

en  $140 \sqrt{d}$  siendo  $d$  el diámetro. Fijada esta carga máxima, la solución del problema es clarísima: todos los carros actuales pueden circular por las carreteras; pero es preciso llevar a cabo en ellos un re-



Carro cargado con 73 cajas de naranjas, cuyo peso, unido al del carro, es de 4 500 kg. Por la carretera de Valencia a Silla circulan diariamente 3 280 carros, la mayor parte de los cuales llevan una carga semejante.

conocimiento y darles la placa de carga máxima que pueden transportar, placa que deberán llevar en sitio bien visible..., y después hacer cumplir esta disposición, sometiendo las carreteras a una vigilancia estrechísima y siendo inexorables en hacer efectivas las multas que se impongan.

Las multas no deberán ser de cinco pesetas ni cifra análoga, pues en ese caso, como es negocio, faltan; hay casos, de los cuales en la misma Jefatura de Málaga pueden dar fe, en que las multas de cinco pese-

tas se pagan adelantadas, para evitarse las molestias ulteriores. Al que falte hay que hacerle sentir el castigo, no solamente por el daño que él lleva a cabo, sino por *ejemplaridad* ante los demás; esto, unido a un sistema de publicidad local de las multas impuestas, haría llegar a un respeto grande de estas disposiciones.

Al estudiar el Reglamento de circulación antes citado, en Bilbao tropezábamos con esta dificultad: la limitación de las multas impuestas por el Estatuto municipal; multas de 100 y 150 pesetas, eran irrisorias, y, como decimos antes, muchas veces era negocio faltar. Allí acudimos a otro sistema: según la carga, era la tributación. Si un carro llevaba más carga de la que en su matrícula le era permitido, no solamente faltaba al Reglamento y caía dentro de la reducida multa gubernativa, sino que *dejaudaba*, y era posible, legal, poner una multa del doble de la diferencia entre la tarifa por la cual tributaba y aquella por la cual debía tributar. Como la escala ascendente de tarifas según las cargas aumentaba rápidamente el doble de la diferencia, pasaba en seguida de las 500 pesetas, y podía subir a cifras mayores. Unas cuantas multas de varios miles de pesetas, publicadas en los periódicos, fueron santo remedio para aquel mal que parecía irremediable.

Yo expongo a la consideración de los lectores de la REVISTA la gravedad del caso; el problema tiene solución, y solución justa, si desechamos la eterna manía española de creer todo imposible, y poniendo todos para resolverlo un poco de buena fe y un mucho de voluntad, seguros de hacer un gran bien a la nación no permitiendo que sus fondos se gasten inútilmente, sino haciendo que el esfuerzo que el ministro y el Patronato están llevando a cabo pueda servir para conseguir que las carreteras españolas sea uno de nuestros orgullos dentro de muy poco tiempo.

José LUIS ESCARIO  
Ingeniero de Caminos

## Interpretación geométrica de las ecuaciones para el cálculo de los pórticos y en general de todos los sistemas hiperestáticos de elementos rectos

Monsieur Rieger, profesor de la Escuela Politécnica de Brno (Tchecoslovaquia), autor de una Regla para el cálculo de las construcciones de hormigón que describimos en esta REVISTA, en reciente obra publicada que se titula *Cálculo de las Construcciones hiperestáticas*, presenta un método general nuevo muy sencillo y de fácil aplicación para el cálculo de aquellos sistemas.

Uno de los métodos generales de cálculo, el más conocido, consiste en la aplicación del teorema de Castigliano del mínimo trabajo de deformación, que obliga a deducir gran número de derivadas y resolver sistemas de muchas ecuaciones, trabajo penoso que se puede evitar aplicando el nuevo método llamado *de los momentos estáticos ficticios* que vamos a describir y demostrar su generalidad.

En un sistema hiperestático el número de ecuaciones que nos proporciona la estática es menor que el de incógnitas, consiguiendo las que nos faltan por la

aplicación del trabajo de deformación de los elementos.

Aun cuando aquella deformación es producida por el momento de flexión, el esfuerzo cortante y la fuerza normal, en la práctica sólo se tiene en cuenta la influencia del primero, o sea el momento de flexión, cuyo trabajo de deformación es, según sabemos,

$$C = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{M^2 ds}{EJ} \quad [1]$$

siendo  $ds$  la diferencial del elemento de la fibra neutra y  $l$  la longitud de aquel elemento, suponiendo además constantes en él  $E$  y  $J$ .

