

mayor tamaño, 1 a 5 cm, para hacer la compresión en una sola capa. Debido al tamaño mayor de la piedra y a que el hormigón se emplee muy seco, el acabado es difícil. Se hace apisonando con una pieza de madera muy pesada manejada desde los costados y pasando un rodillo ligero (fig. 5.^a). La operación es delicada, pues si refluye demasiada pasta, queda mal unido el hormigón y los vehículos le hacen desaparecer rápidamente.

Como dato curioso de la manía de patentes extendida en todos los países, y que las Administraciones conceden con ligereza, diremos que la Sociedad Soliditit francés ha obtenido una de dichas patentes, que consiste en colocar en las juntas chapas delgadas de palastro que no llegan a la superficie, procedimiento muy extendido en nuestro país y quizás en varios otros.

Muy interesante resulta el afirmado hecho en París en la calle de Lieja, pues por haber una casa en construcción fué preciso hacer el hormigón en la forma indicada en la figura 6.^a, y no se conoce apenas la junta longitudinal. No menos interesante será el resultado del firme de la figura 7.^a, por existir una vía de tranvía.

La superioridad del hormigón de alta resistencia sobre el corriente se demuestra con claridad en el Cours Albert I de París. Construídos al mismo tiempo, tiene el afirmado de hormigón corriente grietas y degradaciones en las juntas, en tanto que el afirmado de hormigón de alta resistencia se encuentra en perfecto estado.

En climas tan extremados como en Argelia se estudia la ejecución del hormigón bajo cobertizos móviles, para defenderlos tanto de los rayos solares como de las lluvias torrenciales. Durante la noche se protege el hormigón fresco cercándolo con alambrada, para evitar que los ganados pasen sobre él, pues las huellas que dejan son difícilísimas de borrar.

Para resumir lo anteriormente expuesto, creo deber decir que, a mi juicio, los afirmados de hormigón de cemento de alta resistencia constituyen, técnica y económicamente, una solución excelente para pavimentos de calles y carreteras. Sin embargo, en las aplicaciones que van a hacerse en nuestro país hay que tener en cuenta que nuestro tráfico es en algunas ocasiones de tal naturaleza, que no hemos visto nada igual en los países que hemos visitado, y pudiera suceder que la prueba en tales casos no resultase satisfactoria. Conviene, pues, empezar los ensayos por calles y tramos de carretera que teniendo tráfico intenso no esté compuesto más que en proporción reducida de carros excesivamente cargados y con llantas estrechas, pues si los resultados corresponden a las esperanzas, más adelante puede extenderse el sistema a los tramos por donde circulen en gran cantidad los carros pesados.

Sería también conveniente estudiar la ejecución de empedrados con morteros de cemento de alta resistencia, tanto para prolongar su duración, como para poder permitir el tránsito en breve tiempo.

Manuel AGUILAR

Profesor de la Escuela de C., C. y P.

El golpe de ariete en las tuberías

I

Un vistazo a la historia del problema

Desde que se construyeron tuberías para conducir y distribuir agua, se observó que las maniobras para regular el gasto de los orificios preparados para tomarla provocaban variaciones de presión repentinas y muchas veces considerables. De un modo inmediato se dió una explicación burda del fenómeno: la columna de agua, en marcha para llegar al orificio de salida, había de detenerse bruscamente al encontrarlo cerrado, y esta detención brusca originaba un choque de la masa líquida contra las paredes del recipiente que la encerraba, como un callejón sin salida. El resultado del choque era un aumento de presión que provocaba el rechazo de la columna líquida hacia atrás, hasta que detenía su movimiento.

Para evitar consecuencias funestas del fenómeno, que llegaban muchas veces hasta la rotura del tubo, se imponía una gran lentitud en las maniobras de apertura y cierre de los orificios y precauciones minuciosas para evitar el almacenamiento de aire, en bolsas o burbujas, intercaladas en la masa líquida que, al llegar a los orificios, salieran repentinamente, dejando un hueco donde se precipitara la columna líquida, que, al colmarlo, provocaría el *golpe de ariete*.

