

Agrimensura fotográfica¹

V

La determinación de las tres aristas $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ constituye el llamado "problema de la pirámide", cuya solución analítica es poco práctica, pero que tiene soluciones gráficas elementales:

1.ª Conocidos los tres ángulos en el vértice de la pirámide, MON, NOP, POQ (fig. 7), si a par-

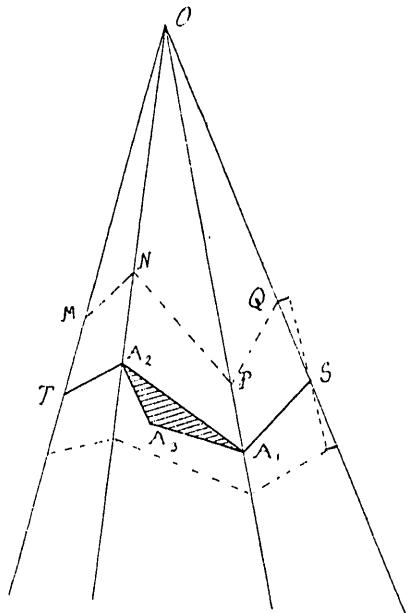


Fig. 7

tir de un punto M llevamos los lados MN, NP, PQ del triángulo del terreno, lo que podremos hacer sin ambigüedad si, como hemos ya dicho, sabemos el orden relativo de magnitud de las tres aristas, deberíamos encontrar, si la posición fuese correcta, $OM = OQ$; con la diferencia que encontremos podremos establecer una curva de error que cortará a OQ en un punto S , en el cual el error es nulo, y, por consiguiente, $OT = OS$, OA_1 y OA_2 son las tres aristas que buscamos, y, si hacemos girar el triángulo OTA_2 alrededor de A_2 y el OSA_1 alrededor de A_1 hasta que T y S coincidan en A_3 , tendremos desarrollada la pirámide, como en la figura 6.²

2.ª Si sobre el lado A_1A_3 del triángulo (fig. 8) trazamos el arco XY , capaz del correspondiente ángulo en el vértice, éste se encontrará sobre dicho arco; si fijamos sobre éste un punto P (fuera de los límites de la figura) y lo unimos con A_1 y A_3 , tendremos una posición hipotética de la pirámide, construyendo sobre la cara PA_1A_3 las otras dos, cuya arista común supondremos proyectada en PB . Por otra parte, la base rebatida en $A_1A_2A_3$, al girar para colocarse en su posición en el espacio, hace describir al vértice A_2 un círculo que se proyecta en A_2D y se dibuja rebatido en A_2E ; como las proyecciones de la arista PB y del círculo A_2D se encuentran

en M , si la posición del punto P fuese la verdadera, M sería la proyección del vértice A_2 ; pero, rebatida la trayectoria de A_2 , da, sobre el punto M , la cota ME , y, rebatida la arista alrededor de su proyección PB en PC , nos da la cota MG , que llevada a ME nos da la diferencia EG , que demuestra que el punto A_2 y la arista PB no se encuentran en el espacio.

La diferencia EG puede ser base de una curva de error, para cuya construcción observaremos que si partimos de otro punto distinto del P , así como las nuevas aristas, se obtendrían uniendo dicho punto con A_1 y A_3 ; la proyección de la tercera pasará

