

horizontal es de 280 mm, y de 274 en sentido vertical.

La sección de la galería de desagüe que la compuerta cierra es de $1,22 \times 1,24$ m, y el cálculo de las dimensiones de los distintos elementos de aquella nada de particular ofrece, careciendo de suficiente interés para alargar con exceso esta breve reseña, ya que con todo detalle acotamos en las figuras aquellos elementos.

Tan sólo creemos, sí, oportuno describir el revestimiento adoptado en la solera, inmediatamente aguas arriba de las compuertas.

En la primera apertura de ellas, y a pesar de la dureza del bronce fosforoso empleado en los marcos, el del umbral del marco fijo, al paso de las arenas y acarreo en el desagüe de fondo, con la imponente velocidad con que salen, se melló y redondeó su borde, perdiendo casi un centímetro de solape con el de la compuerta. Esto nos hizo ver la necesidad de aminorar en lo posible aquel efecto de lima, y pensamos dar a la solera aguas arriba una ligera contrapendiente, en forma de trampolín, que hiciera al acarreo saltar en parte por encima del marco, colocando el borde de aquella solera algo por encima y a la distancia conveniente del umbral del marco fijo.

Esta distancia la decidió otra consideración, y fue la de la limpia de los acarreo, y que, próximo a terminar el descenso de la compuerta, se encuen tren rellenando el hueco del pie del trampolín, según puede observarse en la figura que se acompaña.

Al llegar el borde inferior de la compuerta al nivel del borde alto del trampolín queda una separación entre ellos de 25 mm, siendo de 40 la de la salida entre el marco del umbral y la compuerta. Se establecerá, pues, una fuerte corriente asifonada que limpiará de material todo aquel depósito, y rápidamente puede la compuerta, que se ha detenido un

momento en aquella posición, descender a su punto de cierre.

En el caso no probable de que algún material de dimensiones ajustadas a la ranura quedase encajado en ella, bastará el peso de la propia compuerta, actuando de martinete, para que se desmenuce y salga arrastrado.

Los efectos, experimentados ya, del trampolín descrito han sido excelentes, y así pudo comprobarse al maniobrar repetidamente las compuertas al hacer la División Hidráulica del Júcar entrega del pantano en fecha reciente al Sindicato de Riegos de la Vega de Valencia.

La solera descrita la constituyen dos piezas laterales, que se entregan 5 cm en la fábrica de los estribos de la galería, y otra central que une perfectamente a aquéllas por varias lengüetas de enchufe. Todas las piezas están dotadas de los nervios de refuerzo, que se representan en la figura.

El peso de la compuerta es de 2400 kilogramos.

La potencia de elevación disponible, de 39 toneladas, y el esfuerzo inicial a vencer a embalse lleno (38,50 m), de 27,380 toneladas.

La máxima tensión en el vástago, cuyo diámetro es de 0,10 m, es de 360 kg/cm^2 , y la compresión en el cierre, de 273 kg/cm^2 .

Las dos disposiciones descritas, tanto de cierre hermético de la cabeza de la compuerta como la solera en trampolín, han dado los resultados que nos proponíamos obtener, con un coste, sumamente económico, de 24 000 pesetas cada una de las compuertas colocadas en obra.

En el "stand" que la División Hidráulica del Júcar presenta en el pabellón de Fomento de la Exposición de Sevilla puede verse despiezada la compuerta del pantano de Buseo descrita y una maqueta, en la que, por agua a presión y un gato hidráulico análogo al de la obra, se puede efectuar la maniobra.

Arturo MONFORT HERVÁS
Ingeniero de Caminos

Breve comentario acerca de la inexactitud de una conocida expresión del trabajo elástico

Vamos previamente a resolver una cuestión sumamente sencilla, un facilísimo problema, que habrá de auxiliarnos con toda eficacia al objeto de establecer los elementales distingos componentes de estas sumarísimas notas. Inmediatamente abordaremos esa resolución, y a la postre (conste que la ocurrencia tiene conocidos precedentes), es decir, ya resuelto, daremos el enunciado del llamado problema, aunque no sea más que por la sospecha de que sin tan capital requisito podamos encontrar dificultad para incluirlo entre los auténticos problemas como uno de tantos.

