

Cálculo del asiento de un cambio de vía⁽¹⁾

III. Cambios en alineación recta

10. El cambio más fácil de establecer es el cambio recto, caso en el que las ecuaciones se reducen a las [3], de las que deducimos

$$[5] \begin{cases} x \operatorname{sen} (\gamma - \delta) = d \operatorname{sen} \gamma - \lambda \operatorname{sen} (\gamma - \delta) - R(1 - \cos (\gamma - \delta)) - \\ - \frac{a}{\operatorname{sen} \delta} (\operatorname{sen} \gamma - \operatorname{sen} (\gamma - \delta)) \\ y \operatorname{sen} (\gamma - \delta) = a - d \operatorname{sen} \delta - \mu \operatorname{sen} (\gamma - \delta) - R(1 - \cos (\gamma - \delta)) \end{cases}$$

De estas ecuaciones se desprende que a medida que aumente R disminuirán x e y , o, al contrario que el valor de R deducido de ambas, que es

$$R(\cos \delta - \cos \gamma) = a - (\lambda + x) \operatorname{sen} \delta - (\mu + y) \operatorname{sen} \gamma$$

será tanto mayor cuanto más pequeños sean x e y ; el mayor valor de R será, pues, el que se obtenga haciendo $x = 0$, $y = 0$; es decir, llamándolo R_0 .

$$R_0(\cos \delta - \cos \gamma) = a - \lambda \operatorname{sen} \delta - \mu \operatorname{sen} \gamma$$

Podremos, pues, adoptar el radio que nos convenga, siempre que sea inferior a este valor R_0 ; volviendo a las ecuaciones [5] vemos que, una vez fijado R , los valores posibles de d serán los que den valores positivos para x e y , es decir, los que sean superiores al valor d_1 definido por la ecuación

$$d_1 \operatorname{sen} \gamma = R(1 - \cos (\gamma - \delta)) + \lambda \operatorname{sen} (\gamma - \delta) + \frac{a}{\operatorname{sen} \delta} (\operatorname{sen} \gamma - \operatorname{sen} (\gamma - \delta))$$

que se obtiene haciendo $x = 0$ en la primera de las [5] y siendo, además, inferior al valor d_2 dado por la ecuación

$$d_2 \operatorname{sen} \delta = a - \mu \operatorname{sen} (\gamma - \delta) - R(1 - \cos (\gamma - \delta))$$

deducida de la segunda de las [5], haciendo en ella $y = 0$.

Adoptado un valor de d comprendido entre estos dos límites d_1 y d_2 , determinaremos x e y por las ecuaciones [5], que pueden también escribirse:

$$\begin{aligned} x \operatorname{sen} (\gamma - \delta) &= (d - d_1) \operatorname{sen} \gamma \\ y \operatorname{sen} (\gamma - \delta) &= (d_2 - d) \operatorname{sen} \delta \end{aligned}$$

Al radio R_0 corresponde, al hacerse $x = 0$, $y = 0$, un valor de d , que llamaremos d_0 y que puede considerarse como desarrollo normal del cambio, quedando definido por la ecuación

$$d_0(\operatorname{sen} \delta + \operatorname{sen} \gamma) = \frac{a}{\operatorname{sen} \delta} [\operatorname{sen} \delta + \operatorname{sen} \gamma - \operatorname{sen} (\gamma - \delta)] + (\lambda - \mu) \operatorname{sen} (\gamma - \delta)$$

11. Los valores d_0 , d_1 , d_2 satisfacen a algunas relaciones interesantes y que pueden ser útiles: sumando las ecuaciones que nos dan los valores de d_1 y d_2 , y comparando el resultado con la que nos da el de d_0 , encontramos

$$d_0(\operatorname{sen} \delta + \operatorname{sen} \gamma) = d_1 \operatorname{sen} \gamma + d_2 \operatorname{sen} \delta$$

(1) Véase el número anterior, página 215.

De las mismas ecuaciones deducimos

$$(d_2 - d_1) \operatorname{sen} \delta \operatorname{sen} \gamma = (a - \mu \operatorname{sen} \gamma - \lambda \operatorname{sen} \delta) \operatorname{sen} (\gamma - \delta) - R(1 - \cos (\gamma - \delta)) (\operatorname{sen} \gamma + \operatorname{sen} \delta)$$

o bien

$$(d_2 - d_1) \operatorname{sen} \delta \operatorname{sen} \gamma = R_0(\cos \delta - \cos \gamma) \operatorname{sen} (\gamma - \delta) - R \operatorname{sen} \gamma + \operatorname{sen} \delta (1 - \cos (\gamma - \delta))$$