Pero en cuanto hubo que regular el gasto de las tuberías con premura impuesta por necesidades de otro orden (para evitar que los motores impulsados

por el chorro de salida se acelerasen peligrosamente, al quedarse descargados, por ejemplo) ni aquella grosera explicación, ni la práctica de los cierres lentos podía bastar, y los técnicos hidráulicos hubieron de dedicarse a la averiguación minuciosa de las circunstancias todas del fenómeno y al cálculo de las cantidades que entran en juego al producirse.

Las investigaciones antiguas, que se habían hecho sin grandes propósitos especulativos, se intensificaron, y multitud de físicos, matemáticos e ingenieros acometieron la resolución del problema del *golpe de ariete*. Entre los autores de conocidos trabajos publicados acerca del tema, descuellan nombres ilustres como los de Castigliano, Resal, Michaud, Pateau, Boussinesq y otros muchos esclarecidos ingenios.

Mas, por lo que se infiere, el problema era intrínscado, antes de ser resuelto por primera vez, como sucede con muchísimos problemas, entre los cuales debe incluirse el de poner de pie un huevo, y una solución que pueda calificarse de completa no se obtuvo hasta que lo acometió el ingeniero Lorenzo Allievi, el cual, para el caso corriente de una tubería de salto de agua única, alimentada por un depósito superior, dió una solución clara y definitiva.

En las notas de Allievi, verdaderamente magistrales y encantadoras por la forma en que se sirve del instrumento matemático, faltan, sin embargo, las consideraciones pertinentes al caso de haberse injertado, en la parte inferior de las tuberías, chimeneas de equilibrio o depósitos de aire comprimido, amor-

tiguadores de las sobrepresiones, a guisa de cojines elásticos, y además Allievi planteó desde luego el problema con omisión deliberada de la influencia de las pérdidas de carga causadas por viscosidad del líquido y rozamiento con las paredes del tubo, la cual en algunos casos debería considerarse.

Otros autores han abordado estos casos y fenómenos secundarios; pero la mayoría de los que conozco, franceses, muestran empeño en partir de los antiguos supuestos e investigaciones de sus compatriotas, en vez de embocar los problemas por la puerta que señaló Allievi, que es la francamente abierta para llegar a su resolución, con lo cual incurren en algunas inexactitudes. Parece desprenderse de sus esfuerzos un deseo pueril de acoplar el avance del saber, en este particular, a lo que ellos llaman *ciencia francesa*, casando dos palabras que encierran conceptos que no pueden ser más dispares y heterogéneos. ¡Como si el unir a dos hombres a un mismo artificial cuerpo político les hiciera copartícipes en el brillo de un entendimiento agudo o en el mérito de una buena voluntad!

Me propongo tratar en este artículo de algunos casos relativos al golpe de ariete con amortiguadores de las sobrepresiones por aire comprimido o por chimeneas de equilibrio, señalando una pauta para plantear y resolver cada problema y comentando algunas particularidades de cada caso, en los límites restringidos de un artículo periodístico.

Ondas hidráulicas en tubería única

Sabido es que la compresibilidad del líquido, la dilatabilidad de las paredes de un tubo y la inercia de la masa material son causas de que una variación de presión o velocidad en un régimen permanente de un flujo dentro de un tubo en servicio, se propague en forma de ondas que progresan a lo largo del eje de la tubería, desde el punto donde el régimen permanente ha sido perturbado. La onda simple se refleja en aquellos puntos donde exista una solución de continuidad en las características del tubo y toda alteración, de régimen variable, puede analizarse en dos ondas, directa y refleja, de sentidos de propagación contrarios.

Se llega a estas conclusiones, despreciando la influencia en el fenómeno de las pérdidas de carga, estableciendo ecuaciones generales del movimiento variado. Las ecuaciones elementales, aplicables a una rebanada de tubo de longitud infinitamente pequeña, fueron planteadas por Allievi en la forma siguiente:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = g \left[\frac{\partial y}{\partial x} \right] \quad [1]$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{g}{a^2} \frac{\partial y}{\partial t} \quad [2]$$

con los significados literales siguientes:

Una sección de la tubería queda determinada por la coordenada lineal x , distancia a partir de un punto fijo, medida a lo largo del eje.