Empezamos a operar a la temperatura de 30°C . A esa temperatura tenemos suspendida por uno de sus extremos una cabilla de acero de un centímetro cuadrado de sección, cuya longitud es de 45,50 metros; del extremo libre colgamos un peso de 495 kilogramos, y queremos calcular el alargamiento de la citada varilla por la tracción debida a dicho peso.

Como es sabido, basta y sobra para solucionar

tan elemental cuestión utilizar la definición del coeficiente de elasticidad longitudinal, que es la relación más sencilla que darse puede entre esfuerzos y deformaciones por ellos producidos. En general, si de una barra de longitud L , cuya sección tiene por área S , suspendemos un peso P , de forma que sólo haya esfuerzo de tracción, dicha barra tendrá un alargamiento; si designamos por ΔL este alargamiento y por E el expresado coeficiente de elasticidad longitudinal, sabemos o tenemos por definición que

$$E = \frac{P}{S} : \frac{\Delta L}{L}$$

de donde resulta, para medida del alargamiento producido por la acción del peso P , el valor

$$\Delta L = \frac{PL}{ES} \quad [I]$$

y como son los valores numéricos para el elementálisis caso en cuestión:

$$\begin{aligned} P &= 495 \text{ kg} \\ L &= 45,50 \text{ m} \\ E &= 22\,500\,000\,000 \text{ (kg por m}^2\text{)} \\ S &= 0,0001 \text{ m}^2 \end{aligned}$$

hechas las sustituciones en la precedente expresión [I], obtenemos de ella que nuestra cabilla de 45,50 m, a la temperatura de 30° C, por la acción del peso de 495 kg, se alarga un centímetro, convirtiéndose su longitud, por consecuencia, en la de 45,51 metros.

Descolgamos el peso, y como suponemos, ahora y en todo momento del discurso del presente artículo, que operamos dentro del régimen de la más perfecta elasticidad y la invariabilidad absoluta de E , la longitud de nuestra cabilla tornará a ser la primitiva, pasando de la de 45,51 m a recuperar la de 45,50 m que tenía antes de ser sometida a la acción del peso de 495 kilogramos.

La cabilla ahora, libre de ese peso, vamos a someterla a la acción de una variación térmica. Hagamos bajar su temperatura, de la de 30° C a la de 10° C. Ese descenso de 20° C producirá un acortamiento, cuya cuantía pasamos a deducir, para obtener la longitud de la varilla de nuestro problema, a la temperatura de 10° C.

Es aún más fácil ese cálculo que el del acortamiento antes efectuado; siendo el coeficiente de dilatación del acero 0,000011, al descenso de la temperatura en 20° indicado le corresponderá por unidad de longitud el acortamiento

$$\lambda_{20} = 20 \cdot 0,000011 = 0,00022 \text{ m}$$

que vale para la longitud L , la cantidad $\lambda_{20}L$, o sea, un centímetro para la cabilla de nuestro problema ($L = 45,50 \text{ m}$), por lo que su longitud a la temperatura de 10° C es la de 45,49 metros.

Podemos decir que en lo expresado va resuelto el siguiente problema sencillo, que pasamos a enunciar: "Fijamos a puntos completamente invariables, de forma que a la temperatura de 30° C en que hacemos tal operación quede sin tensión ni compresión inicial alguna, los extremos de una cabilla de acero, que a esa temperatura mide 45,50 m, de un centímetro cuadrado de sección. Si, así sujeta, hacemos bajar la temperatura de la cabilla a 10° C, ¿cuál será el esfuerzo de tracción a que, por impedirse en absoluto su acortamiento, quedará sometida dicha cabilla metálica?"

Los datos y consideraciones que en lo que precede han quedado consignados (dada la igualdad del alargamiento y del acortamiento calculados) permiten afirmar que el esfuerzo que se busca es 495 kilogramos.

Para los lectores más exigentes pudiera haberse dado al problema un poco más generalidad, enunciándolo así: "Fijos a dos puntos invariables los extremos de una cabilla de acero de longitud L , área de la sección S y coeficiente de elasticidad E , calcular el esfuerzo de tracción originado (por impedirse en absoluto el acortamiento de dicha varilla metálica) o que soportará la citada cabilla, al hacer bajar su temperatura lo necesario para haber producido en la misma el acortamiento λ por unidad de longitud

si hubiera estado libre para poder experimentar la contracción."

