

Agrimensura fotográfica

Desde que, en 1850, el coronel Laussedat inició los estudios de Fotogrametría ha sido tal el avance obtenido, que los métodos fotográficos han pasado a la primera línea de la Topografía.

De la alta topografía; la desviación hacia los métodos precisos y hacia el empleo de aparatos que, por su misma perfección, exigen una aplicación suficientemente importante para justificarlos y costearlos, ha ocasionado el desdén hacia las aplicaciones menudas y cotidianas, con aparatos elementales, donde la economía y facilidad de los nuevos métodos no son menos evidentes.

A iniciar una reacción en este sentido se dirigen las presentes líneas.

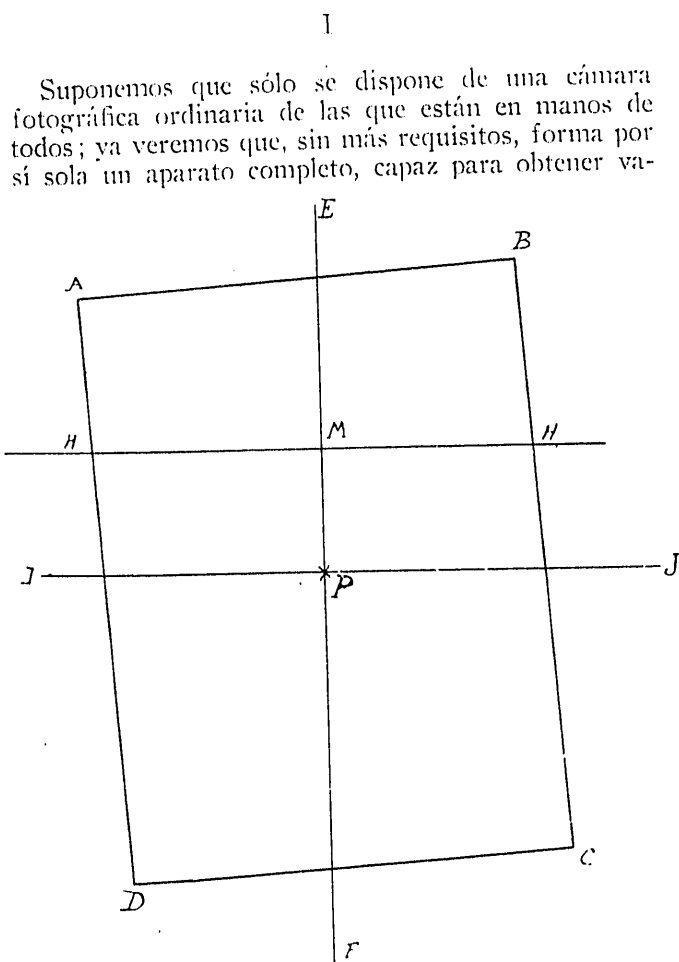


Fig. 1

rias medidas, si bien puede hacerse su manejo más cómodo con algunos dispositivos, que supondremos ausentes. Nos proponemos demostrar precisamente que no son indispensables, y menos algunos aparatos especiales en los que se acumulan elementos redundantes con un objeto único.

La fotografía es una proyección cónica desde el centro óptico del objetivo¹; para definirla necesita-

mos varios elementos, que repartimos en tres grupos:

Con el nombre de *orientación interior* se comprende la posición sobre la fotografía del *punto principal P* (fig. 1) o proyección sobre la placa del centro del objetivo y la *distancia focal* o distancia del centro del objetivo a la placa.

Un plano horizontal que pase por el centro del objetivo y otro vertical que pase por el mismo y por el punto principal, al que llamamos *plano principal*, dibujarán sobre la placa dos líneas perpendiculares entre sí: la *línea de horizonte H-H'* (fig. 1) y el *eje principal E-F* de la fotografía; estas líneas señalan dos elementos: la posición de la fotografía en su plano alrededor de su punto principal y su inclinación ω sobre la vertical; ambos forman la *orientación vertical* de la fotografía.