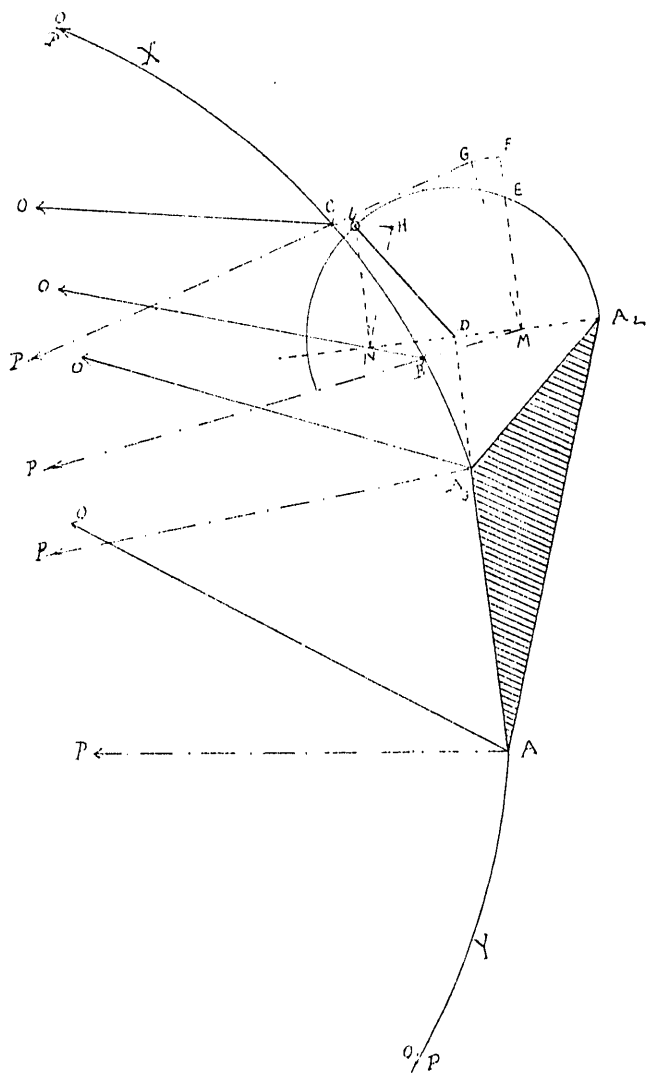


Fig. 8

por B y su rebatimiento por C sobre el círculo XY , puesto que los ángulos que estas líneas forman en el vértice son constantes.

Si la curva de error corta al círculo A_2E en el punto L , la base de la perpendicular N será la proyección del punto de encuentro de A_2 con la tercera arista, y, por consiguiente, uniendo N con B encontraremos en O , sobre XY el vértice de la pi-

¹ Véase el número anterior, página 377.

² Publicada en el número anterior, página 380.

rámide, cuyas aristas serán OA_1 , OA_2 y OH , puesto que OC es rebatimiento de ON y hemos supuesto que NH y NL son iguales.

3.^a Puesto que conocemos los ángulos en el vértice de la pirámide, podremos trazar (fig. 9) los tres arcos capaces de estos ángulos sobre los lados de la base; la posición de los tres vértices O , O' , O'' en el desarrollo ha de ser tal, que $A_2O = A_2O'$, $A_3O' = A_3O''$, $A_1O'' = A_1O$.

Y si partimos de un punto cualquiera A y trazamos con centro en A_2 el arco AB , con centro en A_3 el BC y con centro en A_1 el CD , no llegaremos al punto de partida A sino a una distancia AD , que nos permitirá establecer una curva de error para fijar el punto O , en que esta coincidencia se verifica.