La presión en la sección (supuesta uniforme en toda ella) se cuenta en metros de agua por la cifra y . v es la velocidad de la corriente líquida en el punto x y en el instante t .

Por último, a es una velocidad constante, característica del tubo, como luego diremos.

La ecuación [1] expresa que el impulso de la pre-

sión resultante sobre la masa de la rebanada produce la variación respectiva en la cantidad de movimiento: es la ecuación dinámica.

La ecuación [2] expresa que, a pesar de dilatarse la pared del tubo y encogerse el volumen de agua comprimido, no se producen huecos en la masa líquida: es una ecuación de continuidad de la materia.

Las ecuaciones diferenciales antedichas se integran por las expresiones generales

$$y = y_0 + F\left(t - \frac{x}{a}\right) + f\left(t + \frac{x}{a}\right) \quad [3]$$

y

$$v = v_0 - \frac{g}{a} \left[F\left(t - \frac{x}{a}\right) - f\left(t + \frac{x}{a}\right) \right] \quad [4]$$

siendo las constantes de integración v_0 e y_0 , los valores iniciales de v e y .

Con esta base Allievi desenvuelve, agotando enteramente el asunto, la aplicación de estas fórmulas al caso de variarse el régimen en un tubo alimentado por un depósito de nivel constante y cuyo gasto se modifica obturando más o menos el orificio de salida.

Una onda se engendra por regulación del gasto en ese punto, y se lanza a lo largo del tubo hacia el depósito. Esta onda directa viene representada por la función $F\left(t - \frac{x}{a}\right)$. Se traslada, por tanto, con la velocidad a ; porque para valores de x que crezcan como el producto at , la variable compuesta $\left(t - \frac{x}{a}\right)$ tiene un valor fijo.

Del hecho de llegar a un depósito de nivel constante esta onda, se deduce que la onda reflejada $f\left(t + \frac{x}{a}\right)$ debe ser igual y de sentido contrario a la incidente F , para que la suma de ambas, según la expresión [3], permanezca igual a cero; porque en el depósito no pueden existir, por hipótesis, sobrepresiones.

Falta determinar en cada caso la forma de F y nos valemos para ello de la condición límite de la relación, en la boquilla, de la presión a la velocidad, ligadas por la expresión conocida de que

$$v_1^2 = 2g y$$

siendo v y v_1 (velocidades en el tubo y en el área de la boquilla) entre sí inversamente, como las áreas respectivas.

El problema queda, pues, resuelto; pero con una complicación de fórmulas enojosa. El trabajo meritorio de Allievi se completa investigando formas algebraicas y métodos gráficos muy sencillos para el cálculo completo, de las circunstancias todas del fenómeno en todos los casos. Para ello cuenta el tiempo con la unidad igual a la duración del viaje de la onda en ida y vuelta desde la boquilla al depósito, acumula todas las circunstancias del caso en un coeficiente constante ρ , y busca el valor, no de las cantidades absolutas, presión, velocidad, área abierta en la boquilla, sino de las relaciones de estos valores variables a los iniciales.

Las fórmulas y métodos de Allievi comprenden todos los casos de apertura y cierre, variados según leyes cualesquiera y alternados periódicamente o detenidos en cualquier instante: todos los fenómenos

de resonancia susceptibles de producirse en la con práctica.

Reflexión de las ondas hidráulicas

En definitiva, una onda hidráulica, en un tubo donde hasta el momento circulaba un caudal en régimen permanente, calculada con dejación del rozamiento y viscosidad del líquido, supone que, en la región del tubo afectada, la velocidad varía con la sección y con el tiempo, y la sobrepresión, en cada punto del eje del tubo, es igual a la diferencia entre la velocidad del régimen permanente y la instantánea alterada por la onda, multiplicada esa diferencia por el

factor $\frac{a}{g}$, siendo

$$\frac{1}{a^2} = \frac{m}{g} \left(\frac{1}{\epsilon} + \frac{1}{E} \cdot \frac{D}{e} \right)$$

fórmula en la cual a es la velocidad de traslación de la onda; m , el peso específico del líquido; ϵ , el coeficiente de elasticidad cúbica del líquido; E , el mismo coeficiente lineal de la materia de que está hecho el tubo, cuyo diámetro es D , y el espesor de pared e .