Por último, la traza del plano principal sobre uno horizontal forma la *orientación planimétrica*. Esta y la posición en planta y alzado del centro del objetivo no son elementos que se fijan en la fotografía, sino en el terreno o en su representación, y forman la *situación exterior* de la cámara fotográfica.

II

La orientación interior no debe faltar nunca, y no es difícil de establecer; solamente hay que suplirla cuando se utilizan fotografías ajenas de las que ignoramos todas las circunstancias, y esto da lugar a problemas interesantes, de los que voluntariamente nos apartamos; cuando usamos aparato propio debemos conocer su distancia focal principal; en cuanto al punto principal, tampoco es difícil fijarlo, especialmente en las máquinas de rollo, gracias al recuadro fijo que estas máquinas tienen, y al cual se aplica la película, quedando señalado en la fotografía; bastará, de una vez para todas, determinar la situación de este punto respecto al recuadro.

Esta operación puede hacerse de muchas maneras, fotografiando objetos de forma y dimensiones conocidas; si conseguimos colocar la placa paralela a una pared donde hemos dibujado una cuadrícula, la imagen será también una cuadrícula, y el punto principal será la imagen de la proyección del centro del objetivo sobre la pared, que podremos fijar por su distancia al suelo y a otra pared normal; el procedimiento supone que el suelo y las paredes son bien planos y normales entre sí y que conseguimos colocar la placa de frente.

Más sencillo es fotografiar un cubo macizo o hueco, y mejor si subdividimos sus caras por cuadrículas; los puntos de concurso de sus aristas *A, B, C* (figura 2) forman un triángulo, cuyos lados serán las rectas de concurso de la caras; este triángulo *ABC* es la traza de un triedro trirectángulo, cuyo vértice está en el centro del objetivo¹; la normal a la placa cuyo pie es *P* está contenida en los tres planos pro-

¹ Recordemos que el punto de concurso de un haz de rectas paralelas es la traza sobre la placa de otra paralela que pase por el centro del objetivo.

¹ En primera aproximación, pero no necesitamos más.

yectantes de las aristas del triédrico, las cuales se proyectan según las tres alturas del triángulo, cuyo punto común será P . Estos planos proyectantes son, en efecto, normales a la placa, y, por ser trirectángulo el triédrico, cada uno es normal a la cara opuesta y, por

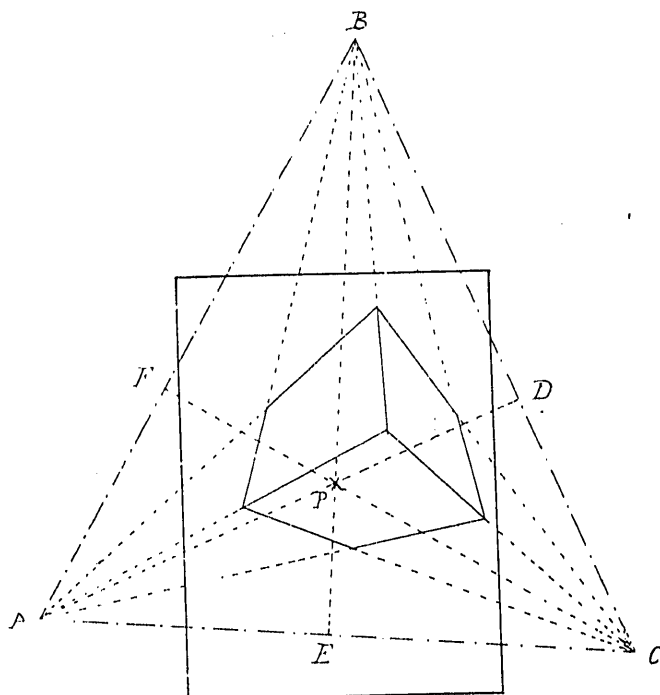


Fig. 2

consiguiente, a su traza, que es uno de los lados del triángulo.

