

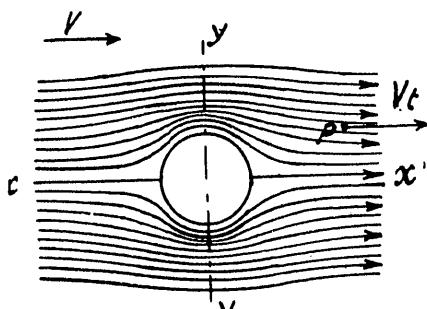
AVIACIÓN

Aplicaciones aerodinámicas de la representación conforme

Las siguientes líneas han sido inspiradas en una de las conferencias dadas en el Curso de Aviación de la Escuela de Ingenieros de Caminos, por D. Alberto Laffón.

Nos proponemos exponer de una manera elemental cómo puede abordarse el cálculo de la fuerza resultante de la acción del viento sobre un ala de las corrientemente usadas en los aparatos de aviación. Joukowski, en su célebre obra de *Aerodinámica* (1), establece un teorema fundamental, solución general del problema que nos ocupa, haciendo depender aquella resultante, entre otras variables, de la *circulación de velocidades* a lo largo del contorno de la sección transversal del ala. Toda la dificultad de aplicación de este teorema estriba en la determinación de esta circulación de velocidades, y para alcanzarla se acude al método de la *representación conforme*, que resuelve el problema en los casos prácticos más interesantes, pues se puede demostrar fácilmente (2) que, transformando conformemente un contorno, la circulación a lo largo del transformado es igual a la circulación en el contorno primitivo.

Imaginemos un cilindro de revolución de longitud infinita, sumergido en una corriente plana, de traslación simple, siendo el fluido incompresible y el régimen estacionario, siendo la velocidad en el infinito V_0 y el eje del cilindro perpendicular a la dirección de la corriente; la figura 1.^a indica la forma que con arreglo a la teoría toman los filetes fluidos cuando

Fig. 1.^a

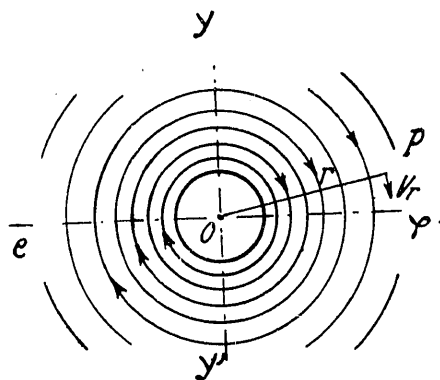
se trata de un fluido perfecto, o sea de viscosidad nula. Como la presión p y la velocidad V en un punto cualquiera de la corriente están ligados por la conocida ecuación de Bernoulli

$$\frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2} = \text{constante}$$

siendo ρ la densidad del fluido, y la variación de distancia entre dos filetes próximos da idea de la variación de velocidad, resulta que cuanto más próximos estén los filetes más crece su velocidad y, como consecuencia, más disminuye la presión.

Para puntos muy alejados del cilindro, la velocidad de un punto P , bien de la zona anterior o posterior, es un vector V_t equipotente del vector fijo V_0 . La corriente es simétrica con respecto a los dos ejes xx' e yy' . Por tanto, la resultante de las acciones elementales del fluido sobre el cilindro es nula.

Coloquemos ahora el mismo cilindro de revolución en una corriente de remolino (1) (fig. 2.^a) tal, que

Fig. 2.^a

una partícula fluida cualquiera describa una circunferencia de centro O y radio r , y cuya velocidad de giro sea

$$\omega_r = \frac{h}{r}$$

inversamente proporcional al radio. Las líneas de corriente son circunferencias de centro O , y las líneas equipotenciales, rectas partiendo del mismo punto. La corriente también resulta simétrica respecto a los dos ejes xx' e yy' , y, como en el caso precedente, la resultante general de las acciones elementales del fluido sobre el cilindro, es también nula.

Pero la característica esencial de este régimen de corriente es lo que se llama *circulación*. Este concepto es un caso particular del general de integral de un vector a lo largo de un circuito, cuando este vector es una velocidad.

Si trazamos un contorno cerrado (simplemente conexo) en el plano de la sección recta del remolino y encerrando el cilindro, la circulación a lo largo de este contorno viene definida por la integral curvilínea

$$I = \int_C V \cos \theta \, ds$$

siendo V la velocidad del fluido en un punto P de este contorno, θ el ángulo de V con la tangente orientada en el sentido del remolino, trazada por el punto P al contorno, y ds el arco elemental del mismo. Esta definición es homóloga de la de trabajo de una

(1) Traducida al francés por Drzewiecki. París, 1916.
(2) Joukowski: Libro citado.