Si la onda, progresando con velocidad uniforme por el tubo, llega a un punto en que, repentinamente, cambian sus características (diámetro o espesor de la pared) se produce la alteración consiguiente.

Como el gasto es igual a un lado y otro del punto de transición, las variaciones de la velocidad del líquido en ambos trozos serán desiguales. Asimismo será diferente la manera de responder la dilatación de la pared a la sobrepresión transmitida por la onda, que depende del diámetro y espesor del tubo. Si supusiéramos que la onda salvaba, sin deformación, el punto de tránsito, como a y v son distintas en un trozo del tubo que en el otro, y la relación entre v y y debe conservarse, tendría que haber un punto de discontinuidad, en la sobrepresión, en el punto de transición.

Pero como la sobrepresión es única, evidentemente, en cada punto y su variación continua, para satisfacer a las ecuaciones diferenciales [1] y [2], a la onda directa que avanza, representada por la función

$$F\left(t - \frac{x}{a}\right), \text{ debemos añadir, en la región anterior,}$$

desde el instante en que la onda directa incide en el punto singular, la función $f\left(t + \frac{x}{a}\right)$ de otra onda:

que retrocede con la misma velocidad a , puesto que la variable compuesta permanece igual para valores de x que den una suma constante con $-ta$. Es la onda reflejada.

Ilamaremos V e Y a las funciones: variación de la velocidad y sobrepresión, a partir del régimen permanente, con los subíndices d , r y c , según se trate de la onda directa incidente, la onda reflejada o la onda consiguiente más allá del punto de transición; s_1 y s_2 , a_1 y a_2 a las áreas de las secciones del tubo y velocidades de traslación de la onda, antes y después de aquel punto.

Tendremos:

$$Y_d + Y_r = Y_c \quad [5]$$

$$(V_d - V_r)s_1 = V_c s_2 \quad [6]$$

$$Y_d = \frac{a_1}{g} V_d$$

$$Y_r = \frac{a_1}{g} V_r$$

$$Y_c = \frac{a_2}{g} V_c$$

De [5] y [6] se deduce, considerando las relaciones forzosas que hemos escrito a continuación,

$$Y_r = Y_d \frac{\frac{s_1}{a_1} - \frac{s_2}{a_2}}{\frac{s_1}{a_1} + \frac{s_2}{a_2}} \quad [7]$$

$$Y_c = Y_d \frac{2 \frac{s_1}{a_1}}{\frac{s_1}{a_1} + \frac{s_2}{a_2}} \quad [8]$$

Hay dos casos cuya resolución puede también hacerse directamente, con suma facilidad, que entran en estas fórmulas:

1.º Reflexión en un depósito de nivel constante: $s_2 = \infty$, $a_2 = 0$

$$Y_r = -Y_d, Y_c = 0$$

de donde $V_r = V_d$.

2.º Reflexión en un extremo de tubo cerrado: $s_2 = 0$

$$Y_r = Y_d$$

con $V_r = V_d = V_c = 0$.

Cálculo del golpe de ariete con hipótesis variadas

Dos hipótesis simplificadoras admite Allievi:

1.º Que el tubo esté uniformemente dimensionado en toda su longitud.

Como el caso práctico para el que se realiza este estudio (el de tuberías para fuertes presiones en los saltos de agua) no cumple, casi nunca, con la condición hipotética, Allievi admite un promedio de espesor y diámetro en toda la longitud del tubo. Pero estos valores sintetizan sus efectos en la constante a , y para elegir el promedio, Allievi recomienda calcular el tiempo de recorrido de la onda, en cada trozo uniforme, sumar estos tiempos parciales de todos los trozos y deducir del tiempo de recorrido de todo el tubo una velocidad media que se introduce en el cálculo, en vez de a . Textualmente declara Allievi

que gracias a la constancia supuesta de $\frac{D}{e}$, a lo

largo de la conducción, pueden integrarse las ecuaciones [1] y [2]. Esta afirmación no es enteramente exacta: las ecuaciones pueden siempre integrarse, pero los valores iniciales y límites que determinan a las funciones integrales deben referirse a trozos de relación constante. Al pasar de un trozo a su adyacente, las constantes de integración cambian, reflejándose las ondas en parte; pero podrá calcularse el fenómeno, trozo por trozo, a pesar de su complejidad, tomando en cuenta todas las reflexiones parciales.