Según el teorema de Castigliano, si llamamos  $P$  a la fuerza que obra sobre el sistema y  $\delta$  el desplazamiento de su punto de aplicación

$$\frac{\partial C}{\partial P} = \delta$$

y también

$$\frac{dC}{dM} = \alpha \quad [2]$$

siendo  $\alpha$  la rotación de la sección deformada.

Esta última expresión es la que nos interesa.

Si sobre una viga apoyada  $ab$  actúa una carga representada por la línea  $cd$  que produce un diagrama de momentos  $O$ , si los apoyos  $a$  y  $b$  (o uniones

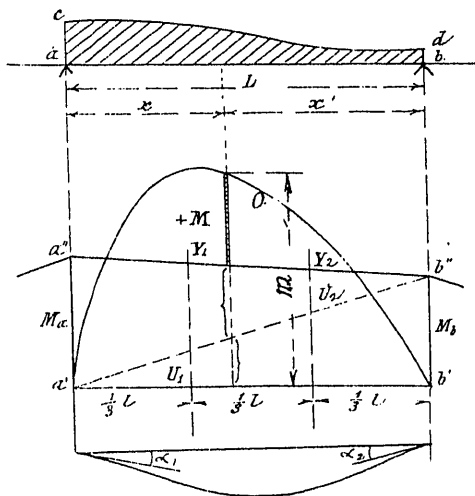


Fig. 1.ª

con piezas contiguas) se convierten en empotramientos, el nuevo diagrama de momentos  $O_1$  se obtiene uniendo al diagrama hallado  $O$  la línea  $a''b''$  determinada por  $M_a$  y  $M_b$  momentos de empotramiento en  $a$  y  $b$ , línea que divide en el diagrama la zona positiva y negativa. Según esto, el momento de un punto cualquiera será, siendo  $\mathcal{M}$  el momento del primer diagrama  $O$  hallado

$$M = \mathcal{M} - M_a \frac{x'}{l} - M_b \frac{x}{l} \quad [3]$$

según [2]

$$\alpha_1 = \frac{dC}{dM} = \int_0^l M \frac{dM}{dM_a} \frac{dx}{lEJ}$$

como según [3]

$$\frac{dM}{dM_a} = -\frac{x'}{l}$$

tendremos

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 &= -\int_0^l \frac{Mx'dx}{lEJ} \\ \alpha_2 &= -\int_0^l \frac{Mxdx}{lEJ} \end{aligned} \right\} [4]$$

El numerador de cada integral es el momento estático del área de los momentos con relación a las verticales que pasan por  $a$  y  $b$ .

Si el empotramiento en  $a$  y  $b$  es perfecto,

$$\alpha_1 = 0 \quad \text{y} \quad \alpha_2 = 0$$

luego

$$\left. \begin{aligned} \int_0^l \frac{Mx'dx}{lEJ} &= 0 & \text{o sea} & \quad \frac{dC}{dM_a} = 0 \\ \int_0^l \frac{Mxdx}{lEJ} &= 0 & \text{,} & \quad \frac{dC}{dM_b} = 0 \end{aligned} \right\} [5]$$

o sea que el trabajo de deformación es mínimo, según el teorema de Castigliano.

De las [5], siendo  $l$ ,  $E$  y  $J$  constantes,

$$\left. \begin{aligned} \int_0^l Mx'dx &= 0 \\ \int_0^l Mxdx &= 0 \end{aligned} \right\} [6]$$

y sumándolas

$$\int_0^l Ml dx = l \int_0^l M dx = 0$$

o sea

$$\int_0^l M dx = 0 \quad [7]$$

ecuación que indica la igualdad de las áreas positivas y negativas del diagrama  $O_1$  de los momentos y, por tanto, sumando la superficie rayada a cada una de aquellas áreas, obtendremos el área  $O$  de los momentos de una viga apoyada o el trapecio de altura  $l$  con bases  $M_1$  y  $M_2$ , y siendo estas áreas resultantes iguales, tendremos

$$O = \frac{M_1 + M_2}{2} l$$

El área del rectángulo  $abcd$ , que es la misma de  $O$ , nos dice que  $0$ , punto en que corta el eje de simetría, es punto también de cruce de  $a''b''$ , línea de momentos de la viga empotrada.