Al mismo tiempo, la distancia p se determina por las relaciones

$$p^2 = FP \times PC = EP \times PB = DP \times PA$$

III

El eje principal de la placa EF (fig. 1) y una paralela a la línea de horizonte trazada por el punto principal I forman un sistema de coordenadas cartesianas, al que referiremos los puntos de la imagen fotográfica. En el espacio, el plano principal, el horizontal del objetivo y otro normal a ambos por el objetivo mismo forman un sistema de coordenadas, al que se referirán los puntos del terreno que se reproducen en la fotografía. Para relacionar las coordenadas de un punto con las de su imagen supondremos referido el conjunto a dos planos de proyección (figura 3) paralelos al de X, Z , o sea el principal, y al de las X, Y , o sea al horizontal del objetivo.

O, O' , es el centro del objetivo, origen de coordenadas en el espacio; $OS, O'V$, son las proyecciones del eje de las X ; $OU, O'U$, del de las Y , y $O, O'Q$, del de las Z ; el punto M, M' tendrá, según esto, por coordenadas:

$$X = O'T \quad Y = SM \quad Z = M'V$$

Cuando la placa sea vertical, siendo perpendicular al plano principal y al horizonte, o sea a los dos planos de proyección, estará en P_1m_1 , y las coordenadas de la imagen del punto serán:

$$y = Am_1 \quad z = P_1m'_1$$

de donde deducimos

$$\frac{X}{f} = \frac{Y}{y} = \frac{Z}{z}$$

ecuaciones donde se comprueba la aptitud de la cámara para medir ángulos, puesto que

$$\text{tang } \angle OS' = \frac{MS'}{OS'} = \frac{Y}{X} = \frac{y}{p}$$

$$\text{tang } \angle O'V' = \frac{M'V'}{O'V'} = \frac{Z}{X} = \frac{z}{p}$$

Cuando la placa se inclina un ángulo, $\omega = P_1O'P_2$, la placa, siempre perpendicular al plano de proyección, será la QP_2 ; si por la imagen $m_2m'_2$ del punto

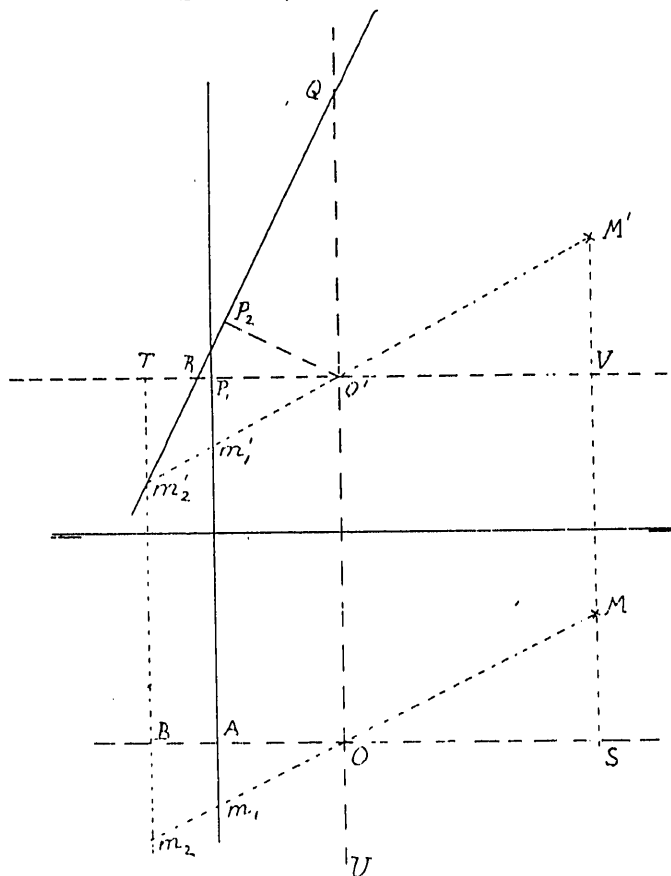


Fig. 3

M trazamos un plano normal al eje óptico, $T'B$, tendremos:

$$\frac{X}{O'T} = \frac{Y}{Bm_2} = \frac{Z}{Tm'_2}$$

pero por ser las horizontales de la placa paralelas al eje Y ,

$$Bm_2 = y$$

y, por otra parte,

$$P_2m'_2 = z$$

haciendo, pues,

$$\alpha = z \sin \omega + p \cos \omega$$

$$\beta = z \cos \omega - p \sin \omega$$

tendremos, al fin,

$$\frac{X}{\alpha} = \frac{Y}{y} = \frac{Z}{\beta}$$

ecuaciones que llamaremos de relación.