Nos hubiéramos limitado para resolver la cuestión así planteada a igualar λL (*acortamiento* en la longitud L), al *alargamiento* por el esfuerzo de tracción T , que viene dado por la expresión [I], obteniendo así:

$$\lambda L = \frac{TL}{ES}$$

de donde resulta que la tensión T que buscamos tiene por valor

$$T = \lambda ES \quad \text{[II]}$$

de donde sustituyendo

$$\begin{aligned} \lambda &\text{ por } 0,00022 \text{ m} \\ E &\text{ por } 22\,500\,000\,000 \text{ (kg por metro cuadrado)} \\ S &\text{ por } 0,0001 \text{ metros cuadrados} \end{aligned}$$

llegamos a deducir para T el valor de 495 kg del caso numérico antes resuelto, lo que comprueba la exactitud de la expresión [II].

Todavía pudiera haberse generalizado un poco más (considerando la compresión, además de la tracción simple, por ejemplo, con el doble signo + para λ); mas para la finalidad y elementalidad de este modesto artículo, lo tratado hasta ahora ya es bastante.

* * *

Queda invitado el lector convencido de la exactitud de lo que llevamos expuesto a acompañarme a resolver otra vez la sencilla cuestión precedentemente planteada y resuelta. Claro que esta segunda vez vamos a utilizar otro procedimiento operatorio, y va a ser el de recurrir al empleo de una conocida expresión del trabajo molecular o trabajo elástico, dada por algunos acreditados autores, que, para no ser del todo molesto, voy a permitirme tachar de *superabundante*, justificándolo a mi manera. Pero, antes de emprender esa tarea, creo conveniente dedicar un poco al razonamiento o cosa parecida.

Imaginemos un arco, una viga recta u otra cualquiera (la que prefiera el lector) pieza prismática de las corrientemente estudiadas en los cursos de Resistencia de materiales, sometida exclusivamente a la acción de pesos que podrán ser: cargas aisladas o concentradas y cargas uniformemente repartidas o extendidas, con arreglo a la ley de variación que al lector más le plazca.

Sabemos que a lo largo de la fibra media de tal pieza prismática (que consideramos en equilibrio sometida a dichas fuerzas exteriores y a las reacciones en los apoyos o enlaces correspondientes), en cada sección de dicha pieza o punto de su directriz, puede haber, como efectos del conjunto de las acciones y de las reacciones, un momento flector (M), un esfuerzo normal (N) dirigido según la tangente a la fibra media en el punto que se considere, y un esfuerzo cortante o tangencial (T) en el plano de la sección correspondiente al mismo punto.

La actuación de los pesos y de las reacciones a ellos debidas altera el equilibrio molecular y produce la deformación de la pieza prismática. Las fuerzas exteriores desarrollan trabajo que, en las condiciones sabidas de su gradual aplicación, *equivale justamente* a la energía almacenada en la pieza, re-

querida por el nuevo equilibrio molecular subsiguiente a su deformación, y el respectivo trabajo molecular o trabajo elástico (y su equivalente el de las fuerzas exteriores, por tanto) viene valorado, según los tratadistas en la materia justifican, en el caso de la actuación de fuerzas exteriores, como los pesos y causas análogas, por la conocida expresión:

$$T = \frac{1}{2} \left[\int_0^l \frac{M^2}{EI} dl + \int_0^l \frac{N^2}{ES} dl + \int_0^l \frac{T_e^2 x}{E'S} dl \right] \quad [III]$$

cuyas nuevas notaciones (I momento de inercia de la sección en cada punto de la directriz de la pieza prismática considerada, etc.) creo ocioso explicar a los lectores de la REVISTA,

Sabemos también que en los cálculos de resistencia de materiales, además de los pesos o fuerzas exteriores en general, hay que tener en cuenta con mucha frecuencia otras causas de muy distinta índole, tales como el fraguado de los hormigones, las variaciones de la temperatura y otras análogas a ellas, cuya actuación, si bien no produce trabajo externo (trabajo que *directamente pueda medirse* como producto de fuerza por camino recorrido), como el de los pesos, por ejemplo, origina deformaciones por las alteraciones del volumen de las piezas prismáticas; deformaciones que, parcialmente contenidas o en absoluto impedidas por los obstáculos que presentan las sustentaciones, dan lugar a momentos y esfuerzos como los M , N y T_e debidos a los pesos y causas exteriores análogas.