y teniendo en cuenta que

$$\frac{\cos \delta - \cos \gamma}{\operatorname{sen} \gamma + \operatorname{sen} \delta} = \operatorname{tang} \frac{\gamma - \delta}{2} = \frac{1 - \cos (\gamma - \delta)}{\operatorname{sen} (\gamma - \delta)}$$

deducimos

$$(d_2 - d_1) \operatorname{sen} \delta \operatorname{sen} \gamma = (R_0 - R) (\operatorname{sen} \gamma + \operatorname{sen} \delta) \times (1 - \cos (\gamma - \delta))$$

y finalmente

$$(d_2 - d_1) \operatorname{sen} \gamma = (d_2 - d_0) \operatorname{sen} \delta = (R_0 - R) (1 - \cos (\gamma - \delta))$$

12. Aplicando al mismo ejemplo de la página 219 las ecuaciones anteriores, encontraremos

$$R_0 = 363,12$$

y fijando el valor del radio en 300 m, deducimos

$$d_1 = 30,611 \quad d_2 = 40,004$$

Haciendo ahora $d = 34$ m, obtenemos, finalmente,

$$x = 4,37 \quad y = 1,74$$

y el problema queda resuelto.

IV. Cambios en alineación curva con desviación por el interior

13. Cuando se trata de instalar un cambio en una alineación existente es preciso (fig. 6.^a) disponer dos trozos rectos, LB' y $F'M$, para colocar los

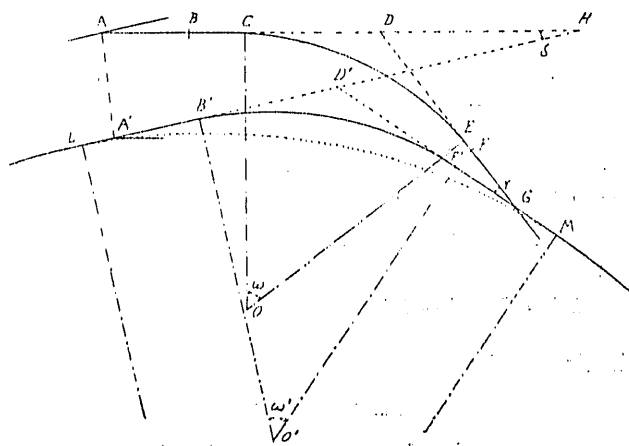


Fig. 6.^a

aparatos, sustituyendo el trozo LM de la curva primitiva por la línea mixta $LB'F'M$, en la que la parte curva $B'F'$ es una de las curvas del cambio.

Si llamamos ρ al radio de la curva primitiva y L

a la longitud $LB' = F'M$ de las partes rectas intercaladas, tendremos

$$R' = \rho - L \cot \frac{w'}{2}$$

ecuación que, unida a las tres conocidas [1], nos

$$[6] \left\{ \begin{aligned} 2R \sin \frac{w}{2} \sin \frac{\gamma + \delta}{2} &= 2 \left(\frac{a}{\sin \delta} - \lambda \right) \sin \frac{\delta}{2} \cos \left[\frac{w}{2} - \frac{\gamma}{2} \right] - 2\mu \sin \frac{\gamma}{2} \cos \left[\frac{w}{2} + \frac{\delta}{2} \right] + x \sin \left[\frac{w}{2} - \frac{\gamma + \delta}{2} \right] - \\ &\quad - y \sin \left[\frac{w}{2} + \frac{\gamma + \delta}{2} \right] + (y' - x') \sin \left[\frac{w}{2} - \frac{\gamma - \delta}{2} \right] \\ 2R' \sin \frac{w'}{2} \sin \frac{\gamma + \delta}{2} &= 2 \left(\frac{a}{\sin \delta} - \lambda \right) \sin \frac{\delta}{2} \cos \left[\frac{w'}{2} + \frac{\gamma}{2} \right] - 2\mu \sin \frac{\gamma}{2} \cos \left[\frac{w'}{2} - \frac{\delta}{2} \right] - x' \sin \left[\frac{w'}{2} - \frac{\gamma + \delta}{2} \right] + \\ &\quad + y' \sin \left[\frac{w'}{2} - \frac{\gamma + \delta}{2} \right] - (y - x) \sin \left[\frac{w'}{2} + \frac{\gamma - \delta}{2} \right] \\ \frac{w}{2} - \frac{w'}{2} &= \frac{\gamma - \delta}{2} \quad R' = \rho - L \cot \frac{w'}{2} \end{aligned} \right.$$

Ahora bien: el valor de L aumentará con x' y con y' y podemos, sin inconveniente, hacer $x' = y'$, valor que no tendrá otra finalidad que ajustar el de R' a un valor conveniente, y llamando l al mínimo de L , tendremos

$$x' = y' = L - l$$

permitirá obtener cuatro variables en función de las otras.