Las coordenadas del punto imagen correspondientes a un valor ω del ángulo de inclinación, y las de la imagen correspondiente a la placa vertical por giro alrededor del eje Y' ; es decir, conservando el plano principal, $y'z'$, obedecen a la relación

$$\frac{\alpha}{\rho} = \frac{y}{y'} = \frac{\beta}{z'}$$

de donde se deduce

$$y' = \frac{\rho y}{\alpha} \quad z' = \frac{\rho z}{\beta}$$

estas ecuaciones nos permitirían utilizar una fotografía obtenida con inclinación como si fuese vertical, por transformación de sus coordenadas.

Son de utilidad algunas relaciones independientes de la inclinación, como las

$$\frac{\alpha^2 + \beta^2}{y^2} = \frac{z^2 + \rho^2}{y'^2} = \frac{z'^2 + \rho^2}{y'^2} = \frac{Z^2 + X^2}{Y^2}$$

referentes a un solo punto, y las

$$\frac{\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1}{Y_1Y_2} = \frac{\rho(z_2 - z_1)}{Y_1Y_2} = \frac{\rho(z'_2 - z'_1)}{Y'_1Y'_2} = \frac{X_1Z_2 - X_2Z_1}{Y_1Y_2}$$

$$\frac{\alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2}{Y_1Y_2} = \frac{\rho^2 - z_1z_2}{Y_1Y_2} = \frac{\rho^2 - z'_1z'_2}{Y'_1Y'_2} = \frac{X_1X_2 + Z_1Z_2}{Y_1Y_2}$$

que se refieren a dos puntos caracterizados por los subíndices 1 y 2.

IV

Para determinar la línea de horizonte de una fotografía o, lo que es igual, la dirección de sus ejes y el valor del ángulo de inclinación, suponiendo que la cámara no tenga dispositivo especial para obtener este dato automáticamente, podremos hacer uso de alguno de los procedimientos siguientes:

1.º Si en el campo existen líneas verticales o las disponemos nosotros con este fin, puede hallarse su punto de concurso, que, unido con el principal, nos dará el eje; llamando λ a la distancia entre el punto de concurso y el principal tendremos:

$$\tan \omega = \frac{\rho}{\lambda}$$

2.º Una figura geométrica, situada en un plano horizontal, puede darnos directamente la línea de horizonte; si adoptamos un hexágono regular estrellado (sello de Salomón), sus tres pares de líneas paralelas nos darán tres puntos de concurso, de los que podremos utilizar, por lo menos, dos, si uno de ellos se aleja demasiado, y la línea que los une es la de horizonte HH (fig. 4). Además, si suponemos rebatido alrededor de HH el plano horizontal que contiene el objetivo, trazando sobre AB un arco capaz de 60° , otro sobre BC de los mismos 60° y otro sobre AC de 120° , estos tres arcos se cortarán en O , centro del objetivo; OP será, pues, el eje, que deberá ser perpendicular a HH , y, además,

$$RP = OR \sin \omega \quad \rho = OR \cos \omega$$

de donde deduciremos ω y aun ρ , si no lo conociésemos de antemano.

Las líneas OA , OB y OC forman entre sí ángulos de 60° ; las que unen el punto O con los centros de los arcos (señaladas en la figura con flechas) forman también iguales ángulos. Además, si prolongamos MN hasta D , el semicírculo trazado sobre AD pasará también por O y su centro estará sobre la bisectriz TOI .