Es de creer que si las variaciones de la temperatura o del estado higrométrico, etc., producen momentos y esfuerzos M_i , N_i y T_i , la *energía almacenada*, el trabajo elástico o molecular debido *exclusivamente* a tales causas, debe venir dado por una expresión como la (III), o sea, por

$$T_i = \frac{1}{2} \left[\int_0^l \frac{M_i^2}{EI} dl + \int_0^l \frac{N_i^2}{ES} dl + \int_0^l \frac{T_{ei}^2 x}{E'S} dl \right]$$

pero varios autores (ellos sabrán el porqué) se permiten la genialidad de convertir el trinomio precedente en pentanomio, por la adición de una pareja de sumandos, que llevan a esta *superabundante* expresión:

$$T_i = \frac{1}{2} \left[\int_0^l \frac{M_i^2}{EI} dl + \int_0^l \frac{N_i^2}{ES} dl + \int_0^l \frac{T_{ei}^2 x}{E'S} dl \right] + \int_0^l N_i \lambda dl + \int_0^l M_i \frac{\lambda - \lambda_1}{2c} dl \quad [IV]$$

Fijémonos, por ejemplo, en un arco empotrado o articulado en los arranques, sometido exclusivamente a la acción de la temperatura. Si los momentos y esfuerzos normales y tangenciales en cada punto de la dirección del arco nacidos de las reacciones en los arranques originadas al impedirse por éstos la libre dilatación o contracción del arco son los representados por M , N y T_e , ¿no es cierto que para la valoración del trabajo elástico o energía acumulada en tal arco a causa de la variación térmica, sobran los dos últimos sumandos, los que van fuera del paréntesis en la expresión [IV]? ¿Acaso conciben los distinguidos autores del aditamento de esos

dos sumandos finales, deformaciones o trabajos moleculares de otra suerte que los originados de los esfuerzos M , N y T_e ?

* * *

Voy a recurrir a la *deducción del absurdo*, para tratar de justificar que sobran los dos sumandos finales de la expresión [IV], que, para ser exacta, debe reducirse a la

$$T_i = \frac{1}{2} \left[\int_0^l \frac{M_i^2}{EI} dl + \int_0^l \frac{N_i^2}{ES} dl + \int_0^l \frac{T_{ei}^2 x}{E'S} dl \right]$$

que antecede; pero voy a hacerlo, como he dicho, limitándome al caso sencillo de la cabilla metálica que se ha tratado, porque, de igual modo que tan elemental cuestión, podrá considerarse otro problema cualquiera o caso práctico de complicación mayor.

Supongamos exacta la expresión [IV] que vamos a utilizar para el cálculo de la tensión T , que soporta una cabilla de acero de longitud L y sección S , cuyos extremos fijamos a dos puntos invariables, cuando hacemos bajar la temperatura hasta la que de haber estado la cabilla libre, hubiera producido un acortamiento λ por unidad de longitud, o sea, λL en la total de la cabilla metálica.

Siendo en nuestro caso igual la contracción para todas las fibras de la varilla, sobra el último sumando de la expresión [IV]; nulos son también los sumandos extremos (el primero y el tercero) del paréntesis de dicha expresión, porque, reduciéndose las reacciones de los apoyos a tracciones según el eje de la cabilla, no existen momentos flectores ni esfuerzos cortantes.

La expresión [IV], para la aplicación al caso de nuestro problema sencillo, queda reducida a los dos sumandos restantes que sigue:

$$T_i = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{N_i^2}{ES} dl + \int_0^l N_i \lambda dl \quad [V]$$

E , S y λ constantes, pueden sacarse fuera del signo integral; N_i , el mismo en todos los puntos del eje de la cabilla, es la tensión o esfuerzo de tracción que buscamos, y que antes representamos por T , y la integración, reducida en ambos sumandos a la de dl , da o tiene por valor L , longitud de la cabilla de acero considerada. Por ello conviértase la expresión [V], en el caso de nuestro elemental ejemplo, en

$$T_i = \frac{1}{2} \cdot \frac{T^2 L}{ES} + \lambda TL \quad [VI]$$

Y ¿acaso eso es cierto? ¿Puede admitirse que presente la expresión [VI] la exacta valoración del trabajo elástico energía acumulada en la cabilla metálica de nuestro caso? Conocemos, por haberlo calculado en lo que precede, el valor del esfuerzo de tracción T (expresión [I]), y podemos calcular directamente la energía acumulada en el caso que nos ocupa; pero creemos conveniente, antes, hacer nuevos distinguos.