Al efecto, suponiendo un caso particular de tubería, se determinaría cada valor de a_m y de $\frac{2L_m}{a_m}$

para cada trozo distinto. Se dibujaría la curva de la onda, para la ley de cierre del obturador de que se tratase. Esta curva sería la onda directa hasta el instante $\frac{2L_1}{a_1}$. Desde este instante habría de sumársele la onda que se reflejó en el primer punto de transición, para tener la onda directa en el primer trozo, hasta el instante $\frac{4L_1}{a_1}$.

En el segundo trozo, la primera parte de la onda directa sería la consiguiente a la incidencia de la onda directa, que salvó el primer punto de reflexión, la cual, a su llegada al segundo punto, se reflejaría, a su vez, en parte, y en parte pasaría como primer trozo de la onda directa al tercer trozo. La segunda onda refleja se volvería a subdividir en el primer punto de transición, y la que pasara al primer trozo se sumaría a la primera parte original, a partir del instante $\frac{2L_2}{a_2} + \frac{2L_1}{a_1}$, y así, paulatinamente, podría seguirse la historia de los fenómenos, paso a paso, con una complicación extrema, a la verdad, sobre todo si los tiempos $\frac{L_1}{a_1}$, $\frac{L_2}{a_2}$ eran distintos unos de otros.

M. de Sparre ha calculado el cierre de un tubo, dividido en dos o tres trozos uniformes. Las fórmulas a que llega son complicadas, aunque mucho menos que lo serían los casos prácticos, y de todos modos no dan una diferencia sensible, con las fórmulas de Allievi, en las aplicaciones. Los valores máximos de las sobrepresiones casi no presentan diferencia con los calculados sin tanta complicación, por el promedio de a . La diferencia que se hace notar más recae sobre el tiempo de la oscilación y sobre la fase de las ondas reiteradas, cosa que no tiene la menor importancia práctica, salvo en el estudio de algunas resonancias.

2.º Allievi desprecia sistemáticamente la pérdida de carga por rozamientos internos o con las paredes que encierran el líquido. Afirma que esto en poco puede alterar los resultados; pero conviene apoyar la presunción con alguna comprobación de la influencia real.

Dos casos diferentes pueden tantearse, acerca de esta influencia de las pérdidas de carga, en una onda de sobrepresión.

a) Un tubo fundido de gran longitud, que se monta sobre un perfil que no tiene grandes diferencias de nivel, como sucede en algunos abastecimientos de agua potable. b) Un tubo de inclinación muy apreciable y longitud pequeña o mediana, de palastro de acero, como una conducción ordinaria de salto de agua.

Caso a). En este caso la ecuación diferencial de la dinámica [1] debe completarse con el término correspondiente a la pérdida de carga. Se puede admitir que esta pérdida es proporcional al cuadrado de la velocidad y la ecuación debería ser

$$\frac{\partial v}{\partial x} = cv^2 + \frac{1}{g} \frac{\partial v}{\partial t} \quad [9]$$

completada con la ecuación de continuidad

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{a^2}{g} \frac{\partial v}{\partial x} \quad [2]$$

La integración de estas ecuaciones, con las condiciones límites de cada problema, es muy difícil, cuando no imposible, al menos con funciones sencillas. La dificultad que aporta al problema el término cv^2 radica en que la velocidad de traslación de la onda no es, como habíamos supuesto, la constante a , sino una variable, que depende de la velocidad inicial del fenómeno, en cada punto a donde llega la onda, y de la ley de variación o forma de su frente, derivada del cierre del obturador. Las ondas elementales, dependiendo del término en v^2 , no se suman indistintamente, como en el caso anterior.

