

Rafael Coderch. Ambos, como todo el alto y modesto personal de la Compañía de los ferrocarriles de M. Z. A., admiraban las altas dotes de inteligencia, amor al trabajo y bondad sin límites que formaban el carácter de Paco Terán. No es extraño que su muerte haya causado sentimiento general.

La REVISTA DE OBRAS PÚBLICAS se asocia al dolor que esta muerte ha causado, y envía a la familia doliente, especialmente a su hijo Francisco, joven ingeniero de Caminos, el más sentido pésame.

Descanse en paz quien fué amigo fiel y compañero ejemplar.

Vicente MACHIMBARRENA

## Esfuerzos secundarios<sup>1</sup>

### II

**Método de Mohr.**—Fué dado a conocer este método por su autor, el profesor O. Mohr, en 1893. El método de Manderla se basa en las ecuaciones que dan las variaciones angulares en una célula triangular y en las de que la suma de los momentos en un nudo es cero. Estas son las dos bases fundamentales. Mohr introduce dos nuevos valores angulares  $\psi$  y  $\Phi$ , de los cuales dependen los momentos de empotramiento, evitando el cálculo de las variaciones angulares  $\delta\alpha$  y de los ángulos de flexión  $\tau$  sobre los cuales se basa el método de Manderla. Claro es que puede pasarse fácilmente de este método al anterior estableciendo las relaciones que ligan a  $\psi$  y  $\Phi$  con  $\delta\alpha$  y  $\tau$  y sustituyendo los valores de  $\psi$  y  $\Phi$  en función de  $\delta\alpha$  y  $\tau$ .

En la figura 1.<sup>a</sup> la barra 1-2 está aún descargada. Bajo la acción de las cargas, los nudos 1 y 2 pasarán

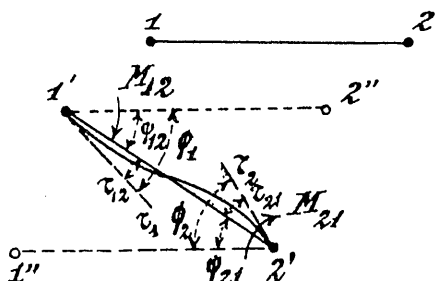


Fig. 1.<sup>a</sup>

a 1' y 2'. Las líneas 1'-2'' y 1''-2' son paralelas a la primitiva situación de la barra 1-2; 1'tau1 y 2'tau2 son las tangentes a la elástica de la barra deformada. El ángulo 2''-1'-2' = psi12 = psi21 formado por la barra primitiva y la cuerda de la nueva barra 1'-2' es el ángulo de giro de la barra cargada supuesta articulada en la unión.

Si suponemos la viga articulada, la carga hace que la barra de la posición 1-2 pase a la 1'-2', pero conservándose recta; si ya en esta posición suponemos que la viga es de nudos empotrados y empiezan a actuar los momentos de empotramiento M12 y M21, causarán a la barra la flexión y curvatura que indica la figura. El supuesto es que esta curvatura tiene lugar sin variar los extremos 1 y 2, es decir, sin moverse estos extremos. El ángulo psi es el de giro de la barra supuesta la viga articulada. El ángulo Phi formado por la dirección inicial 1-2 ó 1'-2'' y la tangente en el extremo a la elástica de la barra, es el ángulo de rotación del nudo. Este ángulo es el mismo para todas las barras que concurren en un nudo, debido al su-

puesto de que sus extremos se encuentran unidos rígidamente; de otro modo, el ángulo entre dos barras que se encuentran en un nudo se supone constante durante la deformación de la viga.