Hay, pues, un exceso de elementos que contribu-

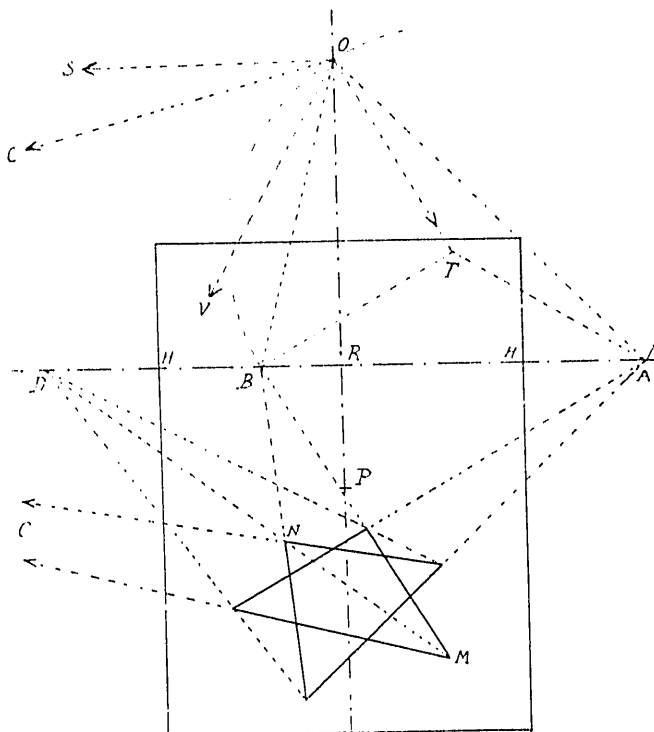


Fig. 4

yen a fijar y comprobar los datos que necesitamos.

3.º Si existe un punto cuya distancia y desnivel con la estación conocemos, lo que ocurrirá fácilmente en trabajos de cierta extensión, cuando nos apoyemos en la parte ya levantada para continuar, tendremos:

$$\frac{X}{\alpha} = \frac{Y}{y} = \frac{Z}{\beta} = \sqrt{\frac{X^2 + Y^2}{\alpha^2 + \beta^2}} = \frac{Z}{\rho} = \sqrt{\frac{X^2 + Y^2}{\rho^2 + y^2 + z^2}}$$

o bien, llamando L a la distancia y h al desnivel, y m a la distancia sobre la placa entre el punto principal y la imagen del mismo punto,

$$\beta = h \sqrt{\frac{m^2 + \rho^2}{L^2 + h^2}}$$

Si la placa es vertical β se confunde con z , y basta para determinar la dirección de los ejes de la placa; pero, en el caso general, necesitaremos el concurso de tres puntos, teniendo entonces:

$$\frac{\beta_1 - \beta_2}{\beta_1 - \beta_3} = \frac{z_1 - z_2}{z_1 - z_3}$$

y si se tiene en cuenta que (fig. 5)

$$\frac{z_1 - z_2}{z_1 - z_3} = \frac{BD}{CD}$$

podremos fijar el punto D , que unido al A nos fijará la dirección de los ejes; después, la relación

$$\cos \omega = \frac{\beta_1 - \beta_2}{z_1 - z_2} = \frac{\beta_1 - \beta_3}{z_1 - z_3}$$

nos determinará la inclinación ω ; cada pareja de puntos proporciona una solución que comprueba las demás.

Las ecuaciones de relación, una vez determinados los ejes de la placa siendo conocidos los de Z , β ,

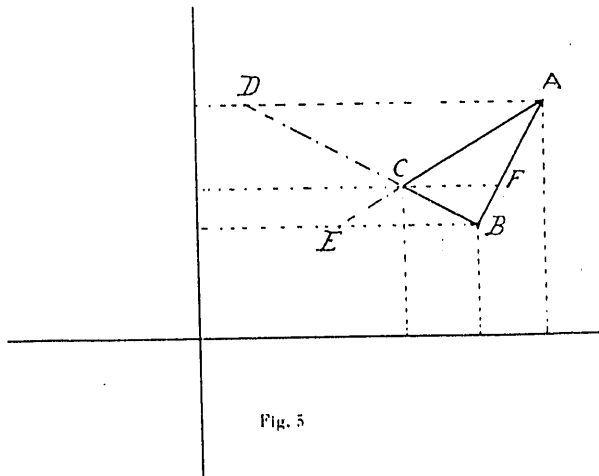


Fig. 5

servirán para determinar los de X , Y de los tres puntos, y, por consiguiente, la situación exterior con relación a ellos.

