

# Interpretación geométrica de las ecuaciones para el cálculo de los pórticos y en general de todos los sistemas hiperestáticos de elementos rectos<sup>1</sup>

## Pórticos

La novedad del estudio que presenta Mr. Rieger se ofrece especialmente en el estudio de los pórticos, que en el primer tomo publicado de la obra lo limita a pórticos de un solo tramo, reservando el segundo para pórticos continuos o múltiples.

La forma de aquéllos juega un papel secundario clasificando su estudio por su grado de indeterminación, y así estudia primero los de primer grado, o sean pórticos con dos articulaciones; luego los de segundo grado, o semipórticos, con una articulación y un empotramiento, y, por último, los de tercer grado o pórticos sin articulaciones.

En el estudio se consideran las cargas verticales u horizontales y se estudian separadamente sus efectos.

## Pórtico con dos articulaciones

Estudiaremos el caso más sencillo, o sea el pórtico formado por dos montantes verticales y un dintel horizontal, pues los resultados que en él se obtengan son generales para cualquier otra forma.

Consideremos sobre el dintel una carga cualquiera, y tracemos el diagrama  $O$  de los momentos correspondientes, considerando la viga  $cd$  como aislada y sobre apoyos simples

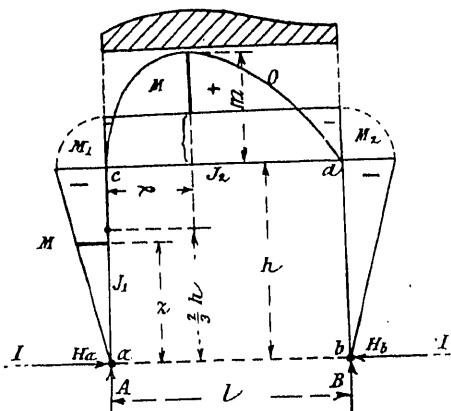


Fig. 7.\*

La ecuación de equilibrio de las fuerzas horizontales nos da

$$H_a - H_b = 0$$

o también

$$H_a = H_b = H$$

y

$$M_1 = H_a h = H_b h = M_2$$

Los momentos, pues, en el extremo superior de los montantes son iguales. Aplicando el teorema de Castigliano

$$C = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{M^2 ds}{EJ} = \text{mínimo}$$

o sea

$$E \frac{dC}{dM} = \int_0^l M \frac{dM}{dM_1} \frac{ds}{J} = 0$$

El momento de flexión en una sección cualquiera es

Para el montante.  $M = -M_1 \frac{z}{h}$  o  $\frac{dM}{dM_1} = -\frac{z}{h}$

Para el dintel ...  $M = \mathfrak{M} - M_1$  o  $\frac{dM}{dM_1} = -1$

luego para los dos montantes y el dintel tendremos

$$-2 \int_0^h \frac{Mz dz}{hJ_1} - \int_0^l \frac{M dx}{J_2} = 0 \quad [11]$$

en la que  $\int_0^h Mz dz$  representa el momento estático con relación al eje  $I(ab)$  del diagrama de los momentos del montante.

$$\int_0^h Mz dz = -\frac{1}{2} M_1 h \cdot \frac{2}{3} h = -\frac{1}{3} M_1 h^2$$

Por otra parte,  $\int_0^l M dx$  representa el área del diagrama de los momentos que actúan sobre el dintel

$$\int_0^l M dx = O - M_1 l$$

siendo  $O$  el área del diagrama de momentos en el caso de estar la viga  $cd$  apoyada.

Sustituyendo estos valores en la ecuación 11 tendremos

$$\frac{2}{3} \frac{M_1 h^2}{J_1} - \frac{O - M_1 l}{J_2} h = 0$$

de donde

$$M_1 = \frac{\frac{O}{l}}{1 + \frac{2}{3} K} (-) \quad [12]$$

siendo

$$K = \frac{h}{l} \cdot \frac{J_2}{J_1}$$

una constante de gran importancia para la resolución del problema, que es independiente de la carga y de la dirección de la fuerza.