Las cuatro ecuaciones pueden ponerse en la forma siguiente:

Restando de la primera de las [6] la segunda multiplicada por $\cos \frac{\gamma + \delta}{2}$ y sustituyendo los valores de R' y de x' , y' , con lo que se elimina L , tendremos el sistema de tres ecuaciones

$$2R \sin \frac{w}{2} = 2\rho \sin \frac{w'}{2} \cos \frac{\gamma + \delta}{2} - 2l \cos \frac{w'}{2} \cos \frac{\gamma + \delta}{2} + 2 \left(\frac{a}{\sin \delta} - \lambda \right) \sin \frac{\delta}{2} \sin \frac{w + \delta}{2} + 2\mu \sin \frac{\gamma}{2} \sin \frac{w - \gamma}{2} - (x + y) \cos \frac{w}{2}$$

$$2\rho \sin \frac{w'}{2} \sin \frac{\gamma + \delta}{2} - 2l \cos \frac{w'}{2} \sin \frac{\gamma + \delta}{2} = 2 \left(\frac{a}{\sin \delta} - \lambda \right) \sin \frac{\delta}{2} \cos \frac{w + \delta}{2} - 2\mu \sin \frac{\gamma}{2} \cos \frac{w - \gamma}{2} + (x - y) \sin \frac{w}{2}$$

$$w' = w - \gamma + \delta$$

en las que es fácil eliminar w' ; para escribir mejor las dos resultantes haremos:

$$M = \rho \sin \delta - l \cos \delta + \left(\frac{a}{\sin \delta} - \lambda \right) (1 - \cos \delta)$$

$$N = \rho \sin \gamma + l \cos \gamma + \mu (1 - \cos \gamma)$$

$$P = \rho \cos \delta + l \sin \delta + \left(\frac{a}{\sin \delta} - \lambda \right) \sin \delta$$

$$Q = \rho \cos \gamma - l \sin \gamma + \mu \sin \gamma$$

obteniendo finalmente las ecuaciones

$$[7] \left\{ \begin{aligned} 2R &= P + Q - (N - M + x + y) \cot \frac{w}{2} \\ (P - Q) \cot \frac{w}{2} &= M + N + y - x \end{aligned} \right.$$

Si eliminamos, sucesivamente, x e y en estas ecuaciones, obtendremos:

$$[8] \left\{ \begin{aligned} 2R &= P + Q + 2(M - x) \cot \frac{w}{2} - (P - Q) \cot^2 \frac{w}{2} \\ 2R &= P + Q - 2(N + y) \cot \frac{w}{2} + (P - Q) \cot^2 \frac{w}{2} \end{aligned} \right.$$

y haciendo ahora

$$x = 0, \quad y = 0,$$

$$[9] \left\{ \begin{aligned} R_1 &= \frac{P+Q}{2} + M \cot \frac{w}{2} - \frac{P-Q}{2} \cot^2 \frac{w}{2} \\ R_2 &= \frac{P+Q}{2} - N \cot \frac{w}{2} + \frac{P-Q}{2} \cot^2 \frac{w}{2} \end{aligned} \right.$$

que nos dan en cada caso los dos límites, ambos superiores, de R .

14. Para hacernos cargo de la forma como varían los dos límites R_1 y R_2 representamos estas ecuaciones en forma gráfica en la figura 7.^a, consignando en el siguiente cuadro las coordenadas de los puntos notables de este gráfico. Observemos de paso que con los valores usuales las cuatro cantidades auxiliares M , N , P , Q son positivas, así como $N - M$ y $P - Q$.

Puntos	w	$\cot \frac{w}{2}$	R_1	R_2
	0	∞	$-\infty$	$+\infty$
A		$\frac{M+N}{P-Q}$	$\frac{P+Q}{2} - \frac{N^2-M^2}{2(P-Q)}$	$\frac{P+Q}{2} - \frac{N^2-M^2}{2(P-Q)}$
B		$\frac{N}{P-Q}$		$\frac{P+Q}{2} - \frac{N^2}{2(P-Q)}$
C		$\frac{M}{P-Q}$	$\frac{P+Q}{2} + \frac{M^2}{2(P-Q)}$	
D	π	0	$\frac{P+Q}{2}$	$\frac{P+Q}{2}$
	2π	∞	$-\infty$	$+\infty$

Toda la región comprendida entre el eje EF de las w y la línea $EABDF$ corresponde a las soluciones teóricamente posibles, puesto que R ha de

ser a la vez menor que R_1 y R_2 ; desde el punto de vista práctico habrá que distinguir dos casos, según que el punto A dé o no un radio admisible.