4.^a Cada uno de los círculos de la figura 9, al

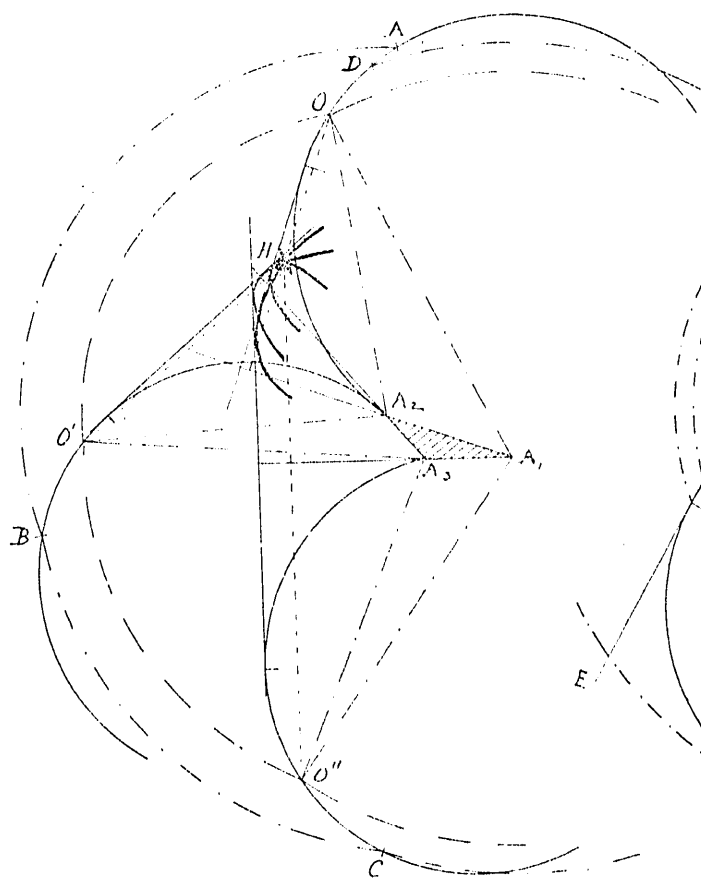


Fig. 9

girar alrededor del correspondiente lado del triángulo base, engendra un toro, sobre el cual habrá de estar el vértice de la pirámide, el cual será la intersección común de las tres líneas de intersección de los tres toros dos a dos. La proyección de estas intersecciones sobre el plano de la base es fácil de hallar (fig. 10); los círculos capaces de los ángulos O y O' , correspondientes a los lados A_1A_2 y A_2A_3 del triángulo, engendrarán dos toros, comprendidos entre los planos proyectados en EH , KL , por una parte, y GHI , TV , por la otra; estos toros tienen un plano común de simetría que es el del dibujo, y su intersección será también simétrica y proyectará sus puntos dos a dos; en los lugares donde su tangente sea perpendicular al plano de proyección, que serán los cuatro puntos A_2BCD en que

se cortan las secciones de los toros, la curva proyección tendrá un punto de detención.

Para hallar la proyección de la curva buscada trazaremos esferas centradas en A_2 , las cuales, por ser de revolución, lo mismo alrededor de A_2A_3 que de A_2A_1 , cortarán a los dos toros según círculos paralelos, cuyos planos son perpendiculares al del dibujo; si MN es la sección de una de estas esferas por el plano del dibujo, trazando por M , MP normal a A_2A_1 , y por N , NQ normal a A_2A_3 ; la intersección R , si cae dentro del círculo MN , es un punto de la proyección buscada. Si se suprime la condi-