Para expresar los momentos de empotramiento en función de Phi y de psi, partamos de la ecuación fundamental encontrada en el método de Mandesla-Winkler:

$$M_{12} = \frac{2EI}{l} (2\tau_{12} + \tau_{21})$$

de la figura 1.<sup>a</sup>

$$\tau_{12} = \Phi_1 - \psi_{12}$$

y

$$\tau_{21} = \Phi_2 - \psi_{21} = \Phi_2 - \psi_{12}$$

sustituyendo estos valores en la ecuación anterior, tendremos:

$$M_{12} = \frac{2EI}{l} (2\Phi_1 - 2\psi_{12} + \Phi_2 - \psi_{12})$$

$$M_{12} = \frac{2EI}{l} (2\Phi_1 + \Phi_2 - 3\psi_{12}) \quad [1]$$

y de igual forma

$$M_{21} = \frac{2EI}{l} (\Phi_1 + 2\Phi_2 - 3\psi_{12}) \quad [2]$$

Las cantidades psi son realmente las variaciones angulares de la viga supuesta articulada y pueden obtenerse cuando la viga está estáticamente determinada.

Para cada nudo hay un solo valor de Phi y la suma de momentos es cero. Haciendo uso de las ecuaciones [1] y [2] podemos establecer un sistema de tantas ecuaciones como incógnitas para determinar las Phi, pues las psi se habrán determinado previamente. Los esfuerzos secundarios se obtienen con esto fácilmente.

Las modificaciones que se han hecho a este método se refieren al cálculo de las psi variaciones angulares de las barras o al de las Phi rotaciones de los nudos.

#### CÁLCULO DE LAS psi

De tres modos pueden calcularse las psi. Por el método de Thomas, que se encuentra desarrollado en la revista *Le Constructeur de Ciment Armé*, junio 1929, «Calcul des Efforts secondaires dans les poutres a treillis».

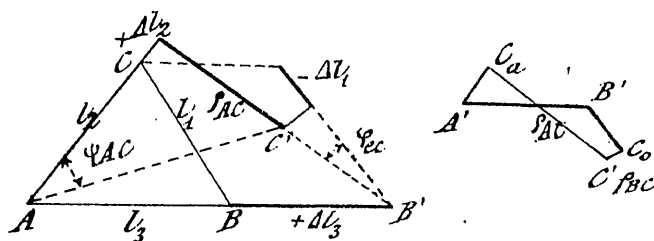
Por el método basado en el teorema de Mohr, que

<sup>1</sup> Véase el número anterior, página 51.

se encuentra desarrollado en la Memoria de Cecil Vivian Abo «Proceeding of American Society of Civil Engineers», septiembre 1924.

Y por el método basado en el diagrama de Williot; este método es el que tiene todas las preferencias, y por su gran claridad elimina los errores. Vamos a exponerlo.

Consideremos el triángulo  $ABC$  (fig. 2.<sup>a</sup>) y supongamos que las cargas producen los esfuerzos

Fig. 2.<sup>a</sup>

—  $s_1$ , +  $s_2$  y +  $s_3$  en  $BC$ ,  $CA$  y  $AB$ , haciendo esto variar sus longitudes  $l_1$ ,  $l_2$  y  $l_3$  en  $-\Delta l_1$ , +  $\Delta l_2$  y +  $\Delta l_3$ .

Suponiendo el nudo  $A$  y la dirección  $AB$  como fijas, de la figura 2.<sup>a</sup>, y también teniendo en cuenta que las deformaciones  $\Delta l$  de las barras son muy pequeñas, y sustituyendo la tangente del arco por el propio arco

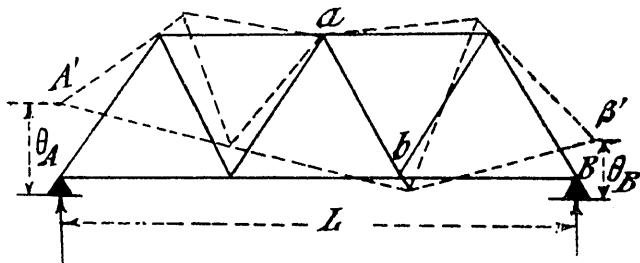
$$\int_{AC} = l_2 \psi_{AC}$$

$$\psi_{AC} = \frac{\int_{AC}}{l_2}$$

La variación angular  $\psi_{AC}$  de una barra es, por lo tanto, igual a la longitud  $\int_{AC}$  de la perpendicular  $C_aC'$  a  $AC$ , que sitúa el punto  $C'$  en el diagrama de Williot, dividida por la longitud  $l_2$  de  $AC$ ;  $\psi$  es positiva si la barra gira en el sentido de las agujas del reloj.

