

## Acuerdos progresivos de las curvas de los ferrocarriles

En el número de diciembre pasado de la *Revista del Congreso de Ferrocarriles* aparece el informe presentado al Congreso de Ferrocarriles recientemente celebrado en El Cairo por los señores profesor M. H. Baumann, director de los Ferrocarriles alemanes, y M. F. Jaehn, consejero de dichos Ferrocarriles, relativo a las "Relaciones entre el vehículo y la vía con el objeto de hacer compatibles con la seguridad las velocidades elevadas". Al estudiar los acuerdos entre las alineaciones rectas y las curvas circulares, proponen estos señores, como criterio de la calidad de dichas curvas de acuerdo, el valor de la derivada con relación al tiempo de la aceleración resultante del movimiento del centro del vehículo.

En el número de la REVISTA DE OBRAS PÚBLICAS del 15 de marzo de 1926, y en un artículo cuyo título es el mismo que encabeza estas líneas, propusimos un criterio análogo, si bien tomábamos en consideración las variaciones de la aceleración angular, en vez de considerar las de la aceleración del centro del vehículo. Posteriormente hemos publicado en la *Revista de Ingeniería Industrial* un artículo<sup>1</sup> dedicado a relacionar el *comfort* de un vehículo con las variaciones de aceleración o sobreaceleraciones que experimentan los viajeros durante la marcha.

Nos proponemos ahora hacer algunas observaciones y comentarios al informe citado al principio, para lo cual empezaremos por resumir brevemente la parte que se refiere a los acuerdos progresivos.

Si consideramos un eje de un vehículo que rueda por una curva circular de radio  $R$  metros a la velocidad de  $V$  kilómetros por hora, y el peralte de la curva en mm es  $h$ , la aceleración centrífuga en metros por  $1''^2$  será  $\frac{V^2}{12,96R}$ ; la centrípeta debida al peralte y expresada en la misma unidad, supuesto un ancho de vía de 1,50 entre ejes de carriles, es  $\frac{h}{153}$ ; y la resultante—que los autores llaman eficaz—vendrá expresada por

$$p = \frac{V^2}{12,96R} - \frac{h}{153} \quad (1)$$

Para determinar la sobreaceleración utilizan los autores la relación  $\psi = \frac{p}{t}$ , siendo  $t = \frac{l}{V}$  el tiempo necesario para pasar el acuerdo de longitud  $l$  a la velocidad  $V$ ; encuentran así

$$\psi = \left( \frac{V^2}{12,96R} - \frac{h}{153} \right) \frac{V}{3,6l} \quad (2)$$

Tratándose de un vehículo de separación de ejes  $= a$ , el recorrido de paso de recta a curva circular es  $l + a$ , y la sobreaceleración

$$\psi = \left( \frac{V^2}{12,96R} - \frac{h}{153} \right) \frac{V}{3,6(l+a)} \quad (3)$$

Si no existe acuerdo ni peralte,  $h = 0$ ,  $l = 0$ , y

$$\psi = \frac{V^3}{46,7Ra} \quad (4)$$

### Observaciones

La determinación de  $\psi$  por la relación [3] da aproximadamente la sobreaceleración media en el paso de recta a curva; pero, a nuestro juicio, no conduce a dicha relación la interpretación rigurosa del valor de la sobreaceleración, cuya expresión matemática es,

como sabemos,  $\psi = \frac{dp}{dt}$ . En efecto, el paso del vehículo de la recta a la curva circular se compone de tres movimientos distintos, a saber:

- 1) Entrada del vehículo en el acuerdo; es decir, con un eje o *bagie* en la recta y otro en el acuerdo<sup>1</sup>.
- 2) Paso por el acuerdo: los dos *bagies* en el mismo.
- 3) Entrada en la curva circular: un *bagie* en el acuerdo y otro en la curva circular.

Consideremos el caso 2), y supongamos que la longitud de la rampa de peralte coincide con la del acuerdo. El radio de curvatura de la trayectoria descrita por el centro del vehículo es la semisuma de los radios de las trayectorias descritas por los ejes de los *bagies*, y dadas las propiedades de la parábola cúbica, se tiene aproximadamente para dicho radio

$$\frac{l}{\rho} = \frac{x}{Rl} \quad (5)$$

siendo  $x$  la distancia del centro del vehículo al principio del acuerdo.