Pudiera ocurrirse a la consideración de nuestro elemental ejercicio este poco reflexivo razonamiento:

to: si la cabilla no tiene libertad de contraerse por estar sujetos sus extremos a puntos invariables, es evidente que, durante el descenso de la temperatura, igual para todos los puntos de todas sus fibras, las secciones todas de la cabilla conservarán sus primeras posiciones, no habiendo por ello *recorridos*, por lo que el trabajo elástico (fuerzas por recorridos, en definitiva) sería nulo. Consecuencia que, expresada igualando a cero el segundo miembro de [VI], nos llevaría al completamente *desafinado* resultado de que

$$T = -2\lambda ES$$

o sea a un valor absoluto de la reacción T , doble de su verdadero valor, que es el antes deducido dado por la expresión [II]. Claro es que no hubiera habido lugar a tan poco atinada ocurrencia mirando en nuestro caso a [V] o a [VI] como expresiones de *energía acumulada* y no como valoraciones de *trabajo elástico*.

Volvamos, para aclarar conceptos, a nuestra conocida cabilla de 45,50 m de longitud y 1 cm² de sección, suspendida por uno de sus extremos, a cuyo extremo inferior o libre colgamos el peso de 495 kg. Sabemos que este peso produce en dicha cabilla un alargamiento de 1 cm, siendo, por ello, el trabajo de la fuerza exterior

$$495 \cdot 0,01 : 2 = 22475 \text{ kg/m}$$

La energía acumulada en la cabilla al deformarse podemos obtenerla calculando el primer sumando de la expresión [V], que es el segundo de la [III], y en el caso de nuestro ejemplo vale

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{P^2 L}{ES}$$

que con los valores numéricos $P = 495$, $L = 45,50$, $S = 0,0001$ y $E = 22\,500\,000\,000$, ya consignados en lo que antecede, da, para la valoración de dicha energía acumulada, 2475 kg/m; es decir, una cantidad igual al trabajo puesto en juego por la causa exterior o peso de 495 kg, como debe ser.

Cuando se trata de pesos o acciones exteriores análogas, cabe medir directamente, por el de las fuerzas exteriores, el trabajo acumulado; pero, en casos como el de la acción térmica, causa única actuante en nuestro sencillo ejemplo, la energía acumulada no es susceptible de tan directa medición, por no haber otras fuerzas exteriores que las reacciones desarrolladas al estar fijos los extremos de la cabilla y ser nulo el trabajo de estas reacciones (las tracciones que tratamos de calcular) por la invariabilidad de la posición de los apoyos.

¿Qué hacer entonces? Puede estimarse algo indirecta o artificiosamente, pero con toda exactitud, el valor de la energía acumulada, como para el caso de nuestro elemental ejemplo vamos a ver. Si soltamos uno de los extremos de la cabilla en la experiencia de nuestro sencillo problema sometida a la contracción unitaria λ , su longitud pasará de L a $L - \lambda L$, y la tensión T , que soportaba al impedirse su acortamiento, bajará al propio tiempo de dicho valor T a cero. Es evidente que, si aplicamos al extremo libre de la cabilla una fuerza capaz de producir en ésta el alargamiento λL , tendremos justamente la tensión T que buscamos, y en su trabajo

para producir el alargamiento, la energía acumulada en la cabilla, que pretendemos calcular.

El esfuerzo de tracción T ya quedó exactamente calculado al establecer precedentemente la igualdad que nos llevó a la expresión [II]; pero, ahora, nuevamente lo deduciremos mediante la valoración del trabajo elástico desarrollado durante el alargamiento de nuestra cabilla al pasar de la longitud $L - \lambda L$ a la L ; trabajo que, vuelvo a repetir, equivale exactamente a la *energía acumulada* en dicha varilla metálica, en el caso de nuestra elementalísima cuestión. Veamos lo que sucede durante el alargamiento.