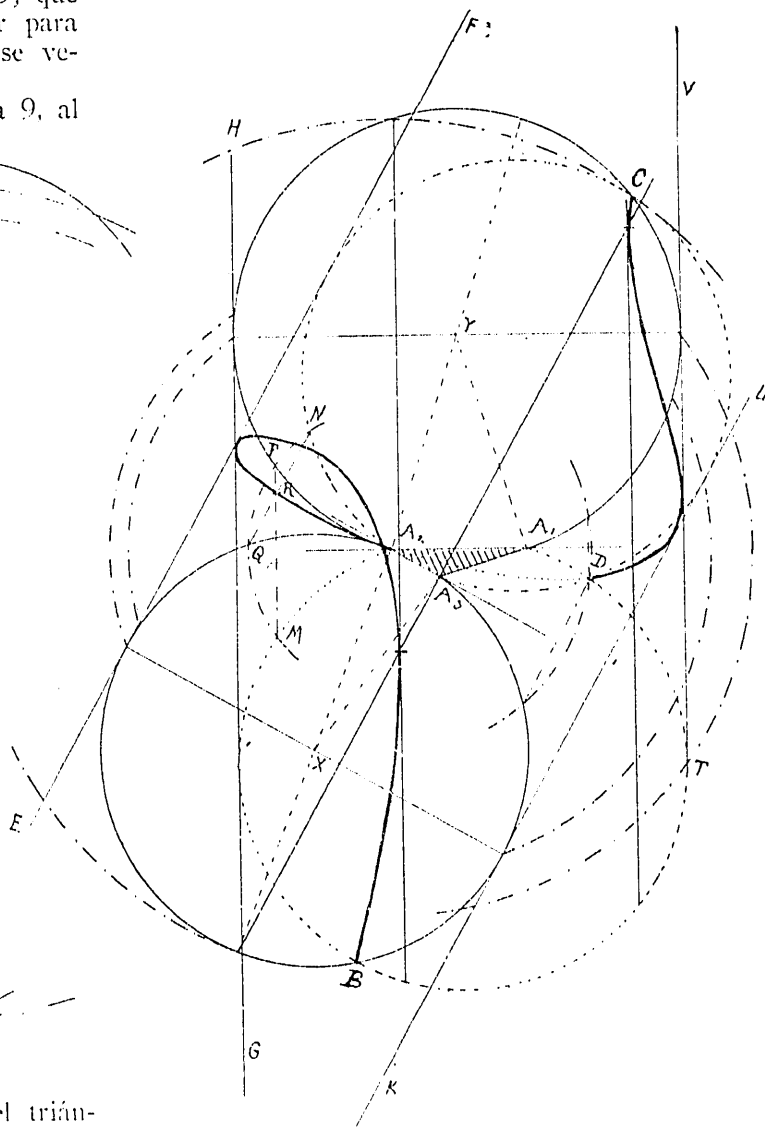


Fig. 10

ción expresada, la curva plana es continua y cerrada, pero sólo una parte de ella es proyección de la intersección de los toros.

Como conocemos de antemano la región del plano en que ha de estar la proyección H del vértice, sólo será preciso trazar una pequeña parte de estas curvas (fig. 9). Los tres rebatimientos del vértice, O , O' , O'' , se obtienen trazando por H tres perpendiculares a los tres lados de la base.

Todos estos procedimientos gráficos son poco precisos, por tener la pirámide, en general, poca base y mucha altura; el último, a pesar de su complicación aparente, es el más fácil y preciso.

Las ecuaciones

$$\lambda_1^2 + \lambda_2^2 - 2\lambda_1\lambda_2 \cos \varphi_3 - L_3^2 = 0$$

$$\lambda_3^2 + \lambda_1^2 - 2\lambda_3\lambda_1 \cos \varphi_2 - L_2^2 = 0$$

$$\lambda_2^2 + \lambda_3^2 - 2\lambda_2\lambda_3 \cos \varphi_1 - L_1^2 = 0$$

que nos darían una solución más precisa, son de resolución laboriosa; pero permiten, cuando es necesario, precisar la solución obtenida gráficamente. Si llamamos $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ a los valores de $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, cuya precisión queremos corregir, su sustitución en las ecuaciones anteriores no las satisfará, sino que sus primeros miembros, en vez de ser iguales a 0, tomarán valores pequeños, que llamaremos $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$; si hacemos

$$\lambda_1 = \delta_1 + \Delta_1\delta_1 \quad \lambda_2 = \delta_2 + \Delta_2\delta_2 \quad \lambda_3 = \delta_3 + \Delta_3\delta_3$$

y sustituimos en las ecuaciones, suponiendo que $\Delta\delta_1, \Delta\delta_2, \Delta\delta_3$ son bastante pequeños para despreciar sus potencias y productos, encontraremos

$$(\delta_1 - \delta_2 \cos \varphi_3)\Delta\delta_1 + (\delta_2 - \delta_1 \cos \varphi_3)\Delta\delta_2 + \frac{1}{2}\varepsilon_3 = 0$$

$$(\delta_3 - \delta_1 \cos \varphi_2)\Delta\delta_3 + (\delta_1 - \delta_3 \cos \varphi_2)\Delta\delta_1 + \frac{1}{2}\varepsilon_2 = 0$$

$$(\delta_2 - \delta_3 \cos \varphi_1)\Delta\delta_2 + (\delta_3 - \delta_2 \cos \varphi_1)\Delta\delta_3 + \frac{1}{2}\varepsilon_1 = 0$$

ecuaciones lineales fáciles de resolver y que nos dan valores de $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ más aproximados que los $\delta_1, \delta_2, \delta_3$; los nuevos valores de la longitud de las aristas pueden ser objeto de otra corrección por igual procedimiento, aumentando la precisión; pero no debe olvidarse que es inútil buscar mayor precisión que la que resulta de las medidas tomadas directamente sobre la fotografía.