(1) Casares Bescansa: *Mecánica general*, página 188. Madrid, 1921.

fuerza a lo largo de una curva cerrada o circuito, sin más que reemplazar las nociones de circulación y velocidad por las de trabajo y fuerza.

En el caso de la corriente de remolino que nos ocupa, la circulación vale

$$I = \tau h \pi$$

expresión que se encuentra fácilmente tomando por contorno precisamente una de las circunferencias de las descritas por un filete fluido.

Resumiendo: el movimiento estudiado define un remolino de eje O y cuya intensidad es la circulación I , y según un teorema de Stokes, si un circuito encierra varios ejes de remolinos, la circulación a lo largo del mismo es la suma algebraica de las circulaciones de los remolinos que encierra.

Superpongamos ahora los dos movimientos anteriores. Esta superposición equivale a admitir una velocidad V_0 en un punto cualquiera P (fig. 3.^a), resultante de las velocidades V_i y V_r . Los filetes fluidos afectan la forma indicada, y de las simetrías observa-

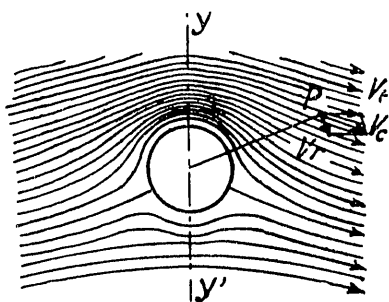


Fig. 3.^a

das en los movimientos componentes sólo queda la del eje yy' en cuya dirección aparece una resultante.

Aplicando el principio de la composición de velocidades, fácilmente se ve que por encima del cilindro las velocidades se suman y por debajo se restan, geoméricamente. Aplicando como precedentemente el teorema de Bernoulli, se deduce que por encima del cilindro existe una zona de depresión y por debajo una zona de presión, sumándose los efectos de ambas zonas. Resulta, pues, que dos corrientes que independientemente la una de la otra son incapaces de producir efecto alguno sobre el cilindro, superpuestas dan origen a una resultante. (En todo lo anterior hemos partido del supuesto indicado al principio, de tratarse de cuerpos de envergadura infinita, a fin de poder suponer la absoluta igualdad de condiciones en todas las secciones planas paralelas a la estudiada, no apareciendo los efectos de los remolinos marginales, que, en definitiva, dan una resultante opuesta a la general, por lo que en la práctica se tienen en cuenta—ante la dificultad de abordar su estudio teórico con resultados prácticos—afectando ésta, de un coeficiente menor que la unidad—coeficientes marginales—. Y las fórmulas indicadas, lo mismo que las que citemos a continuación, están referidas a la unidad de longitud, en el sentido de la envergadura.)

El teorema de Joukowski, a que al principio nos hemos referido, y cuya demostración omitimos por considerarla fuera del objeto de estas líneas, nos dice que:

«En una corriente cuya velocidad en el infinito es V_0 y en la cual se halla sumergido un contorno de

forma cualquiera, siendo la circulación a lo largo del mismo igual a I , la resultante de las presiones del fluido sobre el contorno es igual al producto del vector V_0 , por la circulación y por la densidad del aire.

$$\text{Fuerza resultante} = R = \rho IV_0$$

Obteniéndose la dirección de esta fuerza, haciendo girar 90° el vector V_0 , en sentido inverso al de la circulación.»

Con lo que habíamos indicado, si los perfiles aerodinámicos fuesen de sección transversal circular, podríamos hallar la circulación I (fijados los puntos del contorno de velocidad nula A y C , mediante la fórmula $I = 4\pi V_0 \sin \theta$), y, por tanto, la fuerza sustentadora. Y para reducir todos los casos a éste se aplica la teoría de la *representación conforme*.

Recordemos algunas propiedades de las funciones de variable compleja. Todo punto del plano queda determinado por un número complejo de la forma

$$z = x + i \cdot y$$

eligiendo un sistema de coordenadas, que en lo sucesivo adoptaremos cartesianas. Formemos una función $f(z)$, y agrupando los términos reales e imaginarios tendremos:

$$f(z) = \varphi + i \cdot \Psi$$

siendo φ y Ψ funciones de x e y . Representando este nuevo número complejo un punto de otro plano, a cada uno del primero (plano de la variable z) corresponderán uno o varios de este último (plano de la función); se necesitan, pues, dos planos para la representación de esta clase de funciones, que por comodidad y sencillez muchas veces se superponen.