La tensión o tracción T , que inicialmente es cero, mientras el proceso de alargamiento λL , indicado, irá gradualmente aumentando de valor, y lo hará proporcionalmente a los sucesivos valores del alargamiento de la cabilla, dada la constancia que hemos admitido del coeficiente de elasticidad longitudinal, teniéndose, por la definición de éste (expresión [I]), el valor variable de la tensión durante el alargamiento

$$t = \frac{ES}{L} \delta(L - \lambda L)$$

(designando por $\delta(L - \lambda L)$ el incremento de la longitud $L - \lambda L$ de la cabilla acortada; incremento que es variable con el valor variable de la tensión representado por t); valor por el cual tenemos, para el de la energía acumulada que buscamos,

$$U = \int_0^{\lambda L} t d(\delta(L - \lambda L)) = \frac{L}{ES} \int_0^T t dt = \frac{T^2 L}{2ES} \quad [\text{VII}]$$

resultado que nos da la más plena confirmación de que sobra el segundo sumando de la expresión [VI], y, por ende, la segunda integral de la expresión [V]; de que no hay otra valoración verdadera de la energía acumulada o trabajo elástico que la expresión [III], reducida, en el caso de nuestro elementalísimo problema, a

$$T = \frac{1}{2} \int_0^L \frac{N^2}{ES} dl$$

de que sobran, por consecuencia, los dos últimos sumandos a la superabundante expresión [IV].

Va a servirnos para algo más el resultado consignado en la precedente expresión [VII], ya que con él vamos a tener resuelto nuevamente nuestro problema, por la aplicación de la verdadera expresión del trabajo elástico o energía acumulada, mejor dicho, que [VII] representa para nuestro sencillo caso; porque, igualando la mitad del producto de la tracción que buscamos (T) por su recorrido (λL), lo cual es la valoración del trabajo desarrollado por dicha causa, al segundo miembro de la expresión [VII], que valora la energía acumulada en la cabilla, resulta

$$\frac{1}{2} T \cdot \lambda L = \frac{T^2 L}{2ES}$$

de donde se obtiene $T = \lambda ES$, como al comienzo exactamente calculamos.

* * *

En numerosísimos casos prácticos, más que a la aplicación de la expresión del trabajo elástico o ener-

gía acumulada, suele recurrirse a la de sus derivadas, mediante la utilización de los geniales teoremas de Castigliano; pero, estimado lector, ¡qué caprichosa manera de derivar en algunas ocasiones! Veremos buena muestra de ello en nuestro sencillo ejemplito.

Para este caso, ya dijimos que (advirtiéndose que se vuelve a aceptar por verdadera la expresión [IV]) la tantas veces nombrada superabundante expresión [IV] se reducía a esta otra:

$$T_i = \frac{1}{2} \int_0^L \frac{N_i}{ES} dl + \int_0^L N_i \lambda dl \quad [V]$$

y hay quienes dan siempre por buena, como derivada de ese valor de T_i respecto a la tensión o reacción T , la incorrectísima expresión

$$\frac{dT_i}{dT} = \int_0^L \frac{N_i}{ES} \cdot \frac{dN_i}{dT} dl + \int_0^L \lambda \frac{dN_i}{dT} dl \quad [VIII]$$

no menos inexacta que la [V] y la [IV], de las que proviene, como vamos seguidamente a probar.

Una vez más, suspendamos por uno de sus extremos nuestra cabilla de 45,50 m, colgándole al otro el peso de 495 kg, etc., o mejor, fijémonos, en general, en la varilla de acero de sección S y longitud L , de la que suspendemos el peso P . La cabilla tendrá el alargamiento dado por la expresión [I]:

$$\Delta L = \frac{PL}{ES}$$

igualdad de la que, multiplicando sus miembros por $\frac{P}{2}$, obtenemos:

$$\frac{1}{2} P \cdot \Delta L = \frac{P^2 L}{2ES} \quad [IX]$$

El primer miembro de esta expresión [IX] es el trabajo puesto en juego por la fuerza o peso P durante el alargamiento ΔL de la cabilla; el segundo miembro

$$\frac{P^2 L}{2ES}$$

representa la energía acumulada en la misma cabilla, como fácilmente se puede comprobar u obtener efectuando la integración indicada por el segundo sumando del paréntesis de la *exacta expresión* [III].