Si en vez de un triángulo tuviésemos una viga compuesta de una serie de triángulos, el proceso para determinar  $\psi$  para cada barra es el mismo; construiríamos un diagrama de Williot, hallaríamos los valores de  $\int$  y los dividiríamos por su longitud correspondiente  $l$ .

Al construir el diagrama de deformaciones de una viga hemos de suponer un punto  $a$  y una dirección  $ab$

Fig. 3.<sup>a</sup>

fija. Esto da generalmente un desplazamiento vertical  $\theta_A$  y  $\theta_B$  para los apoyos  $A$  y  $B$  diferente. Hemos calculado las deformaciones suponiendo inmóvil la barra  $ab$ ; ahora falta hallar la verdadera posición de ésta; para ello vamos a introducir una corrección sugerida por Mohr, basada en el hecho de que los apo-

ynos  $A$  y  $B$  no tienen desplazamiento vertical. Para llevar  $A'B'$  a ser paralela a  $AB$  (fig. 3.<sup>a</sup>), necesitamos realizar un giro alrededor de  $A'$  ó  $B'$  igual a

$$\psi = \frac{\theta_B - \theta_A}{L}$$

En el caso de los esfuerzos secundarios no es esto necesario. Si el diagrama ha de girarse un ángulo  $\psi''$  alrededor de  $A'$  ó  $B'$ , los valores de  $\psi'$  obtenidos se corregirán en la siguiente forma:  $\psi = \psi' + \psi''$  para obtener los ángulos verdaderos de la nueva posición de las barras con respecto a las primitivas posiciones para una carga dada. Pero no es necesaria esta corrección. El momento de empotramiento en un extremo de la barra es

$$M_{nm} = \frac{2EI}{l} (2\Phi_n + \Phi_m - 3\psi_{nm})$$

Evidenciando la cantidad constante  $\psi''$  para  $\Phi$  y  $\psi$  no afecta a  $M_{nm}$ , pues la corrección es  $2\psi'' + \psi'' - 3\psi''$ .

De modo que se verifica también que

$$M_{nm} = \frac{2EI}{l} (2\Phi'_n + \Phi'_m - 3\psi'_{nm})$$

De aquí que los valores de  $\psi$  designados por  $\psi'$  darán un sistema de ecuaciones lineales para obtener las  $\Phi'$ , y éstas diferirán de las verdaderas una cantidad constante  $\psi''$ . Como los esfuerzos secundarios dependen de  $M$  está justificado el emplear  $\psi'$  y  $\Phi'$ .

#### CÁLCULO DE LAS $\Phi$

En la determinación de las  $\Phi$  hay que resolver un sistema de tantas ecuaciones como nudos y varios son los métodos propuestos para su cálculo.

Lo mismo que en el método de Manderla, se puede resolver por el método de Gauss. También puede resolverse por el método de las aproximaciones sucesivas, y dos son las formas de realizarlo más empleadas, muy parecidas, y que podíamos llamar método americano y europeo.

El método americano, debido a Maney, puede encontrarse desarrollado en los *Boletines* números 2 y 4 de la Universidad de Minnesota, y también en el libro de Maney y Parcel *An elementary treatise on statically indeterminate stresses*, 1926.

El método europeo presentado por M. Ros al Congreso internacional de Zurich de 1926, como consecuencia de los estudios llevados a cabo por la Comisión Técnica de la Asociación Suiza de Puentes y Estructuras metálicas, se encuentra desarrollado en una Memoria del citado Congreso, debida a M. Ros y que lleva de título «Nebenspannungen infolge vermeteter Knotenpunktverbindungen eisener Fachwerk-Brücken». Indicaremos más adelante este método, que, con el de Maney, es el más aplicado.