Si las funciones φ y Ψ cumplen en un punto z_0 las llamadas ecuaciones características de Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \Psi}{\partial y} \quad \frac{\partial \Psi}{\partial x} = -\frac{\partial \varphi}{\partial y} \quad [1]$$

la función se llama monogénea o de derivada única en z_0 , llamándose *analítica* en un recinto cuando en todos los puntos de éste cumple con esa condición. Los puntos en que estas ecuaciones características no se cumplen, se llaman *singulares*.

Y si una función es monogénea en un punto para el que no sea nulo el valor de $f'(z)$, se demuestra (1) que las transformadas de dos curvas que pasan por este punto en el plano de la variable, en el plano de la función conservan los ángulos, y si como caso particular las curvas del plano z se cortan octogonalmente, sus transformadas en el plano de $f(z)$ también se cortan en ángulo recto. La transformación es, pues, *isogonal*.

Y por conservarse la forma de las figuras elementales, recibe el calificativo de *conforme* la transformación realizada con arreglo a lo antes expuesto, que dejará de serlo, por lo últimamente dicho, en los puntos en que se anule la derivada de la función.

Por tanto, dados dos recintos G y G' , efectuar la representación conforme de uno sobre otro es esta-

(1) Rey Pastor: *Resumen de la teoría de funciones analíticas y sus aplicaciones físicas*. Buenos Aires, 1918.

blecer una correspondencia biunívoca e isogonal, sin excepción, entre los puntos de ambos.

Los ejemplos más elementales de representación conforme nos lo dan la igualdad ($f(z) = z$), la homotecia ($f(z) = Kz$; K , real y positivo), la inversión ($f(z) = \frac{1}{z}$). Fijándonos, por ejemplo en la homotecia, si a z la obligamos en su plano a recorrer una circunferencia ($|r| = r^2 = x^2 + y^2$), $f(z)$ recorrerá otra de radio Kr . Ejemplos de lo mismo nos lo dan el dibujante que para ampliar un cuadro establece en él una cuadrícula que a distinta escala reproduce en el ampliado, la imagen que un espejo cóncavo o convexo da de un objeto real.

Pasando al objeto que perseguimos, Riemann demostró que, dado un recinto simplemente conexo G , existen infinitas funciones, regulares en todo él que lo transforman conformemente en un círculo; y cada función está determinada dando tres puntos del contorno con sus tres homólogos en la circunferencia, o bien dando un punto interior como homólogo del centro del círculo y un punto de contorno, como homólogo de uno de la circunferencia.

Pero el problema directo, así presentado, que constituye el conocido de Dirichlet, es de una dificultad muchas veces insuperable, por lo que generalmente se procede a la inversa: dada una función analítica, ver qué representación conforme verifica, pudiéndose así llegar, por repetidos tanteos, a encontrar una función tal que transforme conformemente en círculos los perfiles que nos interesen.

Para los dos casos más interesantes en aerodinámica, los estudios de Kutta, Joukowski y Tchapliguine, han puesto a nuestra disposición las fórmulas necesarias para realizarla, bien que procediendo a la inversa, es decir, no conociendo del perfil a estudiar más que la idea general de su forma, llegándose a precisar ésta—con los necesarios tanteos—al transformar circunferencias en su primitivo perfil.

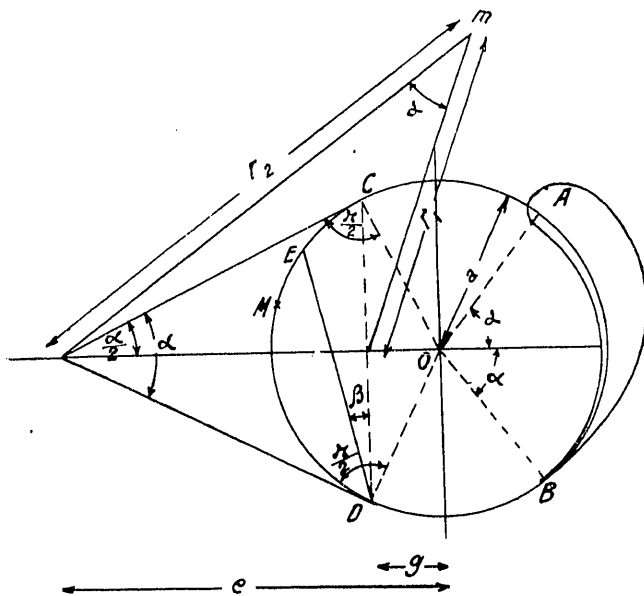
Son estas dos clases los perfiles de ala, tipo de ala de pájaro o en arco de circunferencia, una, y los per-