La fórmula [12] nos dice que el momento en el extremo superior del montante es siempre negativo y su valor sólo depende del área  $O$ , diagrama de los momentos.

<sup>1</sup> Véase el número anterior, página 296.

Calculado  $M_1$  se conocerá  $H$ , que es siempre positivo

$$H = - \frac{M_1}{h}$$

Las reacciones  $A$  y  $B$  son las mismas que en el caso de una viga  $cd$  de luz  $l$  apoyada en sus extremos.

Los signos de los momentos están en relación con el esfuerzo que engendran en ciertas fibras del elemento considerado, y así como ocurre en una viga apoyada sometida a una carga que sus fibras inferiores sufren tensión y se consideran los momentos positivos, análogamente generalizamos para vigas empotradas, pórticos, etc., y estando en aquellas sus fibras inferiores en tensión hacia el centro de la viga y comprimidas hacia los apoyos, los momentos serán positivos hacia el centro y negativos hacia los apoyos, y en el caso de un pórtico los momentos que originan tensiones en el contorno interior serán positivos, y viceversa.

Para el cálculo de sistemas hiperestáticos más complicados vamos a generalizar la ecuación [11], y para ello consideramos descompuesto en sus dos elementos el diagrama de los momentos reales del dintel  $cd$  (fig. 7.<sup>a</sup>), el área  $O$  y el rectángulo a sustraer, de altura igual a  $M_1$ , y proyectamos los centros de gravedad de cada una de estas áreas sobre el dintel verticalmente, o más en general, *paralelamente a las ordenadas del diagrama correspondiente*, y en forma análoga proyectemos el centro de gravedad de cada una de las áreas de los diagramas de los momentos de los montantes sobre éstos *horizontalmente*. Hecho esto y considerando una cualquiera de las áreas citadas, llamaremos *momento estático ficticio* de dicha área con relación al eje  $I$  al producto de aquella por la ordenada (con relación al eje  $I$ ) de la proyección, sobre el elemento considerado del pórtico, del centro de gravedad del área en cuestión. Este *momento estático ficticio* es una cantidad algébrica susceptible de signo y toma el del área a que se refiere.

Hemos insistido sobre el modo de proyectar los centros de gravedad para el caso de que algún elemento del pórtico esté inclinado.

Según lo dicho, el momento estático ficticio con relación a  $I$  del pórtico de la figura 7.<sup>a</sup> para el diagrama de momentos reales del dintel será:

$$(O - M_1 l)h$$

El momento estático ficticio del diagrama de los momentos de los montantes respecto al mismo eje  $I$  será

$$2 \times \frac{1}{2} M_1 h \cdot \frac{2}{3} h$$

Si suponemos  $J_2 = J_1$ , la ecuación [11] se transformará

$$(O - M_1 l)h + 2 \times \frac{1}{2} M_1 h \times \frac{2}{3} h = 0$$

que nos dice que la suma de los momentos estáticos con relación al eje  $I$  de las áreas del diagrama de momentos reales es nula.

Si  $J_2 < J_1$ , basta introducir en el denominador estos momentos de inercia en su valor correspondiente a cada elemento.

De lo dicho se deduce un importante teorema fundamental aplicable a los pórticos con dos articulaciones que subsiste en los sin articulaciones, y cualquier

que sea la fuerza y su dirección y para cualquier forma del pórtico (con dintel oblicuo, con consolas, con dintel prolongado en voladizo, etc., etc.), que se enuncia así.