4.º Puede fijarse a la vez la orientación vertical de la placa y su situación exterior, con sólo identificar en la fotografía tres puntos del terreno, conocidos por su situación planimétrica y sus desniveles.

Las líneas que unen el centro del objetivo con los tres puntos forman un triedro del que son secciones el plano de los tres puntos y su imagen en la placa; si llamamos m_1, m_2, m_3 a las distancias medidas en ésta entre cada una de las tres imágenes y el punto principal, l_1, l_2, l_3 a las distancias entre sí de las mismas imágenes y u_1, u_2, u_3 a las distancias de las tres imágenes al centro del objetivo, la pirámide que se forma dentro de la cámara tiene por base, sobre la placa, el triángulo, cuyos lados son l_1, l_2, l_3 , y por aristas laterales,

$$u_1 = \sqrt{f^2 + m_1^2} \quad u_2 = \sqrt{f^2 + m_2^2} \quad u_3 = \sqrt{f^2 + m_3^2}$$

Los ángulos en el vértice del triedro serán, según esto,

$$\cos \varphi_1 = \frac{u_2^2 + u_3^2 - l_1^2}{2u_2u_3} \quad \cos \varphi_2 = \frac{u_1^2 + u_3^2 - l_2^2}{2u_1u_3} \\ \cos \varphi_3 = \frac{u_1^2 + u_2^2 - l_3^2}{2u_1u_2}$$

En la pirámide exterior, cuya base es el triángulo formado por los tres puntos del terreno, de lados L_1, L_2, L_3 , y cuyas aristas laterales llamaremos $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, tendremos:

$$\lambda_1^2 + \lambda_2^2 - 2\lambda_1\lambda_2 \cos \varphi_3 = L_3^2 \\ \lambda_3^2 + \lambda_1^2 - 2\lambda_3\lambda_1 \cos \varphi_2 = L_2^2 \\ \lambda_2^2 + \lambda_3^2 - 2\lambda_2\lambda_3 \cos \varphi_1 = L_1^2$$

ecuaciones que, en general, forman un sistema determinado. El problema tendrá, pues, un número limitado de soluciones, entre las cuales la inspección de la fotografía nos hará conocer la que nos es útil, siempre que nos sea dado determinar el orden relativo de magnitud de las tres aristas $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$.

Si suponemos conocidas estas aristas (ya veremos después cómo pueden determinarse), podremos construir el desarrollo de la pirámide sobre el plano de su base (fig. 6), y trazando por los vértices O, O', O'' perpendiculares a los lados de la base A_1A_2, A_2A_3, A_3A_1 , el punto común H será la proyección, sobre dicho plano, del vértice de la pirámide. Rebatiendo el plano $O''JH$, el vértice esta-