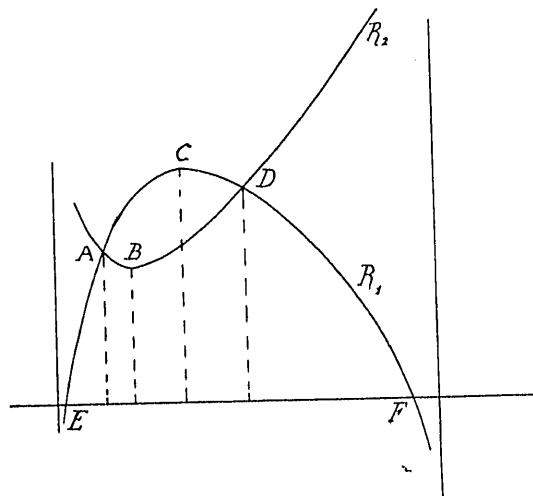


Fig. 7.a

Si la ordenada de A es admisible, el caso es análogo al del cambio recto, puesto que w representa aquí el desarrollo del cambio y la ordenada de A es el valor que resulta para R en las ecuaciones [7] cuando se hace $x = 0$, $y = 0$; cualquier valor de R menor que éste dará límites para w determinados por las ecuaciones [9]; la primera nos da

$$\cot \frac{w}{z} = \frac{M}{P-Q} \pm \sqrt{\frac{P+Q + \frac{M^2}{P-Q} - 2R_1}{P-Q}}$$

valores siempre reales, puesto que R es menor que la ordenada de A y, por consiguiente, que la de C ; la raíz positiva corresponde a la rama EA del gráfico de la figura 7.a, y la negativa a la DF . La segunda ecuación nos da:

$$\cot \frac{w}{z} = \frac{N}{P-Q} \pm \sqrt{\frac{2R_2 - (P+Q) + \frac{N^2}{P-Q}}{P-Q}}$$

valores reales y positivos si R es mayor que la ordenada de B , e imaginarios en caso contrario.

Fijado un valor para w dentro de sus límites, las ecuaciones [8] nos dan

$$y = \frac{(P-R) - (Q-R) \cos w}{\sin w} - N$$

$$x = \frac{(Q-R) - (P-R) \cos w}{\sin w} + M$$

determinándose así x e y en función de w y R . La economía de desarrollo nos llevará a adoptar para valor de w su mismo límite en la rama EA del gráfico, y entonces $x = 0$ y la ecuación [7] nos dará

$$y - x = (P-Q) \cot \frac{w}{z} - (M+N)$$

en la que el valor de $\cot \frac{w}{z}$ será el encontrado como límite.

Por último, la ecuación

$$R' = \rho - L \cot \frac{w'}{2}$$

permitirá fijar el valor definitivo para R' aumentando L hasta donde sea preciso a partir de su límite inferior l .

15. En nuestro ejemplo de siempre, para $\rho = 10\,000$

$$M = 193.937$$

$$N = 102.361$$

$$P = 9999.69$$

$$Q = 9959.31$$

con lo que las ordenadas de los puntos notables del gráfico de la figura 7.a serán

A	318
B	-116
C	10443
D	9979 (*)

podremos, pues, adoptar un radio de 300 m, con lo que el límite inferior de w sobre la rama EA vendrá definido por

$$\cot \frac{w}{2} = 27.223$$

de donde

$$w = 4^{\circ}12'24'',123 \quad w' = 0^{\circ}12'34'',922$$

de donde se deduce

$$x = 0 \quad y = 2.46$$

El radio R' podrá fijarse en 6 000 m, siendo entonces

$$L = (\rho - R') \tan \frac{w'}{2} = 7.31$$

de donde

$$x' = y' = L - l = 1.31$$

Si el radio de la curva primitiva fuese de 500 m tendríamos

$M = 4.012$	A	176
$N = 50.8029$	B	174
$P = 501.590$	C	503
$Q = 497.026$	D	501

y haciendo $R = 300$ m encontraríamos en la rama BD del gráfico el valor límite

$$\cot \frac{w}{2} = 4.8449$$

de donde

$$w = 14^{\circ}1'.52''$$

que nos daría un desarrollo para el cambio de $LM = 89.89$ m, solución poco práctica, pero perfectamente posible.

Antonio PRIETO Y VIVES
Profesor de la Escuela de Caminos

(*) Como comprobación la suma de las ordenadas de A y D debe ser igual a la de B y C .