Considerando atentamente un frente de onda que recorra un tubo, donde había un régimen permanente, podemos dividirlo en infinitas ondas elementales, sucesivas, cada una con su velocidad propia, de lo que se deduce que ya el fenómeno pierde su carácter geométrico de ondulación traslatoria de forma fija; porque esta forma cambia sin cesar. Si además la onda recorre una corriente perturbada ya de antemano (por otra onda anterior, por ejemplo), ni siquiera es constante la velocidad de la primera onda elemental, y podemos imaginarnos la dificultad de acoplar las funciones integrales a esta condición inicial. En algunos casos podría descomponerse la onda en una serie de otras elementales y se podría componer por caminamiento el frente integral de la onda.

Mas para hacerse idea de la trascendencia, pequeña o grande, de la pérdida de carga en el fenómeno, podemos considerar un frente de onda que no se deforme al avanzar por una corriente permanente, producido por un cierre del obturador que siga una ley tal que compense, en cada instante, la influencia de valor de la velocidad instantánea (que produce aumento de la velocidad de traslación del frente de onda) con la magnitud de la derivada de aquella ley o inclinación local del elemento del frente de onda (que produce disminución en la velocidad de traslación). Sería preciso que el avanzamiento del frente de onda, sobre la corriente permanente, se verificara con una velocidad a , dependiente, claro está, de c .

Calculando en este caso el golpe de ariete con y sin pérdida de carga, se puede inferir la importancia de su efecto.

Para lograr el intento es preciso integrar las ecuaciones [9] y [2] por una función de $t - \frac{x}{a}$ y suponer que la ley de cierre responde a realizar en el punto $x = 0$ la misma función integral.

Pues bien; las ecuaciones [9] y [2] son satisfechas por funciones de esta forma:

$$v = \frac{m}{n + t - \frac{x}{a}} ; \quad y - y_0 = \frac{a^2}{ag} \left(v_0 - \frac{m}{n + t - \frac{x}{a}} \right)$$

Elijamos, para fijar las cifras, el caso siguiente:

Un tubo de hierro fundido, horizontal, de 30 kilómetros de longitud, 60 centímetros de diámetro y 18 milímetros de espesor, en régimen permanente de 2 metros por segundo, se cierra por una llave de manera que al cabo de 6 segundos la velocidad se

ha reducido a 0,50 m : 1'', lanzando una onda de sobrepresión.

Si desdeñamos la pérdida de carga, la onda se traslada con una velocidad

$$a = \sqrt{\frac{9.900}{48,3 + \frac{600}{18}}} = 1.095 \text{ m : 1''}$$

Al cabo de 6 segundos el frente de onda está enteramente formado con una longitud de 9 570 m. La velocidad a esa distancia del origen es todavía de 2 metros por segundo y va paulatinamente descendiendo hasta 0,50 junto a la llave. Si representáramos el frente de onda por una curva con ordenadas iguales al golpe de ariete, en cada instante y cada abscisa, el frente de onda sería una curva hiperbólica

$$y - y_0 = \frac{1.095}{9,8} \left(2 - \frac{L}{2 + t - \frac{x}{1.095}} \right)$$

El máximo del golpe de ariete es 167,71 m, y para reducirlo a límites que no fueran de temer, habría de realizarse una maniobra de cierre mucho más lenta, que diera, por ejemplo, tiempo a regresar la onda reflejada antes de que la directa montara a 1/5 de su valor total, y como el período de la tubería para el recorrido de la onda es cosa de un minuto, se puede coleccionar la lentitud con que se debe maniobrar en estos casos.

Pues bien: con la ley de reducción de la velocidad graduada por la llave que se cierra de modo que la velocidad siga esta fórmula

$$v = \frac{L}{2 + t} \quad \text{entre } \begin{cases} t = 0 \\ t = 6 \end{cases}$$

si se admite en el cálculo pérdidas de carga a razón de $c = 0,003$ que da, para el caso, la fórmula de Lévy para tubos usados, la velocidad de traslación de la onda habría aumentado a 1 114 m : 1'' y el máximo del golpe de ariete sería 164,68 m : un 2 por 100, próximamente, menor que sin pérdida de carga.