cuyos parámetros cumplan con las condiciones

$$c \neq 0; \quad a \neq 0; \quad a^2 = e \cdot g$$

Con ella el valor de la relación de la velocidad en el infinito en la circunferencia transformada, a la misma en el perfil primitivo—parámetro de la representación obtenido dando a z valores infinitamente grandes—resulta $\frac{a}{g}$.

Con objeto de poder proceder metódicamente en los tanteos, llevando de antemano una idea de la forma general del perfil, se demuestra—facilísimamente estudiando las dos figuras en coordenadas polares—que (fig. 5.^a), tomando un punto cualquiera M , en

Fig. 5.^a

la circunferencia de radio a , y centro el origen de coordenadas, en la representación, en la figura primitiva este punto está situado en el arco AB determinado en la forma indicada, cuya representación conforme es, por tanto, la circunferencia de radio a , correspondiéndose los puntos A y B del primero con los C y D de la segunda, respectivamente.

Con lo cual, trazando las circunferencias transformadas, tangentes exteriormente en el punto D a la fundamental, el perfil primitivo, arrancando de B con un punto singular de ángulo cero, envolverá al arco AB .

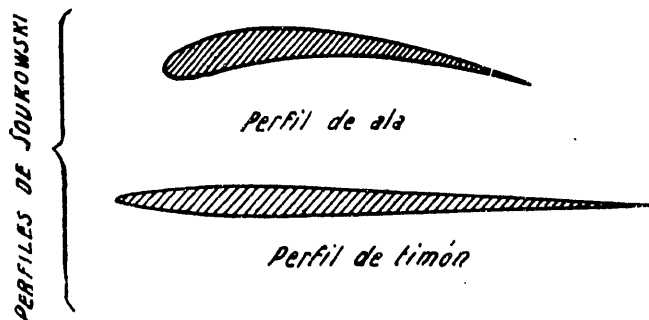
Para el paso de puntos de la representación conforme a los correspondientes del perfil primitivo, se comprueba rápidamente que fijándolos por coordenadas polares, los radios vectores están relacionados por la igualdad

$$r' = \frac{g}{a} r \frac{r_2}{r_1}$$

en la que

r' radio vector del punto del perfil primitivo.
 r radio vector del punto de la representación.
 r_2 y r_1 , las distancias acotadas en la figura.

obteniéndose su orientación, con hacer girar en sentido positivo al del punto de la representación un ángulo igual al α formado por r_1 y r_2 .

Fig. 4.^a

files de timones, la otra; las formas generales indicadas en la figura 4.^a

Para la primera clase se deben los primeros estudios a Kutta, quien obtuvo la transformación con dos representaciones conformes; pero a continuación indicamos un proceso mucho más sencillo, debido a Tchapliguine (1).

Empleemos una representación conforme con la función

$$f(z) = \frac{g}{a} z \frac{z+e}{z+g}$$

(1) Joukowski: Lib. citado.

Transformado el perfil en circunferencia—operatoriamente procediendo a la inversa—, nos queda por determinar la situación de los puntos de la última de velocidad cero, que nos permitirán fijar las carac-

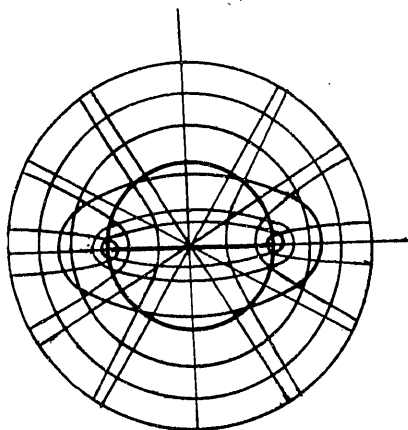


Fig. 6.a

terísticas del movimiento simple de remolino, que compone el de la corriente en que este perfil circular está sumergido.