El peralte del vehículo en la posición considerada es  $h \frac{x}{l}$ , y la aceleración resultante

$$p = \frac{V^2 x}{12,96Rl} - h \frac{x}{153l}$$

Haciendo  $x = Vt$  y derivando con relación a  $t$  se obtiene

$$\psi = \frac{dp}{dt} = \left( \frac{V^2}{12,96R} - \frac{h}{153} \right) \frac{V}{3,6l} \quad (6)$$

expresión idéntica a la [2] de los autores, con la diferencia de que éstos la han deducido para un eje, y nosotros la encontramos para el vehículo completo.

Si hacemos el mismo estudio para el caso 1), fijándonos en que las ordenadas de la curva descrita por el centro del vehículo tienen por valores las mitades de los correspondientes al caso 2), y que los peraltes se reducen asimismo a la mitad, encontraremos

$$\psi = \left( \frac{V^2}{12,96R} - \frac{h}{153} \right) \frac{V}{2 \times 3,6l} \quad (7)$$

<sup>1</sup> Dada la proximidad de los ejes de los *bagies* los suponemos confundidos en uno solo situado en el pivote.

En el caso 3) encontraríamos el mismo valor [7] para la sobreaceleración, o sea que el valor máximo o más desfavorable corresponde al caso 2), y viene dado por la relación [6], que, como vemos, da valores independientes de  $a$ .

Si consideramos el caso en que no existe el acuerdo, encontramos para  $\psi$  el valor  $\infty$ , y no el que encuentran los autores, que es el [4]. Esta última relación da un valor medio de la variación de la aceleración, que en este caso (paso directo de la recta a la curva circular) pasa bruscamente de 0 a  $\frac{V^2}{2R}$  y de  $\frac{V^2}{2R}$  a  $\frac{V^2}{R}$ , en vez de variar gradualmente, como ocurre cuando existe un acuerdo progresivo. La variación  $\frac{V^2}{2R}$  da, a nuestro juicio, en este caso, la medida del criterio de *comfort* en el centro del vehículo. En efecto, es fácil ver que la curva descrita por dicho centro cuando un *bogie* está en la recta y otro en la curva circular es aproximadamente una circunferencia de radio  $2R$ .

Hemos de observar también que los autores consideran exclusivamente el centro del vehículo, y estimamos que, desde el punto de vista del *comfort*, es interesante estudiar lo que ocurre en el espacio restante del mismo ocupado por los viajeros. La consideración exclusiva de la relación [6] o de la [3] de los autores no aporta elemento alguno de juicio cuando se adopta el peralte teórico, porque entonces  $p=0$  y  $\psi=0$ , y es otro motivo para estudiar lo que ocurre fuera del centro del vehículo.

La determinación de la sobreaceleración en cualquier punto de éste se efectúa fácilmente por la consideración de la velocidad angular del eje del vehículo, determinación sencilla que puede verse en el artículo citado de la REVISTA DE OBRAS PÚBLICAS. Los valores que se obtienen son para los casos 1) y 3):

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{V^2 x}{Rla} \quad [8]$$

y para el caso 2),

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{V^2}{Rl} \quad [9]$$

Se deduce inmediatamente que, en el caso 2), la sobreaceleración es la misma para todo el vehículo, y viene dada, por tanto, por la relación [6]. No ocurre lo mismo en los casos 1) y 3); consideremos por ejemplo, el pivote anterior del vehículo; la aceleración será

$$\frac{V^2 x}{26Rl} + \frac{V^2 x}{13Rla} \times \frac{a}{2} - \frac{hx + \frac{a}{2}}{306l}$$

y

$$\psi = \left( \frac{V^2}{13R} - \frac{h}{306} \right) \frac{V}{3,6l} \quad [10]$$

En el pivote posterior encontramos

$$\psi = \frac{-hV}{306 \times 3,6l} \quad [11]$$

Del mismo modo pueden determinarse las sobreaceleraciones en los demás puntos del vehículo, y en particular en sus extremos, donde alcanzan valores máximos. A nuestro juicio, dada la disposición de los vehículos ferroviarios, se pueden tomar como va-

lores desfavorables los correspondientes a los pivotes que se hallan, en general, cerca de los extremos ocupados por los viajeros, ya que los del vehículo suelen ser plataformas de acceso. La determinación directa de las sobreaceleraciones en los pivotes es muy sencilla.