El área  $O_1$  de los momentos de esta viga puede,

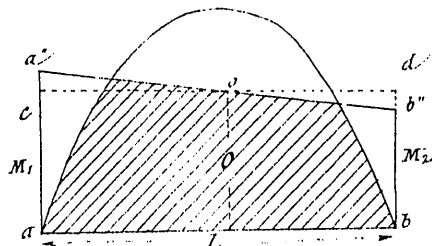


Fig. 2.ª

pues, considerarse como formada por la superposición de  $O$ , y los dos triángulos  $U_1$  y  $U_2$  como sustractivos (fig. 1.ª), y la suma algébrica de las áreas positivas y negativas, siendo nula, también lo será su momento estático respecto a un eje cualquiera, como dice la ecuación [6]

$$\int_0^l Mxdx = 0$$

Tomando como ejes  $Y_1$  y  $Y_2$  y llamando  $(O)_{y_1}$  el momento estático del área  $O$  respecto a  $Y_1$  tendremos

$$(O)_{y_1} = \frac{1}{2} M_2 l \times \frac{1}{3} l \quad [\alpha]$$

y también

$$(O)_{y_2} = \frac{1}{2} M_1 l \times \frac{1}{3} l \quad [\beta]$$

de donde

$$\left. \begin{aligned} M_1 &= \frac{6(O)_{y_2}}{l^2} \\ M_2 &= \frac{6(O)_{y_1}}{l^2} \end{aligned} \right\} [8]$$

que es la expresión general de los momentos en los apoyos.

Las ecuaciones [α] y [β] dicen geoméricamente que yuxtaponiendo los dos triángulos  $U_1$  y  $U_2$  que tengan el mismo momento respecto a  $Y_1$  y  $Y_2$  que el del área  $O$ , tendremos la recta  $a''b''$  de cierre del área de los momentos  $O_1$ .

Con las fórmulas [8] del caso general resuelve M. Rieger gran número de casos particulares de cargas en vigas empotradas, acopiando los resultados en un atlas en el que se representan aquellos diagramas y las fórmulas de aplicación correspondientes.

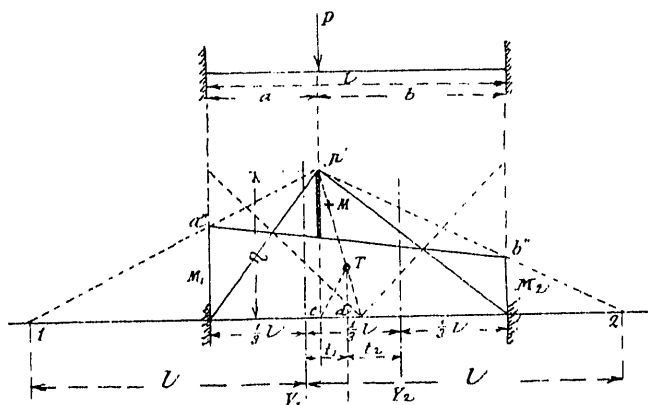


Fig. 3.a

Por ejemplo, para una viga empotrada resistiendo una carga aislada  $P$ , tendremos (fig. 3.a):

$$O = \frac{1}{2} l \eta$$

siendo

$$\eta = \frac{P \cdot a \cdot b}{l}$$

$$\frac{t_1}{a} = \frac{Td}{p'c} = \frac{1}{3}$$

de donde

$$t_1 = \frac{a}{3} \quad \text{y} \quad t_2 = \frac{b}{3}$$

$$(O)_{y_1} = O t_1 \quad (O)_{y_2} = O t_2$$

luego según [8]

$$M_1 = \frac{6 \cdot \frac{1}{2} l \eta t_1}{l^2} = \frac{3Pab \cdot \frac{b}{3}}{l^2} = \frac{Pab^2}{l^2}$$

$$M_2 = \frac{Pa^2b}{l^2}$$

Cuya construcción gráfica es la de la figura 3.a, o sea hallado el valor  $\eta$ , y, por tanto, el punto  $p'$ , a un lado y otro de la vertical que pase por aquel punto se lleva la magnitud  $l$ , con lo que obtendremos los puntos 1 y 2, que unidos con  $p'$  nos dan  $a''$  y  $b''$ .