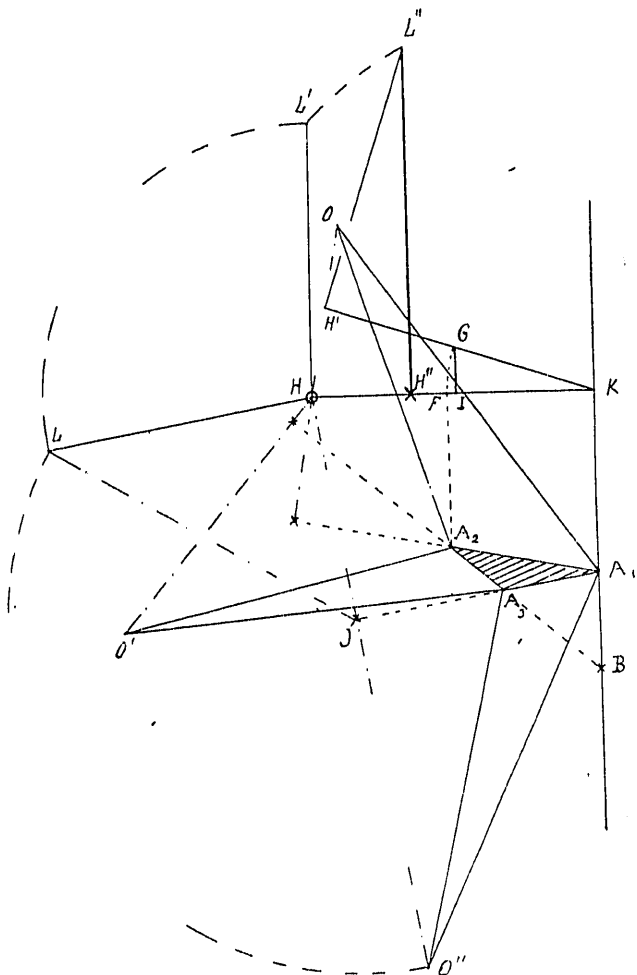


Fig. 6

rá sobre HL , normal a $O''H$ y a la distancia $JH = JO''$, y LH será, por consiguiente, la altura de la pirámide.

Como la base no es horizontal, buscaremos en la alineación A_2A_3 un punto B de igual cota que el A_1 , y la línea BA_1 será horizontal en el terreno; haciendo, pues, girar la pirámide alrededor de esta línea hasta que los vértices de la base adquieran el desnivel debido, tendremos colocada la pirámide en su verdadera posición respecto de la vertical; proyectando sobre el plano vertical HK normal a BA_1 y rebatiendo, la base estará en $F'K$ y el vértice en L' , y al girar alrededor de K hasta que el punto F' llegue a G , a la altura GI sobre A_1 , el punto H llegará a H' y el vértice L' a L'' ; la distancia $L''H''$ será, por consiguiente, la diferencia de nivel entre el ob-

jetivo y el punto A_1 , es decir, el valor de Z_1 , y conociendo la diferencia de nivel entre los tres puntos, quedan determinados a la vez Z_2 y Z_3 .

De las ecuaciones de relación deducimos:

$$\frac{X}{\alpha} = \frac{Y}{\beta} = \frac{Z}{\gamma} = \sqrt{\frac{X^2 + Y^2 + Z^2}{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}} = \lambda$$

y, por consiguiente,

$$\beta_1 = \frac{Z_1''}{\lambda_1} \quad \beta_2 = \frac{Z_2''}{\lambda_2} \quad \beta_3 = \frac{Z_3''}{\lambda_3}$$

y conocidos así los valores de β_1 , β_2 , β_3 , estamos en un caso resuelto ya anteriormente.

Puede seguirse otro procedimiento: si unimos sobre la placa el punto principal con los tres vértices

del triángulo, las tres líneas así trazadas cortarán a los tres lados en sendos puntos, que se podrán referir fácilmente a los lados A_1A_2 , A_2A_3 , A_3A_1 del triángulo del terreno, y estos nuevos puntos, unidos con los vértices del mismo triángulo, nos darán tres líneas que se cortarán sobre un punto del cual es imagen el punto principal, y que, unido con éste, nos da la prolongación del eje del objetivo, cuya proyección horizontal es el eje de las X . Trazado éste, conoceremos las coordenadas X e Y , que añadidas a la Z , que hemos ya determinado, nos permiten calcular los valores de las α , β , y de éstas deduciremos los ejes de la placa y el valor de la inclinación.

En otro artículo terminaremos estas notas con la determinación de las aristas λ_1 , λ_2 , λ_3 , lo que constituye el llamado "problema de la pirámide".