Sería un poco más sensible, en relación, la diferencia para un cierre muy lento, haciéndose notar antes la influencia depresiva de la onda reflejada, a causa de la mayor velocidad de traslación, y el golpe de ariete bajaría un tanto.

En resumen: si bien puede decirse que especulativamente, en estos casos de tubos de gran longitud, la influencia del rozamiento podría notarse en cierres lentos e ino cuos, prácticamente esta influencia es despreciable, porque no puede hacer variar las dimensiones de construcción.

Caso b). Si se trata de tuberías de fuerte inclinación debe introducirse, en las ecuaciones diferenciales, el término correspondiente, ya que no puede dejar de considerarse el estado anterior del movimiento, porque la onda que se superpone, en atención al término en v^2 , no se suma simplemente.

La ecuación diferencial de la dinámica sería

$$\frac{\partial y}{\partial x} - cv^2 + c_1 = \frac{1}{g} \frac{\partial v}{\partial t} \quad [10]$$

completada, como siempre, por la ecuación de continuidad [2]. La constante c es, como en el caso a),

la pendiente de la línea de carga, para la velocidad permanente $v = 1$, y c_1 , es el seno del ángulo de inclinación del eje del tubo, sobre el horizonte.

Para integrar estas ecuaciones, con condiciones límites fijas, se tropieza con análogas dificultades que en el caso anterior, y podría repetirse lo que se dijo para el mismo. La velocidad de traslación de todos los puntos del frente de onda no es la misma, y éste se deforma según va progresando a lo largo de la corriente.

Del mismo modo que antes podemos buscar una ley de cierre del obturador, que mantenga constante la velocidad de todas las ondas elementales, integrando las ecuaciones [10] y [2] por funciones de la variable compuesta $z = t - \frac{x}{a}$ y podría escribirse

$$v = v_0 - \varphi(z); \quad y - y_0 = \frac{a^2}{ag} \varphi(z)$$

Sustituyendo las derivadas parciales en [2] la ecuación queda satisfecha, y la [10] se convierte en

$$-\frac{a^2}{a^2} \frac{d\varphi}{dz} - c(v_0 - \varphi(z))^2 + c_1 = -\frac{d\varphi}{dz}$$

Pongamos $\frac{a_2 - a_1}{a_2} = \rho$ y $\left| \frac{c_1}{c} = m \right|$. Tendremos $\rho \frac{d\varphi}{dz} = c[(v_0 - \varphi(z))^2 - m^2]$ que se integra por

$$\varphi(z) = \frac{e^{\frac{cz}{\rho}} (v_0 - m) - K(v_0 + m)}{e^{\frac{cz}{\rho}} - K}$$

y como los valores iniciales nos dan para $z = 0$,

$\varphi(z) = 0$, resulta $K = \frac{v_0 - m}{v_0 + m}$, y, finalmente,

$$\varphi(z) = \frac{v_0 - m}{\frac{e^{\frac{cz}{\rho}} - 1}{e^{\frac{cz}{\rho}} - \frac{v_0 - m}{v_0 + m}}}$$

Un ejemplo nos permitirá, como en el caso anterior, conjeturar con acierto si es trascendental la influencia de la pérdida de carga. Sea una tubería de salto de agua, inclinada uniformemente a 11°32' y de 1 500 m de longitud, con el diámetro de 50 cm y espesor de chapa tal que a sea, por término medio, equivalente a 900 m por segundo. Supongamos que se cierra el regulador en 3 segundos y que la velocidad inicial de 2 m por segundo se anula en el obturador siguiendo una ley que la liga con el tiempo:

$$v = m \frac{\frac{at}{e^{\frac{at}{\rho}}} - \frac{m + v_0}{m - v_0}}{\frac{at}{e^{\frac{at}{\rho}}} + \frac{m + v_0}{m - v_0}}$$

que es poco diferente de las formas de cierre prácticas.

En estos supuestos se tiene: $c = 0,004$; $c_1 = 0,20$; $m = 7,071$; $\rho = 0,02065$; $a = 909,4 \text{ m : 1''}$, y el

máximo valor que alcanza el golpe de ariete es 181,6 m.