La derivada respecto a P del segundo miembro de la expresión [IX], o sea $\frac{PL}{ES}$, mide, según uno de los teoremas de Castigliano, el recorrido de la fuerza o peso P , es decir, el alargamiento de la varilla, que es, efectivamente, como antes calculamos,

$$\Delta L = \frac{PL}{ES} \quad [I]$$

Y se me ocurre preguntar: ¿Hay quien se atreva a afirmar que la derivada respecto a P del primer miembro de la expresión [IX] es $\frac{\Delta L}{2}$? Nadie seguramente incurrirá en tan craso error; no puede ser tal la derivada, se dirá por todos, porque ΔL es una función de P , y en la derivación del producto

$\frac{1}{2} P \cdot \Delta L$, de ningún modo ni por razón ninguna se puede considerar ΔL como una constante. Pues bien; de esa perversa manera se deriva, no obstante, y en tan deplorable inexactitud se incurre, al consignar sin reparo alguno, como algunos autores lo hacen, que la derivada respecto a una reacción R del sumando

$$\int_0^L N_i \lambda dl$$

de las expresiones [IV] y [V] es, en toda ocasión,

$$\int_0^L \lambda \frac{dN_i}{dR} dl$$

sin preocuparse de que la reacción o fuerza R sea o no sea una función de λ .

Vamos a confirmar que tal error existe o se comete, mediante el análisis que proseguimos de nuestro sencillo ejemplito, mostrando, con el auxilio de éste, que la aplicación de la inexacta derivada nos llevará, una vez más, a la *deducción del absurdo*. Supongamos (y ya no más que por la presente ocasión) exacta la superabundante expresión [IV]. Cuando tratamos, valiéndonos de ella, de calcular la energía acumulada en una cabilla de acero de longitud L y de sección S , con sus extremos fijos a puntos invariables, para venir a deducir la tensión T en sus extremos, debida al acortamiento λ por unidad de longitud (impedido por los apoyos), llegamos a la expresión

$$T_i = \frac{1}{2} \cdot \frac{T^2 L}{ES} + \lambda TL \quad [VI]$$

La derivada de T_i respecto a T , que debe medir el recorrido de la reacción T (que es cero), hecha según los autores que criticamos, viene dada por:

$$\frac{dT_i}{dT} = \frac{TL}{ES} + \lambda L \quad [X]$$

y como sabemos que el valor exacto de T es λES (expresión [II]), obtendremos que

$$\frac{dT_i}{dT} = \lambda L + \lambda L = 2\lambda L$$

expresión del recorrido de la reacción T , que no resulta nulo, como debiera.

Pero hay en la aplicación de la expresión [VI], como valor exacto del trabajo elástico T_i , algo que no debe escapar a nuestro breve comentario. Pudiera darse el peregrino caso de dar signo negativo a λ en la expresión [V], por aquello de hacer positivas las dilataciones y las contracciones negativas, signo que se conservaría en las expresiones [VI] y [X]. Y tendríamos entonces esta extravagancia: que la *falsa derivada* dada por la expresión [X], inexacta, porque en la [VI] la variable independiente es λ y T una función de ella, igualada a cero (recorrido de T), daría

$$\frac{TL}{ES} - \lambda L = 0$$

de donde $T = \lambda ES$, que es su verdadero valor.

Mas no por ello hay que cantar victoria, porque ese verdadero valor de T , llevado a la expresión [VI], cuya derivada es la [X], con el signo negativo de λ ,

nos da, para valor de la energía acumulada en la cabilla de acero de nuestro elemental ejemplo, una cantidad *negativa*; resultado por completo falso, que nos prueba, una vez más, la inexactitud de las superabundantes expresiones [VI] y [IV].

¡Para qué seguir! Si tal hiciéramos..., nuestro breve comentario se daría de cachetes con su brevedad, y hay que evitarlo a todo trance, poniendo, mejor que los medios convenientes, el fin al artículo y la firma.