*Trazado el diagrama de momentos del dintel y de los montantes, se calcula, con relación al eje  $I$  que pasa por las articulaciones o empotramientos del pie de aquéllos, el momento estático ficticio del diagrama de cada elemento, que se divide por el momento de inercia correspondiente. La suma de los términos así obtenida es nula y nos da la condición suplementaria para determinar los momentos desconocidos.*

Este teorema, que, como veremos, se aplica también en el caso de formas complicadas, en el de pórticos continuos o de distintos pisos, de vigas Vierendeel, etc., ofrece grandes ventajas, puesto que transforma en una sencilla operación geométrica las ecuaciones integrales resultantes de la aplicación del teorema de Castigliano, haciendo el cálculo muy claro, muy sencillo y de aplicación muy rápida, con sólo la oportuna elección que M. Rieger hace de los ejes de momentos, siendo aplicable el procedimiento al cálculo de cualquier sistema hiperestático de elementos rectos.

Aplicando lo dicho a un pórtico con dintel inclinado, suponiendo una carga cualquiera,

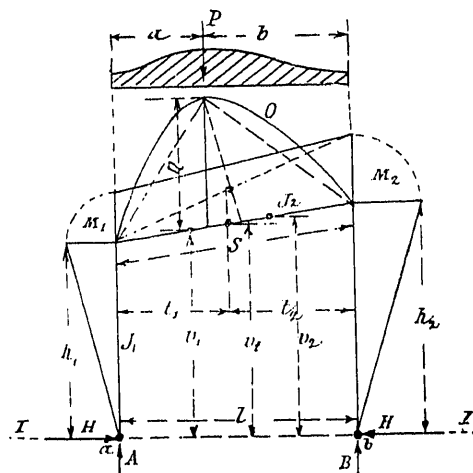


Fig. 8.<sup>a</sup>

$$H_a = H_b = H$$

$$M_1 = H h_1 \quad M_2 = H h_2$$

de donde

$$M_2 = M_1 \frac{h_2}{h_1} = n M_1$$

relación estática.

Para el cálculo de los momentos se emplea la luz  $l$  medida horizontalmente, como en el caso anterior, siendo  $\eta = \frac{Pab}{l}$  para una carga aislada, o  $\eta = \frac{1}{8} ql^2$  para una repartida uniformemente; pero en el cálculo de las áreas del diagrama de momentos, en vez de la luz  $l$ , hay que tomar la longitud  $s$  del dintel, por la razón de que la integración de los elementos  $\eta ds$  dan términos con  $s$  y no con  $l$ , como en el caso anterior.

Así, pues, si la carga es, por ejemplo, un peso aislado (fig. 8.<sup>a</sup>), el teorema de los momentos estáticos ficticios da

$$-\frac{1}{2} M_1 h_1 \times \frac{2}{3} h_1 \times \frac{1}{J_1} - \frac{1}{2} M_2 h_2 \times \frac{2}{3} h_2 \cdot \frac{1}{J_2} + \left[ \frac{1}{2} \eta s v_1 - \frac{1}{2} M_1 s v_1 - \frac{1}{2} M_2 s v_2 \right] \frac{1}{J_2} = 0$$

siendo

$$v_1 = \frac{2h_1 + h_2}{3}; v_2 = \frac{h_1 + 2h_2}{3}; v_3 = \frac{1}{3l} [h_1(2l - a) + h_2(l + a)]$$

introduciendo la constante antes hallada

$$K = \frac{h_1 \cdot J_2}{s \cdot J_1}$$

tendremos de la ecuación anterior

$$M_1 = \frac{\eta}{2l} \times \frac{l(2+n) + a(n-1)}{K(1+n^3) + 1+n+n^2} \quad (-)$$

siendo

$$\eta = \frac{Pab}{l}$$

Como

$$M_2 = nM_1$$

Si  $n = 1$ , o sea para dintel horizontal

$$M_1 = M_2 = \frac{\eta}{2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{2}{3} K}$$

**Pórtico con dintel a dos vertientes**

Otro caso de aplicación puede ser un pórtico con dintel a dos vertientes.