Puede seguirse el mismo procedimiento para el resto del problema; si adoptamos provisionalmente un sistema cualquiera de coordenadas cartesianas, con la única condición de que uno de los ejes sea vertical, llamando x_1, y_1, z_1 , etc., a las de los tres puntos del terreno y a, b, c a las del vértice de la pirámide, tendremos:

$$(x_1 - a)^2 + (y_1 - b)^2 + (z_1 - c)^2 - \lambda_1^2 = 0$$

$$(x_2 - a)^2 + (y_2 - b)^2 + (z_2 - c)^2 - \lambda_2^2 = 0$$

$$(x_3 - a)^2 + (y_3 - b)^2 + (z_3 - c)^2 - \lambda_3^2 = 0$$

ecuaciones en las que suponemos ya corregidos los valores de $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$; como gráficamente hemos obtenido un valor aproximado para a, b, c , podremos corregirlos en igual forma, con lo cual tendremos

$$Z_1 = z_1 - c \quad Z_2 = z_2 - c \quad Z_3 = z_3 - c$$

puesto que los sistemas XYZ y xyz tienen los ejes z, Z paralelos por ser centrales.

Claro está que si hubiéramos eliminado $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, entre las seis ecuaciones formuladas, hubiéramos podido corregir a, b, c sin corregir previamente $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$; pero la ventaja es ilusoria, por la mayor complicación de las ecuaciones resultantes.

VI

Las ecuaciones de relación son insuficientes para determinar las coordenadas de un punto XYZ conociendo las xyz de su imagen.

Si la placa es vertical y O (fig. 11) es la proyección horizontal del objetivo, trazando la dirección del eje de las X y tomando en ella la distan-

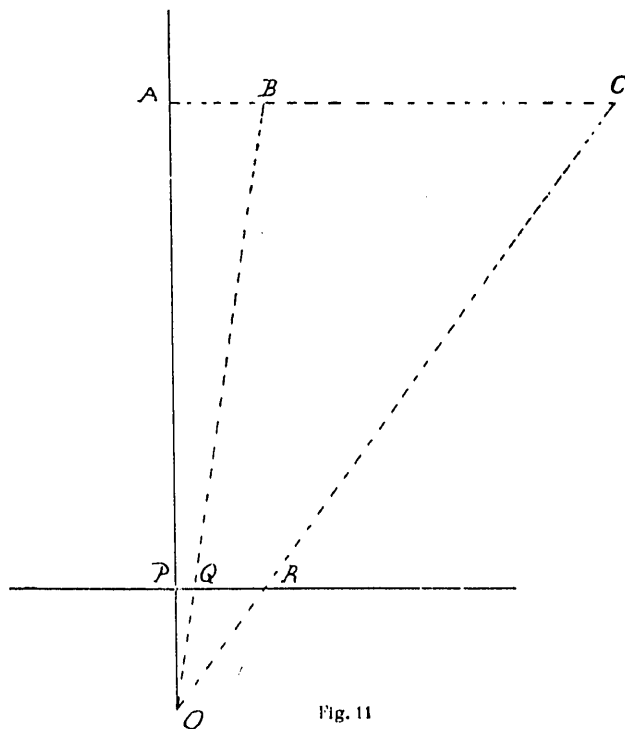


Fig. 11

cia $OP = p$, trazaremos una normal al eje, haciendo $PR = y$, y la línea OR pasará por la proyección C del punto.

Si la placa es oblicua (fig. 12), siendo OA el eje de las X trazaremos $AOP = \omega$ y $OP = p$, y sobre la normal en P tomaremos $PR = z$; trazando ahora QR normal al eje OA , $QR = \beta$ y $OQ = \alpha$, y tomando $QS = y$, OS pasará por la proyección C del punto. Si ésta fuese conocida, puesto que $QR = \beta$, AB será el valor de Z .