Proponemos, por tanto, la aplicación de las relaciones [10] y [11], para determinar la calidad de los acuerdos en cuanto al *comfort*, las cuales dan, especialmente la [10], valores de  $\psi$  superiores a los que da la [7].

Estas relaciones permiten, como decimos, efectuar la comprobación de la calidad de un acuerdo de longitud conocida, y también la determinación de la longitud de acuerdo necesaria para que la sobreaceleración tenga un valor determinado. Los autores proponen que la longitud de rampa de peralte igual a la de acuerdo se determine con la condición de que la inclinación de la primera sea

$$\approx \frac{l}{10V}$$

y esta condición da longitudes de acuerdo que conducen a sobreaceleraciones moderadas.

En la práctica es frecuente, especialmente en líneas secundarias, que la longitud de la rampa de peralte sea distinta de la del acuerdo; vamos a estudiar este caso suponiendo que la primera  $L$  sea  $\geq l + 2a$  ( $a$ , separación de pivotes), distribuyéndose la diferencia  $L-l$  a ambos lados del acuerdo progresivo; en estas condiciones la aceleración centrípeta en los casos 1) y 3) es

$$\frac{h(x+d)}{153L}$$

siendo  $d$  la distancia entre el principio del acuerdo y el de la rampa de peralte. Antes obtuvimos en estos casos la fracción

$$\frac{h\left(x + \frac{a}{2}\right)}{306l}$$

debido a que sólo un *bogie* estaba para  $L=l$  en la rampa de peralte, y ahora están en ella los dos a la entrada y salida del acuerdo.

Este refuerzo de la aceleración centrípeta se traduce en un valor de la sobreaceleración

$$\psi = \left( \frac{V^2}{13Rl} - \frac{h}{153L} \right) \frac{V}{3,6} \quad [12]$$

menor que el que da para el mismo caso la relación [10]; de modo que esta solución permite reducir  $\psi$  para un valor determinado de  $l$  o reducir  $l$  conservando  $\psi$  constante. Esto último es de gran interés, especialmente si se trata de implantar o de mejorar los acuerdos en líneas construidas.

Hay que comprobar en este caso que la sobreaceleración en el centro del vehículo es conveniente. Su valor es

$$\psi = \left( \frac{V^2}{26Rl} - \frac{h}{153L} \right) \frac{V}{3,6} \quad [13]$$

Asimismo hay que comprobar que el valor  $\psi$  no es excesivo, antes de la entrada del *bogie* anterior en el acuerdo con la relación siguiente

$$\psi = \frac{-hV}{153 \times 3,6L} \quad [17]$$

Vamos a hacer unas aplicaciones numéricas de lo anterior. Partiremos, para ello, de la velocidad "confortable" que admiten los autores del informe y corresponde a una aceleración resultante de 0,40 en la curva circular. Introduciendo este valor en la ecuación [1] se obtiene

$$h = 11,8 \frac{V^2}{R} - 60 \quad [18]$$

Si damos, por ejemplo, a  $h$  el valor máximo

$$= 150 \text{ mm} \frac{V^2}{R} = 17,8$$

Adoptando la inclinación de la rampa de peralte preconizada por los autores, o sea  $\frac{l}{10V}$ , la que para  $h=150$  da  $L=1,5V$ , y tomando  $l=L$  tendremos para la sobreaceleración máxima en el centro del vehículo [6],  $\psi=0,0714$ ; en el pivote anterior [10],  $\psi=0,161$ , y en el posterior [11],  $\psi=0,091$ . El valor máximo corresponde, por tanto, al pivote anterior.

Efectuado el mismo estudio para distintos valores de  $h$ , se encuentran valores de  $\psi$  que varían de 0,19 a 0,21 en el pivote anterior.

Veamos ahora lo que ocurre con  $L \geq l + 2a$ , y para ello adoptemos un valor máximo de 0,20 para la sobreaceleración, puesto que a esta cifra se llega en el caso anterior, y la experiencia demuestra que es perfectamente admisible<sup>1</sup>. Estudiemos, por ejemplo, el caso concreto de  $R=800$  y  $h=150$ , que corresponde [18] a  $V=120$ . La solución  $L=l$  da  $L=l=180$  m, longitud de acuerdo muy satisfactoria, pero difícil de conseguir en muchos casos. Si introducimos el valor  $\psi=0,20$  en [12], obtenemos, con  $L=180$ ,  $l=120$ , que nos permite resolver el problema con una longitud de acuerdo muy inferior a la que da la solución anterior, sin que se rebase en ningún momento de  $\psi=0,20$  en el espacio comprendido entre los dos pivotes, como puede comprobarse por medio de las relaciones [13] y [17].