Siendo la cumbrera de éstas un punto de empotramiento elástico, puede estudiarse el diagrama de momentos de cada una de las vertientes.

La relación estática para el conjunto, llamando  $M_d$  el momento en la cumbrera del dintel, es

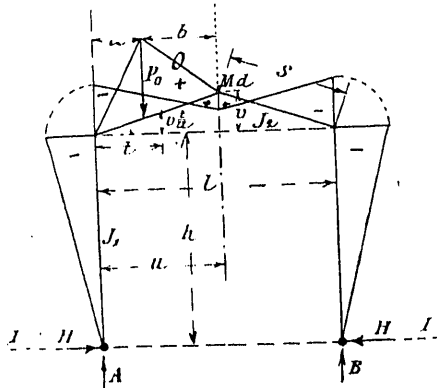


Fig. 9.ª

$$M_d = B \frac{l}{2} - H(h + v) \quad \text{pero } M_1 = -Hh \quad \text{y } Bl = Pa$$

luego

$$M_d = \frac{Pa}{2} - M_1 \frac{h + v}{h}$$

o también

$$M_d + M_1(1 + \alpha) = \frac{Pa}{2}$$

siendo

$$\alpha = \frac{v}{h}$$

Esta es la relación estática.

Aplicando el teorema de los momentos estáticos ficticios con relación al eje I, tendremos

$$-2 \frac{1}{2} M_1 h \cdot \frac{2}{3} h \frac{l}{J_1} + \frac{O}{J_2} \left( h + v \frac{l}{n} \right) + \left[ -M_1 \left( h + \frac{v}{3} \right) + M_d \left( h + \frac{2v}{3} \right) \right] \frac{s}{J_2} = v$$

Para una carga P

$$O = \frac{1}{2} \eta s \quad \eta = \frac{Pab}{l} \quad n = \frac{l}{2} \quad t = \frac{n + a}{3}$$

y

$$M_1 = \frac{Pa}{4l^2} h \cdot \frac{6bhl + v(3l^2 - 4a^2)}{h^2(3 + K) + v(3h + v)} \quad (-)$$

Si la carga está en el centro del dintel

$$O = 0 \quad a = \frac{l}{2}$$

y

$$M_1 = \frac{Pl}{8} h \cdot \frac{3h + 2v}{h^2(3 + K) + v(3h - v)} \quad (-)$$

Arturo MONFORT  
Ingeniero jefe de C., C. y P.

# Revista de Revistas

## Nuevos datos sobre la enfermedad de los hormigones de cemento fundido

Las conclusiones a que llegaron los ingenieros Freysiniet y Coyne, deducidas de las observaciones hechas en los hormigones de cemento aluminoso del gran puente en construcción de La Corde (Bretaña), y que figuran en el número de nuestra REVISTA correspondiente a 15 de abril de 1927, han sido combatidas por Feret, dando lugar a una polémica en la *Genie Civil*, números de 3 de marzo y 11 de agosto de 1928, que extractamos a continuación.

Según Feret, no existe la enfermedad de los hormigones de cemento fundido; las averías se deben al empleo de exceso de agua en el amasado o a la adición de

arena fina, que, en definitiva, representa reducción importante en la dosificación del cemento. No niega la influencia de los fenómenos térmicos sobre el fraguado y endurecimiento del hormigón de cemento fundido, pues sus experimentos le han suministrado muchos ejemplos; pero no ha podido provocar nunca la enfermedad únicamente por medio de temperaturas análogas a las de los materiales calentados por el sol. Por el contrario, empleando fuertes cantidades de agua en el amasado, ha obtenido casi siempre con cementos aluminosos el aspecto terroso característico de la enfermedad, que no se presenta nunca con otras clases de aglomerantes. Ciertamente la hipótesis de una temperatura crítica, variable según la procedencia del suministro, sería bastante cómoda para explicar los fenómenos en cuestión; pero en