Según esto, el momento en el punto de aplicación de la fuerza es

$$M = \eta - M_1 \frac{b}{l} - M_2 \frac{a}{l} = \frac{Pab}{l} - \frac{Pab^3}{l^3} - \frac{Pa^3b}{l^3} = \frac{2Pa^2b^2}{l^3}$$

Análogamente se hace el cálculo con otras hipótesis de carga.

### Vigas continuas

Una viga continua de  $n$  tramos es una construcción  $(n - 1)$  veces hiperestática o indeterminada.

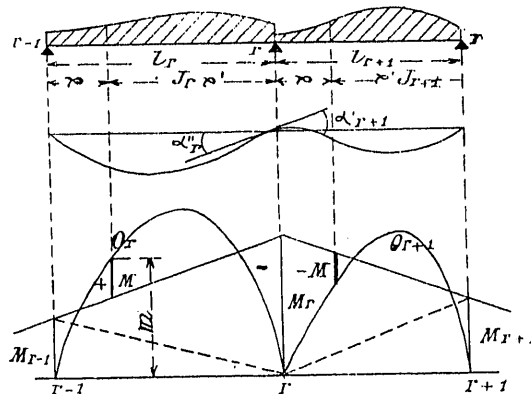


Fig. 4.a

La fibra med'ia deformada en el apoyo  $r$  tiene en los dos tramos contiguos una tangente común

$$\alpha'_{r+1} = -\alpha''_r$$

y según [4]

$$\left. \begin{aligned} \alpha''_r &= \int_0^{l_r} \frac{Mx dx}{l_r EJ_r} \\ \alpha'_{r+1} &= \int_0^{l_{r+1}} \frac{Mx' dx'}{l_{r+1} EJ_{r+1}} \end{aligned} \right\} [9]$$

pero

$$\int_0^{l_r} Mx dx = (O_r)_{r-1} - \frac{1}{2} M_{r-1} l_r \times \frac{1}{3} l_r - \frac{1}{2} M_r l_r \times \frac{2}{3} l_r$$

$$\int_0^{l_{r+1}} Mx' dx' = (O_{r+1})_{r+1} - \frac{1}{6} M_{r+1} l_{r+1}^2 - \frac{1}{3} M_r l_{r+1}^2$$

Igualando las [9] tendremos como resultado

$$M_{r-1} \frac{l_r}{J_r} + 2M_r \left[ \frac{l_r}{J_r} + \frac{l_{r+1}}{J_{r+1}} \right] + M_{r+1} \frac{l_{r+1}}{J_{r+1}} =$$

$$= \frac{6(O_r)_{r-1}}{l_r J_r} + \frac{6(O_{r+1})_{r+1}}{l_{r+1} J_{r+1}}$$

Ecuación que es la representación del teorema de Clapeyron generalizado a momentos de inercia variables de uno a otro tramo.

Para la aplicación más práctica del método gráfico se transforman las ecuaciones del modo siguiente.

Comencemos por el 1.º y 2.º tramos no cargados. La ecuación será, según la antes hallada,

$$M_0 \frac{l_1}{J_1} + 2M_1 \left[ \frac{l_1}{J_1} + \frac{l_2}{J_2} \right] + M_2 \frac{l_2}{J_2} = 0$$

pero siendo

$$M_0 = 0$$

tendremos

$$\frac{M_1}{M_2} = - \frac{\frac{l_2}{J_2}}{2 \left( \frac{l_1}{J_1} + \frac{l_2}{J_2} \right)} = - \frac{1}{2 \left( 1 + \frac{l_1 J_2}{l_2 J_1} \right)} = \lambda_1$$

$$M_1 = \lambda_1 M_2$$

Del mismo modo para los dos tramos siguientes

$$M_1 \frac{l_2}{J_2} + 2M_2 \left( \frac{l_2}{J_2} + \frac{l_3}{J_3} \right) + M_3 \frac{l_3}{J_3} = 0$$