Uno de ellos deberá ser—para que luego el contorno del perfil pueda ser línea de corriente—el punto singular D de la transformada. Trazando, pues, por él una cuerda DE , paralela a la dirección de la corriente—recordemos la propiedad de la representación conforme de conservar los ángulos—que vendrá, por tanto, determinada por su ángulo con una orientación fija cualquiera, por ejemplo, el eje vertical—ángulo β —, los puntos D y E intersecciones de ésta, con la circunferencia transformada, serán los buscados y nos darán las características necesarias, de lo que deduciremos el valor de la circulación.

Aplicando lo anterior al caso definido de una circunferencia de radio b , tangente en D , a la circunferencia a , el valor de la fuerza resultante, por la aplicación del teorema de Joukowski, será, hechas las necesarias sustituciones,

$$R = 4\pi\rho b \frac{a^2}{g^2} \sin \frac{\alpha}{2} \sin \left(\frac{\alpha}{2} + \beta \right) \cdot V_o^2$$

Llamando S a la superficie del ala, tomándola aproximadamente igual a

$$2 \cdot a \cdot \sin \alpha$$

resulta

$$R = KSV_o^2$$

siendo

$$K = \rho \left(2\pi b \frac{a}{g^2} \right) \sin \left(\frac{\alpha}{2} + \beta \right)$$

Para los perfiles de timones, Joukowski emplea la función

$$f(z) = \frac{1}{2} \left(z + \frac{a^2}{z} \right)$$

que da para valor de la relación entre las velocidades en el infinito, en la circunferencia transformada y en el perfil primitivo, 2.

Recordando lo dicho al principio, que si partimos de dos haces de líneas que se cortan ortogonalmente, la representación conforme nos da otros dos haces, que también ortogonalmente se cortan; en este caso

particular se comprueba que si en el plano de la representación conforme formamos una cuadrícula de circunferencias concéntricas—la menor de radio a —y radios de éstas, con arreglo a la fórmula indicada, corresponden en el plano primitivo a elipses homofocales—de distancia focal igual a $2a$ —, cuya representación son las circunferencias, siéndolo del diámetro la circunferencia fundamental de radio a —e hipérbolas también homofocales, entre sí y con las anteriores—, cuyas asíntotas se confunden con los radios que son su representación.

Con lo que tenemos dos cuadrículas fácilmente construibles, que rápidamente nos permiten, por puntos, pasar el perfil circular (en el plano de la representación conforme, cuadrícula de circunferencias y radios) a obtener el perfil primitivo (en la cuadrícula de elipses e hipérbolas homofocales).

Si tomamos circunferencias tangentes exteriormente a la fundamental en el punto A —representación éste y el B de los extremos del diámetro en el plano primitivo—el perfil primitivo tendrá en A un punto singular de ángulo cero y envolverá—simétricamente al eje horizontal—al diámetro AB .

Fijada ya una circunferencia de determinado radio b , tangente exteriormente en A a la fundamental, para determinar el valor de la circulación a lo largo de ella, igual al mismo valor a lo largo del perfil primitivo, tendrán que fijarse los puntos de velocidad nula en su contorno, de los que teniendo que ser el uno el A , por la razón ya indicada anteriormente,

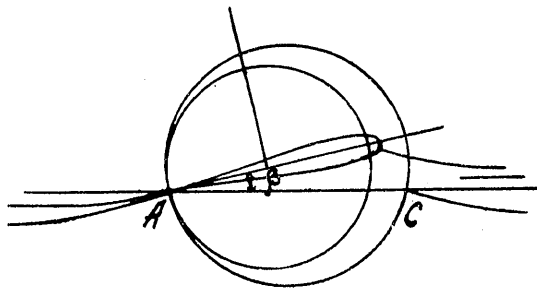


Fig. 7.a

vendrá determinado el otro por la intersección con la circunferencia transformada, de la cuerda AC , que pasando por A , sea paralela a la dirección de la corriente fijada por su ángulo, por ejemplo, con el eje horizontal β .

Aplicando al caso el teorema de Joukowski, la fuerza resultante vendrá dada por

$$R = 8\pi\rho b \sin \beta \cdot V_o^2$$

Llamando S a la superficie del perfil, tomándola aproximadamente igual a $2 \cdot a$, resulta

$$R = KSV_o^2$$

siendo

$$K = \rho \cdot 4\pi \frac{b}{a} \cdot \sin \beta$$

Si recordamos el valor de K obtenido en el caso anterior, vemos que ambos son de la forma general

$$K = \rho \cdot \text{constante} \cdot \sin (\beta + \text{constante})$$

Diciembre, 1925

Guillermo SERRA-ANDREU ANDREU
y José CALABRÚS RÍSQUEZ
Alumnos de la Escuela de Caminos