Si hubiéramos despreciado la pérdida de carga, el cálculo arrojaría un máximo de 183,67 m, o sea un 1 por 100 más que antes.

En definitiva, desde el punto de vista práctico es inútil hacer intervenir en los cálculos la complicación grande que aporta la consideración del rozamiento, y en lo que sigue, salvo algún detalle, prescindiremos de la pérdida de carga.

Emilio AZAROLA
Ingeniero de Caminos

El convento de Santa Cruz, de Segovia

Trabajos de investigación

En la parte Norte de Segovia, comprendida entre el pie de la muralla y el río Fresma, se alza un monumento interesante que, al estudiarlo, siendo alumno de la asignatura de Arquitectura de la Escuela de Caminos, realicé alguna labor de investigación personal, de la que voy a dar cuenta a los lectores de esta REVISTA.

Bibliografía.—Hablan de esta fundación los cronistas primitivos de la Orden Dominicana, entre ellos, Gerardo Lemovicense (*De vitiis F. F. Praedic.*), escritor del siglo XIII, del que tomó Diego de Colmenares el relato que hace en su *Historia de Segovia*, publicada en 1636 (capítulo XX, párrafo VII).

En el siglo XVIII el P. Navamuel publicó su obra *Cueva de Santo Domingo en Segovia* (Madrid, 1752), que incurre en faltas de ortografía como la del título, por la anarquía existente, hasta que la Academia dictó sus reglas. En estilo conceptuoso habla sólo de historia religiosa.

En el siglo pasado, Carlos Lecea, escribe el folleto *La cueva de Santo Domingo*, y en las Guías de Losáñez y Cuadrado se encuentran referencias de este asunto.

El P. Antonio Carrión publicó un opúsculo dedicado a la *Cueva de Santo Domingo de Guzmán* (Vergara, 1908).

En las modernas Guías de Tormo y Colorado se habla igualmente del Convento de Santa Cruz.

Reseña histórica.—Según Diego de Colmenares, la Orden de Predicadores «fué confirmada por Honorio III en 22 de diciembre de 1216 años», y volviendo a España su fundador, Domingo de Guzmán, obtuvo licencia del Rey Fernando III para fundar en sus reinos. Dedicóse en Segovia a la predicación y al ejemplo, y «hallando a propósito para la aspejeza que profesaba una cueva en unos peñascos cubiertos de bosque entre lo profundo del río y la altura de la ciudad expuestos al frío del Norte», dedicóse en ella a la penitencia.

Incorporadas en poco tiempo varias personas a la Orden, eligió para lugar del Convento las proximidades de la Cueva, y «dejando fundados monasterio e iglesia, la primera fundación de su Orden en España, se dirigió a Madrid, dejando por prelado a Fray Corbalán» (Losáñez, *Vademecum del viajero en Segovia*, Segovia, 1861). Para dicha fundación contribuyó como especial bienhechor Gaspar de Contreiras, cuyos descendientes gozaron el patronato del Convento por espacio de doscientos setenta años. Esto sucedía en 1218.

A fines del siglo XV ocurre en Segovia un acontecimiento trascendental en la Historia de España: la

proclamación de Isabel la Católica, que residía entonces en el Alcázar.

Los Reyes Católicos adoptaron como emblema el yugo representativo de la sumisión al Poder real y el haz de varas, símbolo de la unión de todos y por lema el conocido «Tanto monta».

Se levanta en esta época un nuevo edificio sobre las construcciones del siglo XIII, encargándose de las obras el arquitecto de San Juan de los Reyes, Juan



Fig. 1.ª Portada de la Cueva.

Guas, con recursos abundantes, procedentes de los bienes de los judíos, y era prior del Convento el inquisidor Fray Tomás de Torquemada.

Felipe II mandó hacer el retablo mayor, siendo la traza de Juan de Herrera y la pintura de Diego de Urbina.

En la guerra de la Independencia se quemó este retablo y la techumbre del crucero, y para reparar los daños causados fué preciso vender una peana, regalada por los Reyes Católicos, que representaba la ciudad de Santa Fe con sus murallas, puertas y torreones.