poniendo por  $M_1$  su valor hallado

$$M_2 \left[ l_1 \cdot \frac{l_2}{J_2} + 2 \left( \frac{l_2}{J_2} + \frac{l_3}{J_3} \right) \right] + M_3 \frac{l_3}{J_3} = 0$$

de donde

$$\frac{M_2}{M_3} = - \frac{\frac{l_3}{J_3}}{l_1 \frac{l_2}{J_2} + 2 \left( \frac{l_2}{J_2} + \frac{l_3}{J_3} \right)} = - \frac{1}{2 \left( 1 + \frac{l_2}{l_1} \frac{J_3}{J_2} \right) + \lambda_1 \frac{l_2}{l_3} \frac{J_3}{J_2}} = \lambda_2 \quad \text{o} \quad M_2 = \lambda_2 M_3$$

análogamente

$$\frac{M_3}{M_4} = - \frac{1}{2 \left( 1 + \frac{l_3}{l_4} \frac{J_2}{J_3} \right) + \lambda_2 \frac{l_3}{l_4} \frac{J_2}{J_3}} = \lambda_3$$

y así sucesivamente.

Si procedemos a la determinación de estas mismas ecuaciones, comenzando por el último tramo, llamando  $\pi$  a los coeficientes  $\lambda$ , tendremos

$$\pi_n = \frac{M_{n-1}}{M_{n-2}} = - \frac{1}{2 \left( 1 + \frac{l_n}{l_{n-1}} \frac{J_{n-1}}{J_n} \right)}$$

$$\pi_{n-1} = \frac{M_{n-2}}{M_{n-3}} = - \frac{1}{2 \left( 1 + \frac{l_{n-1}}{l_{n-2}} \frac{J_{n-2}}{J_{n-1}} \right) + \pi_n \frac{l_{n-1}}{l_{n-2}} \frac{J_{n-2}}{J_{n-1}}}$$

etcétera.

Las relaciones  $\lambda$  y  $\pi$  fijan la posición de los focos de la viga continua y demuestran que en los tramos no cargados la línea de momentos es una recta pasando por un foco. Determinadas, pues, aquellas relaciones, supuestos conocidos los momentos en los apoyos de los tramos cargados, se obtienen los momentos restantes por la construcción siguiente:

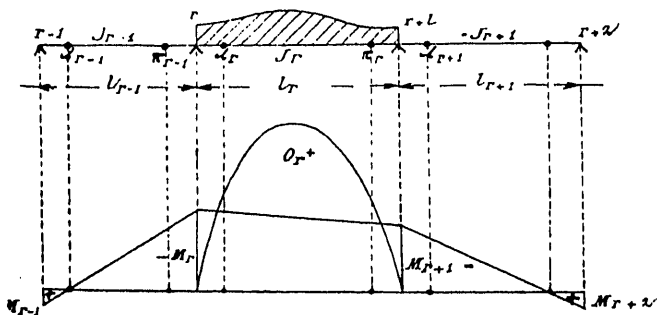


Fig. 5.ª

Para conocer los momentos en los apoyos de un tramo cargado (fig. 4.ª)

$$M_{r-1} = \lambda_{r-1} M_r$$

$$M_{r+2} = \pi_{r+1} M_{r+1}$$

Aplicados a los tramos  $l_{r-1}$ ,  $l_r$ ,  $l_{r+1}$  las ecuaciones de Clapeyron tomadas, sucesivamente, dos a dos, dan

$$M_{r-1} \frac{l_{r-1}}{J_{r-1}} + 2M_r \left( \frac{l_{r-1}}{J_{r-1}} + \frac{l_r}{J_r} \right) + M_{r+1} \frac{l_r}{J_r} = \frac{6(O_r)_{r+1}}{l_r J_r}$$

$$M_r \frac{l_r}{J_r} + 2M_{r+1} \left( \frac{l_r}{J_r} + \frac{l_{r+1}}{J_{r+1}} \right) + M_{r+2} \frac{l_{r+1}}{J_{r+1}} = \frac{6(O_r)_r}{l_r J_r}$$

colocando en éstas los valores de  $M_{r-1}$  y  $M_{r+2}$  en función de  $M_r$  y  $M_{r+1}$  tendremos dos ecuaciones con estas dos últimas incógnitas, que poniéndolas en función de  $\lambda_r$  y  $\pi_r$ , relaciones que fijan los focos del tramo cargado, tendremos finalmente