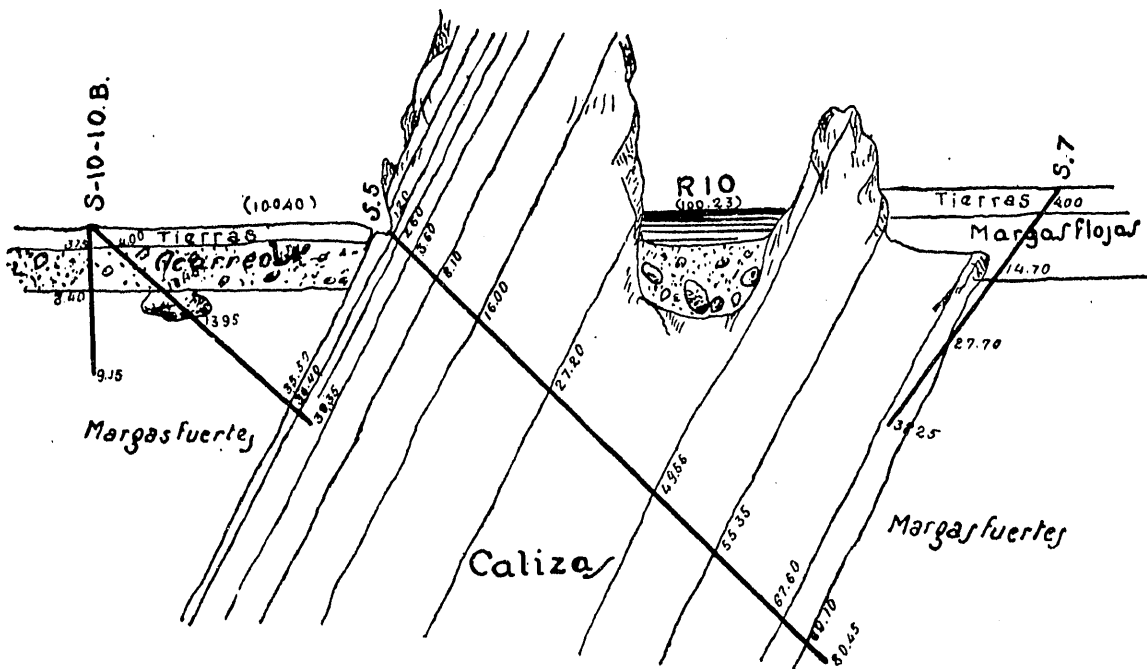
José LÓPEZ RODRÍGUEZ
Ingeniero de Caminos

El sondeo en la construcción

Las variadas aplicaciones del sondeo en la construcción ofrecen diversa modalidad, por razón de la cual cabe establecer dos grupos: unas veces tiene por objeto la determinación de las condiciones del terreno (principalmente las de resistencia e impermeabilidad), para, en su consecuencia, proyectar y construir puentes, túneles, pantanos, diques, etc.; otras veces es auxiliar de la construcción o conservación de las obras citadas, como medio de consolidar terrenos y fábricas, bien para sólo aumentar la coherencia de unos y otras, o llegando a la impermeabilización.

Sondeos de reconocimiento

En la Geología aplicada a las construcciones puede decirse que la misión del sondeo es análoga a la del taquímetro en Topografía. Por muy detallado que sea el croquis de una zona, si con el taquímetro no se toman los datos necesarios que permitan la definición concreta de distancias y desniveles de diversos puntos del terreno, ninguna obra detallada permitiría proyectar aquel croquis; de un modo análogo, por muy acertado y concreto que sea un informe geológico-



Corte hipotético del terreno por la línea de sondeos 10-10-5-7. Escala, 1/1 000

Llamaremos a los primeros sondeos de reconocimiento, y de ellos, que son los más generalmente practicados por el que suscribe durante estos últimos años, nos ocuparemos a continuación. A los del segundo grupo denominamos sondeos de consolidación; su aplicación se ofrece con mayores horizontes de día en día, ya que nos proporciona el medio de aumentar la coherencia de terrenos, bien para hacerlos apropiados a la sustentación de muros o apoyos aislados, bien como medio de llevar a cabo cimentaciones a profundidades inaccesibles al aire comprimido; sirven también para impermeabilizar fábricas, corrigiéndolas de las imperfecciones de la puesta en obra de hormigones, por bien que éstos hayan sido dosificados.

co, de no haber sido éste intervenido por el sondeo, tampoco bastará en general para satisfacer las exigencias del proyecto de construcción, conservación o impermeabilización de una obra, pues si bien del citado estudio pudiera llegarse a la definición del terreno, ésta tiene lugar por el simple reconocimiento entre límites muy amplios, porque las magnitudes que el geólogo maneja no suelen responder, unas veces por su cuantía y otras por su imprecisión, a la demanda concreta de la obra, lo que solamente se consigue, y desgraciadamente no siempre, con el sondeo. Esto no obstante, y así como un buen croquis complementa los datos taquimétricos para llegar a la mejor representación de la topografía del terreno, del mismo modo un estudio geológico ayuda en gran manera a la mejor interpretación de los resultados que acusan los