Determinadas las  $\psi$ , falta encontrar los valores de  $\Phi$ . La aplicación de la ecuación fundamental  $\Sigma M = 0$  a cada nudo, da tantas ecuaciones como nudos o incógnitas  $\Phi$ . Así, para un nudo  $n$ , sustituyendo los valores de  $M$  por los encontrados y poniendo  $\frac{I}{l} = K$ , tendremos:

$$\Sigma M_{nm} = 2E(2\Phi_n \Sigma K_{nm} + \Sigma \Phi_m K_{nm} - 3\Sigma \psi_{nm} K_{nm}) = 0$$

$$2\Phi_n \Sigma K_{nm} + \Sigma \Phi_m K_{nm} - 3\Sigma \psi_{nm} K_{nm} = 0$$

en la cual los números de los nudos adyacentes se deben sustituir en vez de  $m$ . La solución de las  $n$  ecuaciones simultáneas da los  $n$  valores desconocidos  $\Phi$ , siendo  $n$  el número de nudos. Se debe hacer notar que estas ecuaciones son del tipo llamado de Gauss y puede resolverse el sistema por este método.

Determinados  $\phi$  y  $\Phi$  basta sustituirlos en la ecuación, que nos da el momento de empotramiento en función de  $\phi$  y  $\Phi$  para tener aquéllos.

Antes de pasar adelante es bueno comprobar que se verifica la condición de que  $\Sigma M = 0$  en cada nudo. Los esfuerzos secundarios se obtienen rápidamente de

$$f = \frac{My}{I} = 2EI(2\Phi_a + \Phi_n - 3\phi_{an}) \frac{y}{II}$$

haciendo  $E = 1$

$$f = \frac{2y}{l} (2\Phi_a + \Phi_n - 3\phi_{an})$$

en la cual

$\Phi_a$  = el valor de  $\Phi$  para el extremo de la barra más próximo.

$\Phi_n$  = el valor de  $\Phi$  para el extremo de la barra más lejano.

$\phi_{an}$  = la variación angular de la barra supuesta rotulada.

El valor hallado en el diagrama de Williot es en realidad  $\phi'$  por  $E$ . El valor obtenido de  $\Phi$  estará, por lo tanto, multiplicado por  $E$ . De aquí que aunque supongamos  $E = 1$  tengamos los verdaderos esfuerzos secundarios.

#### MÉTODO DE ROS PARA EL CÁLCULO DE LAS $\Phi$

Sabemos que

$$M_{on} = \frac{2EI}{l} (2\Phi_o + \Phi_n - 3\phi_{on})$$

y que los ángulos de flexión de la barra en sus extremos son

$$\tau_{on} = \Phi_o - \phi_{on} \quad \tau_{no} = \Phi_n - \phi_{no}$$

Como en cada nudo  $\Sigma M = 0$ , como

$$\begin{aligned} M_{on} &= \frac{4EI}{l} \left( \Phi'_o - \phi_{on} + \frac{\Phi_n - \phi_{on}}{2} \right) = \\ &= \frac{4EI}{l} \left( \Phi'_o - \phi_{on} + \frac{\tau_{no}}{2} \right) \end{aligned}$$

tendremos

$$\Sigma \frac{I}{l} \Phi'_o - \Sigma \frac{I}{l} \phi_{on} + \Sigma \frac{I}{l} \frac{\tau_{no}}{2} = 0$$

y como  $\phi'$  es constante en el nudo,

$$\Phi'_o = \frac{\Sigma \frac{I}{l} \phi_{on}}{\Sigma \frac{I}{l}} - \frac{\Sigma \frac{1}{2} \frac{I}{l} \tau_{no}}{\Sigma \frac{I}{l}}$$

extendiéndose las sumas a todas las barras que concurren en el nudo.

El ángulo de rotación del nudo  $\phi'_o$  resultante, tiene dos componentes: la primera

$$\Phi_o = \frac{\Sigma \frac{I}{l} \phi_{on}}{\Sigma \frac{I}{l}} \quad [3]$$

depende de las rotaciones  $\phi$  de las barras y de sus grados de rigidez o flexibilidades relativas  $\frac{I}{l}$ .