$$M_r + M_{r+1} \lambda_r = \frac{6(O_r)_{r+1}}{l_r^2} \lambda_r$$

$$M_r \pi_r + M_{r+1} = \frac{6(O_r)_r}{l_r^2} \pi_r$$

o también

$$\left. \begin{aligned} \frac{M_r}{\lambda_r} + M_{r+1} &= \frac{6(O_r)_{r+1}}{l_r^2} \\ M_r + \frac{M_{r+1}}{\pi_r} &= \frac{6(O_r)_r}{l_r^2} \end{aligned} \right\} [10]$$

ecuaciones que conducen a una solución gráfica muy sencilla

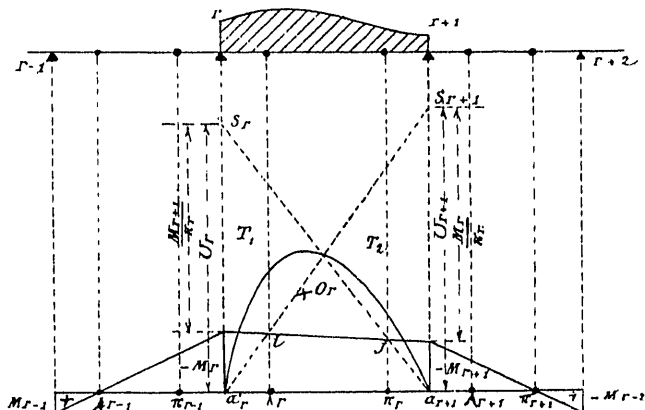


Fig. 6.ª

Se construye sobre  $l_r$  un triángulo rectángulo  $T_1$  tal que su momento estático con relación al eje  $r$  sea igual al momento estático del área  $O_r$  con relación al mismo eje

$$(T_1)_r = (O_r)_r$$

y otro  $T_2$  análogo con relación al eje  $r+1$

$$(T_2)_{r+1} = (O_r)_{r+1}$$

Las hipotenusas de estos triángulos cortan las verticales de los apoyos del tramo cargado en dos puntos cuyas ordenadas son

$$a_{r,s_r} = U_r = \frac{6(O_r)_r}{l_r^2}$$

por construcción; luego

$$a_{r,s_r} = U_r = M_r + \frac{M_{r+1}}{\pi_r}$$

según la [10], y

$$a_{r+1,s_{r+1}} = U_{r+1} = M_{r+1} + \frac{M_r}{\lambda_r}$$

luego los puntos  $i, j$  de las verticales de los focos están en la línea que da los momentos  $M_r$  y  $M_{r+1}$  que buscamos.

De este procedimiento general deduce el autor gran número de casos particulares.

Arturo MONFORT  
Ingeniero Jefe de C., C. y P.

## Electrificación de ferrocarriles

### Breve respuesta al Sr. Ontiveros, para terminar

Soy absolutamente enemigo de estas polémicas, que a nada bueno conducen, y respecto a la presente, que *no he iniciado*, mi único deseo es terminarla con estas líneas, en las que sólo hago algunas observaciones a los comentarios del Sr. Ontiveros, manteniendo, por lo demás, cuanto he afirmado en mi anterior artículo. (Que debía, por desgracia, escribirlo, lo verá con evidencia el lector que, después de leer las recientes manifestaciones del Sr. Ontiveros, tenga el capricho de releer el primero de sus artículos de mayo y junio.)

Primera. Yo no he dicho que el Sr. Ontiveros pretendiera ninguna prioridad en sus fórmulas. Lo que sí he dicho y sostengo es que, del texto de su primer artículo y de las notas, el lector que no estuviera en antecedentes podía llegar, en este sentido, a conclusiones erróneas.

Segunda. Se equivoca el Sr. Ontiveros si cree ver en lo que escribí una exagerada pretensión de originalidad. Creo que ni siquiera aparece esta palabra en mi artículo. Lo único que he querido, y esto es bien natural, es poner un poco las cosas en su punto, recordando, a quien hubiera olvidado las citas parciales que de mí hacía en 1927 el Sr. Ontiveros, que estas citas existían, y que toda la parte fundamental de sus fórmulas (ahora recuerda el Sr. Ontiveros que hasta las notaciones) estaba tomada de mis estudios de 1921.