La longitud  $L-l$  se reparte a ambos lados del acuerdo progresivo, siendo lo más conveniente dejar tan sólo una longitud  $=a$ , es decir, la separación entre ejes de *bogie* del vehículo más largo, en la recta, y el resto en la curva circular. La razón de esta distribución es que, si se prolonga con exceso la rampa de peralte en la recta, se produce una aceleración centrípeta que, al entrar el vehículo en el acuerdo, cambia de sentido y produce oscilaciones molestas.

Los autores del informe opinan que debe coincidir el principio de la rampa de peralte con la tangente de la curva de acuerdo; creemos, en vista de las ventajas que hemos indicado más arriba, que conviene prolongar la rampa en la parte rectilínea la cantidad indicada, y que la pequeña inversión de esfuerzo que resulta no ofrecerá inconvenientes.

<sup>1</sup> Según nuestras observaciones puede admitirse, sin inconveniente,  $= 0,25$ .

### Curvas sin acuerdo

Si consideramos el *bogie* delantero vemos que, al entrar en la curva circular, se aplica bruscamente al mismo la aceleración  $\frac{V^2}{R}$ ; en rigor, esta aplicación no es instantánea, pues al entrar en la curva el primer eje del *bogie* el aumento de aceleración es  $\frac{V^2}{2R}$ , y sólo cuando entra el segundo alcanza

en el pivote el valor  $\frac{V^2}{R}$ ; pero, dada la pequeña separación de ejes de los *bogies*, el tiempo que transcurre entre el paso de los dos ejes del *bogie* por la tangente es pequeño. Esta variación de aceleración es independiente del peralte, cuya eficacia aparece tan sólo, a nuestro juicio, en la curva, y no al entrar en la misma. Estimamos que el valor de  $\frac{V^2}{R}$  debe ser de 6 a 7, lo que da variaciones de aceleración de alrededor de 0,50. Los autores recomiendan, para el caso de cambios de vía,  $\frac{V^2}{R}=8$ , y citan casos

en que se llega a 10 y más; pero esta última cifra nos parece excesiva, no sólo desde el punto de vista del *confort*, sino desde el de la seguridad. Se ve la necesidad del empleo de acuerdos en cuanto se emplean velocidades regulares, cosa comprobada por la experiencia.

Resumiendo todo lo expuesto, estimamos que, para juzgar de la calidad de una curva de acuerdo progresivo desde el punto de vista del *confort*, es importante la consideración de la sobreaceleración máxima del movimiento de los pivotes del vehículo, cuyo valor puede deducirse cuando  $l=L$  (longitud del acuerdo  $=$  a la de la rampa de peralte) de la relación [10].

Cuando sea conveniente reducir la longitud de los acuerdos puede adoptarse la solución de hacer  $L \geq l + 2a$  y calcular  $l$  con la relación [13], en la que puede adoptarse  $\psi=0,25$  como máximo. La diferencia  $L-l$  se repartirá entre la recta y la curva circular, procurando que la mayor parte del exceso corresponda a la curva y dejando en la recta una parte igual o mayor que la separación de pivotes del vehículo más largo.

Cuando no existan acuerdos progresivos las velocidades admisibles corresponderán a la relación  $\frac{V^2}{R}=6$  a 7, y excepcionalmente se llegará a  $\frac{V^2}{R}=8$ .

Mucho celebraríamos que los ingenieros de los ferrocarriles españoles especializados en estos asuntos aportaran sus observaciones acerca de estas conclusiones. Creemos el asunto de interés, porque las velocidades de los ferrocarriles tienden a aumentar constantemente, y los trazados necesariamente sinuosos de nuestras líneas obligan al empleo de frecuentes curvas con sus acuerdos respectivos. El estudio racional de los mismos es, sin duda alguna, un progreso al que los ingenieros de ferrocarriles debemos procurar contribuir.