En ambos casos vemos que para fijar la situación del punto hace falta algún otro dato que nos haga conocer una de las coordenadas, o bien disponer de dos fotografías para determinar el punto por intersección.

Para el primer objeto puede servir una mira vertical; las coordenadas del pie de la mira nos dan, en placa vertical,

$$\frac{X}{p} = \frac{Y}{y} = \frac{Z}{z}$$

y las de la cabeza,

$$\frac{X}{p} = \frac{Y}{y} = \frac{Z + L}{z + l}$$

de donde

$$\frac{X}{p} = \frac{Y}{y} = \frac{L}{l}$$

y, en resumen,

$$X = p \frac{L}{l}$$

Si empleamos una mira parlante y leemos la parte interceptada en la imagen por una longitud l , X es proporcional a la lectura, que puede dar así directamente, en la escala adecuada, el valor de X .

Cuando la placa no es vertical no puede usarse mira parlante; las ecuaciones del pie y de la cabeza de la mira son

$$\frac{X}{\alpha_1} = \frac{Y}{\beta_1} = \frac{Z}{\gamma_1} \quad \frac{X}{\alpha_2} = \frac{Y}{\beta_2} = \frac{Z + l}{\gamma_2}$$

y de ellas se deduce

$$X = \frac{l}{\frac{\beta_2}{\alpha_2} - \frac{\beta_1}{\alpha_1}} = \frac{l \alpha_1 \alpha_2}{\beta_2 \alpha_1 - \beta_1 \alpha_2} = \frac{l \alpha_1 \alpha_2}{\rho(z_2 - z_1)}$$

y las mismas ecuaciones nos dan luego Y , Z .

La mira puede ser en todos los casos parlante si se coloca horizontal y paralela a la placa, porque entonces sus extremos tienen iguales las coordenadas X , Z , y su imagen tiene también constante la ordenada z , y, por consiguiente, α y β , de modo que:

$$\frac{X}{\alpha} = \frac{Z}{\beta} = \frac{Y_1}{\gamma_1} = \frac{Y_2}{\gamma_2} = \frac{Y_2 - Y_1}{\gamma_2 - \gamma_1} = \frac{l}{l}$$

de donde

$$X = \frac{\alpha l}{l}$$

Para determinar el punto por intersección necesitamos relacionar las dos posiciones de la cámara, para lo cual se puede seguir uno de los procedimientos siguientes:

1.º Supongamos que en cada una de las dos fotografías se ve la otra estación, en la que hemos colocado una mira; trazada la orientación planimétrica de la primera estación, podremos señalar la posición de la segunda y su cota, y como conocemos las coordenadas de la primera sobre los ejes anejos a la segunda, podremos fijar estos ejes, cuyo origen es la estación y cuyo eje de las X es su orientación planimétrica; la cota de la primera estación desde la segunda nos sirve de comprobación.

2.º Si desde ambas fotografías hemos abarcado dos puntos dotados de mira, fijada la orientación de la primera podremos situar los dos puntos, y, calculadas las coordenadas desde la segunda estación, queda determinado el origen y los ejes y, por tanto, la situación de la estación, su orientación y su cota¹.

3.º Pueden sustituirse las miras por la medición *sobre el terreno* de la distancia d de la estación al punto, puesto que

$$\frac{X}{\alpha} = \frac{Y}{\beta} = \frac{Z}{\gamma} = \sqrt{\frac{X^2 + Y^2 + Z^2}{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}} = \sqrt{\frac{X^2 + Y^2 + Z^2}{\rho^2 + \gamma^2 + z^2}} = \frac{d}{u}$$

¹ Si se compara la cámara fotográfica vertical con un taquímetro, se comprobará que en sus medidas y procedimientos son iguales; las relaciones $\frac{Y}{X}$, $\frac{Z}{X}$ que la cámara determina, nos dan los ángulos azimutal y cenital; la mira parlante funciona de igual modo, y sin reducción, y los dos procedimientos de relación de las dos vistas son los de referencias directas e indirectas del procedimiento taquimétrico.

y como conocemos α , γ , β , quedan determinadas las tres coordenadas del punto X , Y , Z .

