratando de cementerios y cremación de cadáveres; sigue con lo referente a cadáveres de animales y residuos de mataderos; se ocupa a continuación de las basuras sólidas, de su recogida y tratamiento de las inmundicias de las calles, etc.; estudia después la atmósfera urbana y las causas de su impurificación, el aire confinado, los modernos procedimientos de calefacción, ventilación y refrigeración de locales cerrados, los vapores y gases nocivos, el polvo, la lucha contra el mismo, los peligros del polvo industrial y, finalmente, los humos y olores urbanos e industriales.

Como se ve, se trata de una obra muy completa y que contiene, como ya se ha indicado, los últimos adelantos en las materias tratadas, por lo cual la consideramos de gran utilidad.

J. L. U.

ASSAINISSEMENT GÉNÉRAL DES VILLES ET DES PETITES COLLECTIVITÉS.—Tome III: *Déchets liquides*, par Mondon (E.).—Un vol. de $16 \times 24 \text{ cm}$, 478 páginas, con 406 figuras.—París, Dunod, 1934.—Precio en rústica, 74 ptas.

El tomo tercero de esta interesante obra comprende el alcantarillado y el tratamiento de las aguas residuales. Es una exposición muy completa de los distintos procedimientos y sistemas empleados tanto para la evacuación como para el tratamiento, y entre ellos, y es su principal ventaja, se describen los más modernos; pero se echa de menos un poco de labor de crítica y de selección por parte del autor, que describe algunos procedimientos hoy ya casi abandonados, dándoles la misma importancia que a los que gozan de más éxito. Por lo demás, es obra donde pueden encontrarse datos interesantes.

J. L. U.

EXPLOTACIÓN TÉCNICA DE FERROCARRILES.—*Manuales Técnicos Labor*, núm. 52.—Un volumen encuadernado, de $18,5 \times 13 \text{ cm}$, con 515 páginas y 284 figuras.—Por D. Francisco Wais, ingeniero de Caminos.—Editorial Labor, S. A., 1933.

Esta obra, escrita con gran claridad y sencillez, viene a llenar la necesidad, verdaderamente sentida, de proporcionar a los ingenieros, estudiantes y, en general, a los técnicos españoles un medio de formarse idea precisa de la explotación de ferroca-