Tercera. Me parece que no sólo yo, sino todo el que haya leído los recientes artículos del Sr. Ontiveros, particularmente los primeros, habrá entendido claramente que con sus fórmulas pretendía mayor exactitud y eficacia que con las de M. Parodi y las últimas mías. Respecto a las cifras de economías en gastos distintos de la energía para la tracción, sigo manteniendo mi tesis de que no existen todavía ningunas con valor concluyente, y que varían enormemente de unas a otras electrificaciones. Por muchas horas que haya robado al descanso mi querido compañero para conocer esas cifras, no podrá hacer que las cosas sean de otro modo. No es algo tan "standard", todavía, por ejemplo, el material eléctrico de gruesa tracción, para que pueda predecirse, ni siquiera con mediana precisión, lo que vaya a costar en cada caso su conservación y las economías que por este concepto vayan a alcanzarse.

El mismo Sr. Ontiveros, por lo demás, reconoce aquí, en la nota al margen de sus observaciones anteriores, lo que yo le indicaba: la falta de fijeza y de estabilidad de estos datos, acabando por decir sobre las tan manoseadas economías: "En el año 1926 serían las expuestas en mi artículo último; después serán distintas, pero el método conservará su rigor científico."

¿Qué quiere decirnos con esto el Sr. Ontiveros? ¿Que aunque las cifras que meta en sus fórmulas, al dar valores numéricos, varíen y puedan ser ahora bien distintas que hace años, y, en el fondo, casi imprecisables, queda siempre el rigor del método? Bueno; ¿y qué se obtiene prácticamente? ¿Qué se ha hecho, con todo ello, de la exactitud y eficacia *prácticas* de esas fórmulas, que es de lo que se trata? ¿No queda entonces todo reducido a un interesante ejercicio de cálculo?

Cuarta. El Sr. Ontiveros me atacaba tratando de mostrarme que calculaba mal los precios de las electrificaciones por kilómetro. Ahora confiesa el mismo Sr. Ontiveros que los datos de costes que él ha utilizado para sus cálculos me los debe a mí personalmente. Por lo visto, mi compañero se fiaba de mis informaciones antes, en este punto; pero ahora, ya no. Hablando seriamente, lo que hay es lo siguiente: Cuando el señor Ontiveros preparaba sus fórmulas de 1926 me pidió algunos datos de costos unitarios (líneas, subestaciones, locomotoras), que yo le di muy gustoso, para cierta clase de material, con los precios de aquella época. Con esos elementos puede calcularse, es verdad, el costo de una electrificación; pero se calcula *mal*, y es muy posible, y hasta probable, que se llegue a resultados muy alejados de la realidad. Puedo decirlo aquí con entera libertad, pues al hacerlo me critico a mí mismo, que seguí este procedimiento en 1921, de donde lo tomó el Sr. Ontiveros. Una de las principales razones, no la única, de ocurrir las cosas así está en el cálculo del peso de locomotoras eléctricas, que hará falta en total, tal como yo lo hacía, que, aunque correcto en principio, puede llevar a cifras que, por muchas razones, no coincidan con lo que luego, en realidad, se emplea como tonelaje de locomotoras eléctricas. El tener este punto débil mis procedimientos de cálculo de 1921 ha sido una de las razones de que lo abandone, sustituyéndolo por el publicado en *Ingeniería y Construcción*, de muchas más modestas pretensiones, pero, seguramente, más eficaz. Ya ve, pues, el Sr. Ontiveros cómo, a pesar de no haber olvidado que yo mismo le he dado en su día los datos de costes de elementos de electrificación, puedo muy bien afirmar que con esos elementos se llega a cifras que no son suficientemente exactas. Y esto, además de las razones anteriores, por otra poderosísima, que ya mencionaba en mis observaciones anteriores: el Sr. Ontiveros ha omitido el coste de los coches-motores remolques, que no faltarán en casi ninguna electrificación (estos precios de los coches-motores remolques no estaban en la lista de los que me pidió el Sr. Ontiveros).