La segunda es una rotación secundaria producida en el nudo por el ángulo de flexión o por la flexión producida en el opuesto

$$d\Phi_o = \frac{\Sigma \frac{1}{2} \frac{I}{l} \tau_{no}}{\Sigma \frac{I}{l}}$$

Si como primera aproximación supusiéramos rotulado el nudo

$$M_{on} = \frac{2EI}{l} (2\tau_{on} + \tau_{no}) = 0$$

y tendríamos

$$\tau_{on} = -\frac{1}{2} \tau_{no}$$

Luego, por la ecuación [3], obtendremos un primer valor de  $\Phi_o$  y, por lo tanto,  $\tau_{on} = \Phi_o - \phi_{on}$ ; de este valor obtendríamos

$$d\Phi_o = \frac{\Sigma \frac{1}{2} \frac{I}{l} \tau_{no}}{\Sigma \frac{I}{l}} = \frac{-\Sigma \frac{I}{l} \tau_{on}}{\Sigma \frac{I}{l}}$$

y, por lo tanto,

$$\Phi'_o = \Phi_o + d\Phi_o$$

hallado este nuevo valor de  $\Phi$ , el ángulo de flexión será para este nuevo valor

$$\tau'_{on} = \Phi'_o - \phi_{on}$$

y entrando con este valor en

$$d\Phi_o = \frac{-\Sigma \frac{I}{l} \tau'_{on}}{\Sigma \frac{I}{l}}$$

tendremos una nueva corrección de  $\Phi'_o$ . Estas correcciones, según la rigidez de las barras, son cada vez más pequeñas y, finalmente, despreciables.

El valor final de  $\Phi_o$  cumplirá la condición de que  $\Sigma M = 0$  y encontrados los valores de  $M$  por la fórmula

$$M_{on} = \frac{2EI}{l} (2\Phi_o + \Phi_n - 3\phi_{on})$$

se comprobó que los valores de los esfuerzos secundarios calculados de esta forma coincidían a veces notablemente con los medidos.

\* \* \*

Los métodos de Manderla-Winkler y Mohr son los más empleados en el cálculo de los esfuerzos secundarios; sigue a éstos el de Müller-Breslau, aunque éste en sí se emplea poco, por necesitar resolver un sistema de  $4n - 6$  ecuaciones, siendo  $n$  el número de nudos, y ser preciso llevar el cálculo con muchas decimales si se quiere llegar a tener una mediana aproximación. La modificación hecha al mismo por Hardy Cross lo hace más utilizable, pues sistematiza

el cálculo, reduce el número de ecuaciones y facilita su resolución. Puede encontrarse su desarrollo y aplicación en la Memoria citada de Cecil Vivian Abo.

\* \* \*

Nos es muy grato consignar aquí una aportación española a este problema, presentada por su autor,

D. Alfonso Peña, al Congreso de Lieja, y que aparece en la segunda edición de su *Mecánica Elástica*. Aunque de horizontes limitados (Vigas Pratt y Howe), la idea, de suyo ingeniosa, hace honor a su autor, una de las más prestigiosas figuras de nuestro Cuerpo, y resuelve elegantemente un problema abrumador por cualquiera de los métodos clásicos.

José JUAN ARACIL  
Ingeniero de Caminos

## Las Obras públicas y la cotización de la peseta

La primera de las virtudes que debe reunir todo trabajo destinado a ver la luz en una publicación periódica es la actualidad.

Pero hay casos en que una actualidad demasiado viva y palpitante priva de ambiente adecuado al trabajo simplemente expositivo y técnico, que en el calor de la polémica política corre el riesgo de parecer pálido y sin relieve o el más grave de ser tachado de partidista a uno o a otro lado. Tal era el caso de este artículo y el de su tema, uno de los aspectos más debatidos del problema del plan de obras públicas del Conde de Guadalhorce, desde que, ahora hace un año, puso este plan públicamente en tela de juicio la caída del Gobierno que lo inició.

Con el curso de los meses, la controversia se ha serenado un tanto; y ello da ya, a mi juicio, oportunidad para ir examinando en forma concreta y objetiva los múltiples problemas que plantea el referido plan, involucrados y oscurecidos todos ellos en la polémica primera, demasiado apasionada y partidista, de uno y otro lado, para ser fecunda.