4.º Conocida la orientación vertical de la cámara, el conocimiento de la distancia y desnivel de dos puntos señalados en la fotografía, es suficiente para determinar la situación exterior; pero el problema, aunque determinado, tiene dos soluciones, por lo que es preferible utilizar tres puntos, que dan una solución única y más fácil de obtener. Puesto que sabemos trazar (fig. 12) la proyección horizontal del rayo proyectante de un punto cuya imagen está en la fotografía, bastará inscribir en

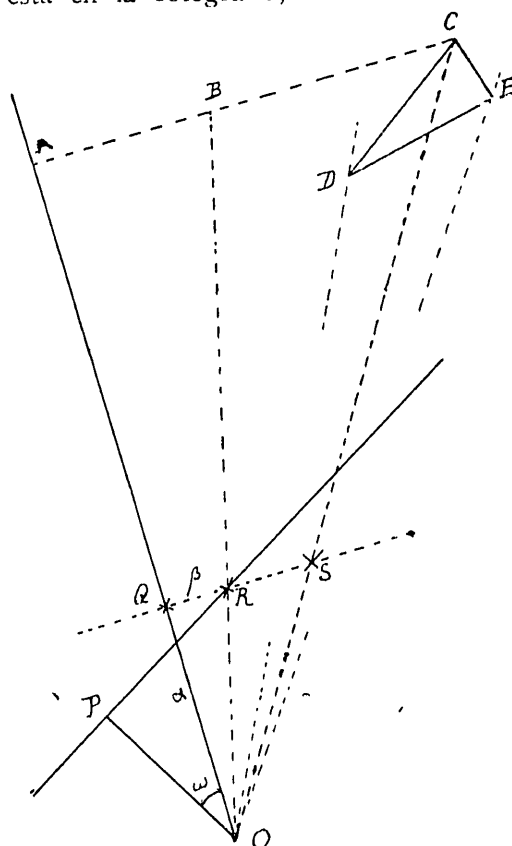


Fig. 12

las tres líneas la proyección horizontal CDE del triángulo formado por los tres puntos, con lo que conoceremos las coordenadas X , Y , y las ecuaciones de relación nos darán las Z . El problema es siempre posible, por tratarse de una fotografía realmente obtenida; si fuese inventada no habría solución, porque las condiciones son excesivas, y los valores obtenidos para las Z no guardarían las diferencias debidas, de las cuales no se ha hecho uso para hallar la solución. Dos puntos nos dan, en efecto, dos ecuaciones para fijar la distancia y el desnivel, y con las cuatro de relación son seis ecuaciones para seis incógnitas, que son las coordenadas de los puntos; con los tres puntos las ecuaciones son once y las incógnitas nueve, y si las ecuaciones no fuesen forzosamente compatibles, no habría solución.

Pueden evitarse los tanteos para inscribir el triángulo por medio de una construcción directa. Conocemos, sea gráfica o numéricamente, los ángulos DOC y EOC ; llamando a al ángulo ODC y b al OEC , tendremos:

$$a + b = 2\pi - DOE - DCE$$

o bien, si el punto C está entre O y DE ,

$$a + b = DCE - DOE$$

en todo caso conocemos el valor de $a + b = s$. Por otra parte, en los triángulos ODC y OEC ,

$$\frac{OC}{\sin a} = \frac{DC}{\sin DOE} \quad \frac{OC}{\sin b} = \frac{CE}{\sin COE}$$

de donde, llamando l al valor de

$$\frac{CE}{\sin COE}$$

y k al de

$$\frac{CD}{\sin COD}$$

$$OC = k \sin a = l \sin b$$

y, por consiguiente,

$$k \sin a = l \sin (s - a) = l \sin s \cos a - l \cos s \sin a$$

de donde

$$\tan a = \frac{l \sin s}{k + l \cos s}$$

y análogamente

$$\tan b = \frac{k \sin s}{l + k \cos s}$$

Si hacemos

$$l^2 + k^2 = 2kl \cos s = R^2$$

$$OC = k \sin a = l \sin b = \frac{kl \sin s}{R}$$

R es, pues, el tercer lado de un triángulo que tiene por lados l y k y por ángulo opuesto, $\pi - s$; y como el numerador $kl \sin s$ representa el doble del área de este triángulo, OC será su altura sobre R .