Antonio PRIETO Y VIVES
Ingeniero de Caminos

La carretera y el ferrocarril

Con el título de "El automóvil y el ferrocarril", Jiménez Ontiveros ha publicado un interesante trabajo, que contiene valiosos datos, a la vez que trata de establecer una teoría de coordinación del coste de ambos transportes. Pero los enlaces algebraicos, en mutua dependencia base de sus fórmulas, le obligan a deducir consecuencias que, aun atenuadas por consideraciones generales de gran valor, estimamos no pueden admitirse por ser contrarias a las que se obtienen en el planteamiento general y sencillo del asunto. Y con objeto de hacer algunas observaciones a las modalidades de su estudio escribimos estas líneas.

Las fórmulas que establece le llevan a considerar que la competencia entre el ferrocarril y la carretera se hace a base de tráfico determinado, que pudiéramos llamar de indiferencia, por ser indistinto su transporte en ferrocarril o en carretera. Llega así a la conclusión de que la longitud, hasta ahora módulo de estas competencias, ocupa un lugar accesorio. Sin embargo, la lucha tiene por base una relación conveniente de las longitudes del ferrocarril y de la carretera que unen los dos puntos en competencia.

Para el público el coste de los transportes es la tarifa. Partiendo de los datos de la obra citada puede establecerse para un transporte de x toneladas-kilómetros la siguiente relación:

$$x \cdot 0,50 \cdot l = x \cdot 0,1033 L + x \cdot 1,2$$

en la que l es la longitud de la carretera, L la del ferrocarril, 0,50 pesetas la tarifa del transporte de la tonelada-kilómetro por carretera y 0,1033 por ferrocarril y 1,20 los gastos de carga y transporte a la estación admitidos por Jiménez Ontiveros.

Esta ecuación es independiente de x y, por consiguiente, la competencia sólo depende de la relación l/L de las longitudes del ferrocarril de la carretera.

Para $l/L = 1$, el valor de longitud con estos datos no llega a 4 kilómetros.

Para $l = 10$ km se obtiene $L = 32$ km.

La competencia general entre el ferrocarril y la carretera, en relación con las mercancías, es muy pequeña. Esto lo corrobora la experiencia y lo manifiesta, con su autoridad indiscutible, la Sociedad nacional de los ferrocarriles belgas, cuando dice, en la Memoria de 1930, que aun para los transportes inferiores a 50 kilómetros puede el ferrocarril vencer la competencia de la carretera; afirmación de gran valor por ser Bélgica un país cuajado de ambas vías de comunicación.

Ahora bien, esta comparación se ha hecho con las tarifas medias en el ferrocarril. Si se toman las máximas la competencia aumenta, y esto es lo que demuestra la experiencia: que a la carretera alluye el tráfico más valioso o aquel en el cual los gastos accesorios de embalaje y otros pueden disminuirse al transportarse por camión, lo que, agregado a las mayores facilidades y rapidez en el transporte, hace algo más sensible, aunque muy poco, la competencia con el ferrocarril.

Respecto de los viajeros, la ecuación análoga nos da

$$x \cdot 0,12 \cdot l = x \cdot 0,0577 L + 2x$$

aceptando los datos de la citada obra y siendo y el viajero-kilómetro, 0,12 la tarifa por carretera, 0,0577 la del ferrocarril y 2 pesetas el importe de los gastos de traslado desde el punto de partida a la estación y la de llegada al punto de destino.

La longitud para la cual son iguales los dos transportes vale 32 km. Para $l = 100$ km se obtiene $L = 174$, y para $l = 240$, $L = 463$. Como se ve, es posible establecer la competencia con el ferrocarril a distancias mayores, que para las mercancías se tiene que hacer muy viva en España, donde la falta de ferrocarriles permite acortamientos enormes entre el recorrido por carretera y por ferrocarril.

La fórmula anterior se refiere a la tarifa media en ferrocarril; pero, si se toma como base la de segunda clase, puede verse que para la distancia de 240 kilómetros, que hay entre Burgos y Madrid, es posible establecer la competencia con los 370 kilómetros