El tiempo transcurrido ofrece, además, la ventaja de haber ido ensanchando la base estadística que requieren los estudios de esta índole.

\* \* \*

Entre los efectos atribuidos al referido plan en el aspecto financiero figura en primer término, por su singular gravedad, el de suponersele factor predominante o cooperante en grado muy sensible, al menos, de la baja de la cotización bursátil de la peseta que venimos padeciendo desde 1928. Y ofrece, a mi juicio, un interés singular el examinar qué pruebas o indicios presenta hasta ahora la observación estadística de esta pretendida relación causal.

No implica este examen ni un juicio acerca de la perfección, de la conveniencia o de la oportunidad del plan en cuestión—ni mucho menos de las de ninguna de las obras que lo constituyen—ni un dictamen sobre las causas del alza de los cambios; ni hay en él tampoco una previsión de lo que hubieran sido las repercusiones financieras del referido plan íntegramente realizado: se trata, simplemente, de inquirir si existe o no una relación de causa a efecto entre los actos económicos

y financieros a que ha dado lugar hasta ahora el plan de obras públicas y la baja que ha experimentado nuestra valuta desde 1927, a través de los datos estadísticos que, de existir esta relación, deben acusarla.

En dos formas principales puede influir la realización de un programa de obras públicas de esta índole en sentido depresivo sobre la cotización bursátil de la moneda nacional:

a) Si se produce inflación al arbitrar el Estado los recursos necesarios. Es decir, si éste apela para ello a la creación arbitraria, en una u otra forma, de poder de compra. Este efecto puede, tal vez, suscitarse, mediante una acción psicológica, al mero temor de esta inflación.

b) Por repercusión directa sobre la balanza comercial, desnivelándola en sentido desfavorable; si las obras dan lugar a considerables y extraordinarias compras de materiales extranjeros.

Vamos a examinar en qué forma y grado acusa la observación estadística cada una de estas influencias. Es bien notoria la complejidad de esta clase de fenómenos y la dificultad de seguir su desenvolvimiento y enlace a través de la observación esta-

==COTIZACIÓN MEDIA ANUAL DE LA  
LIBRA ESTERLINA EN PESETAS==

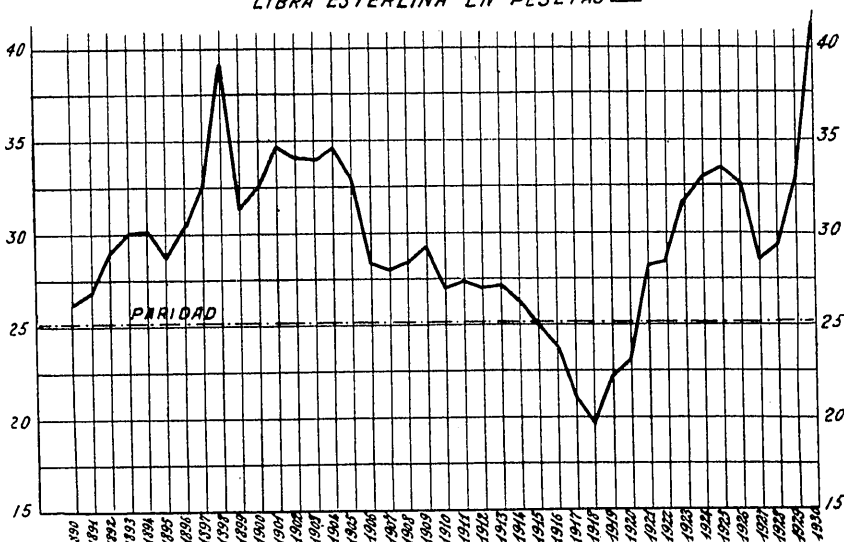


Gráfico 1

dística; complejidad acentuada al sustituirse el antiguo concepto de relación causal entre ellos por el más científico de relación funcional que implica recíproca y continua influencia de todos estos fenómenos entre sí. Es bien notorio, también, lo insuficiente de nuestro material estadístico, insuficien-