Si el valor de OC se dedujese numéricamente, las ecuaciones de relación nos darían, para el punto C ,

$$\frac{X}{\alpha} = \frac{Y}{\beta} = \frac{Z}{\gamma} = \frac{OC}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}$$

VII

En resumen: siempre que al hacer cada fotografía cuidemos de abarcar en ella una parte del terreno conocido por las anteriores, y más si en éstas está señalado el emplazamiento de la nueva estación, podremos hacer uso de una cámara de mano sin dispositivo especial, con sólo conocer la orientación interior.

La única dificultad está en las dos primeras fotografías, en las que necesitamos hacer figurar algún objeto que nos permita determinar su orientación vertical.

Antonio PRIETO Y VIVES
Ingeniero de Caminos

Notas de un viaje

No quisiera, en la parte que me afecta, interrumpir una simpática costumbre, que se registra todos los años en estas páginas.

Cada curso, y pensionados al final de sus estudios por la Escuela de Caminos, van al Extranjero cuatro ingenieros, con el compromiso de presentar una Memoria que sintetice el fruto de sus observaciones personales sobre el tema que libremente escogieron.

Casi siempre, como anticipo de este trabajo final, aparecen en la REVISTA DE OBRAS PÚBLICAS breves reseñas de los viajes que realizan estos ingenieros noveles. En semejante trance es mi propósito continuar la tradición de mis compañeros.

Hace poco tiempo regresé de Alemania; allí he visitado los principales aeropuertos y he recogido datos muy interesantes sobre la organización de las comunicaciones aéreas.

Un magnífico Junkers me trasladó, en ocho horas de vuelo, desde la claridad latina de Barcelona a la niebla germánica de Stuttgart.

La ruta, desde Ginebra, fué sobre un mar espeso de nubes, surcado tan sólo por los más altos picachos de la cadena alpina; después se hizo también invisible esta preciosa referencia; probablemente estábamos volando sobre la Selva Negra.

Recuerdo la emoción del aterrizaje; en menos de cuatro minutos precisó el piloto sobre una carta la posición del aeroplano; en ese tiempo estuvimos comunicando con los aeropuertos de Strashurgo, de Stuttgart y de Munich. Con el rumbo recién calcu-

lado inició su descenso el aparato; la bruma era cada vez más densa, hasta que fué rota por el filo de los potentes faros de Boeblingen.

Después de Stuttgart visité Francfort, Hannóver, Hamburgo, Munich y Friedrichshafen.

Conservo una impresión gratísima de este viaje, y nunca olvidaré las atenciones que en todas partes me dispensaron los representantes de la "Deutsche Luft Hansa A. G."; quiero, por ello, rendir a esta Empresa, que es hoy el más firme puntal de la aviación comercial alemana, el testimonio de mi gratitud por todas las facilidades que puso a mi alcance y sin las cuales hubiese sido mínimo el fruto de mi excursión.

Antes de entrar en materia creo que no han de resultar ociosas unas palabras para justificar la oportunidad del tema, que no debe parecer extraño en un ingeniero de Caminos, aunque existan en España, oficialmente, especialidades dedicadas a estas cuestiones.

Quizá sea suficiente decir que los problemas aeronáuticos preocupan hoy tanto en el mundo y afectan a sectores tan amplios de la Ciencia, de la Técnica y del Comercio, que en Alemania, por ejemplo, se estudia extensamente esta disciplina en ocho Universidades, en nueve Escuelas Técnicas Superiores y en diversas Escuelas de Comercio, aparte de otros Centros de carácter empírico dedicados exclusivamente a la práctica de la construcción, montaje y reparación de aeronaves.