

te que quieren hacer amables las viriles edificaciones.

Las góticas son amplias y multiformes, como la Naturaleza.

La moldura romana es; no se parece a nada: es.

La moldura romana hace unos *standart* de la luz de Atenas para que la puedan disfrutar sus provincias.

* * *

Armonía interior: Mecánica; expresión exterior: color y forma. He ahí la Arquitectura.

Pero, volviendo a la desnudez de su proyecto y al ingenuo pudor del ingeniero: ¿Qué es lo que éste echa de menos en su obra? ¿Qué le falta?

En la fórmula mecánica sólo intervenían fuerzas y números. ¿Pero dónde entraba la variable del color, del lugar de situación? ¿Dónde sus formas? ¿Dónde la luminosidad del aire y, en fin, todo lo que puede ser recogido por el sentimiento y que escapa a la razón y que forma también la obra de arte?

Teniendo en cuenta esos elementos desde el principio de su concepción, es como el ingeniero, arquitecto, hará una obra de arte, una obra bella.

Y si la obra, superior a los individuos y más perdurable que ellos, ha de realizarse con la colaboración de artífices especializados en sus diversos matices, es en ese momento de concebirla cuando debe de comenzar a la *par* el trabajo del ingeniero y del arquitecto para obtener un resultado armonioso.

Enrique COLÁS HONTÁN
Arquitecto

Vigas empotradas en muros

Se procura dar a las vigas maestras que forman parte de los entramados horizontales una fuerte entrega en los muros que las reciben; buscando el empotramiento en ellos, teniendo en cuenta el aumento de resistencia que de este modo se consigue. Como el empotramiento, generalmente, dista mucho de ser perfecto, se calculan a lo sumo como piezas semiempotradas, adoptando un coeficiente medio entre los correspondientes al empotramiento perfecto en la sección de arranque y al apoyo en la sección central, en lo que hace referencia a momentos flectores, de donde

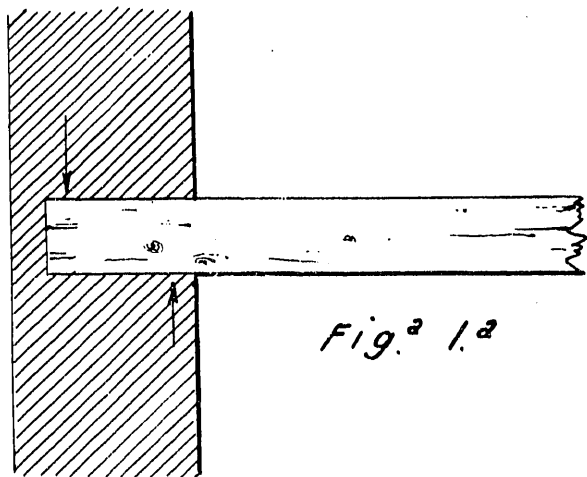


Fig. 1.^a

resulta que todas las situaciones comprendidas entre estas dos extremas se engloban en una sola idea, con una sola palabra, por el arte de magia de un prefijo.

Con lo que sigue tratamos de encontrar los efectos correspondientes a esas situaciones intermedias, para poderlos tener en cuenta en los casos prácticos.

Supongamos (fig. 1.^a) una viga con una entrega suficiente en el muro y tratemos de apreciar la realidad para deducir la hipótesis que nos ha de servir de punto de partida; supongamos aplicada a esta viga una carga, que en lo que sigue supondremos uniformemente repartida; la carga da lugar a reacciones en los apoyos y a la deformación de la viga; la reacción inferior, suponiendo el muro prácticamen-

te incompresible, ha de dar una resultante próxima al paramento, tanto más cuanto más deformable sea la pieza o, lo que es lo mismo, cuanto menor sea su momento de inercia, puesto que la deformación tiende a levantar la cabeza separándola del asiento y aplicándola contra la parte superior del hueco que le sirve de alojamiento; los mismos efectos combinados dan lugar a que la reacción superior dé una resultante muy próxima al extremo de la viga, que es, al mismo tiempo, donde mayor resistencia presenta el muro. En definitiva, «las vigas obran en estos huecos como palancas de primer género», y su estudio elástico se reduce al de una pieza prismática recta apoyada en cuatro puntos simétricos dos a dos y cargada uniformemente en el tramo central.

Ya veremos cómo a esta condición hipotética se le da prácticamente valor real absoluto.

El estudio elástico se hace muy fácilmente en este caso aplicando el teorema de Castigliano en el apoyo extremo izquierdo y descomponiendo la reacción vertical Y en los apoyos intermedios, en dos componentes, una la isostática Y_1 , si existiera solamente el tramo central, y la otra Y_2 que proviene de la existencia de los tramos extremos y que vale precisamente la reacción en ellos, según nos dicen las ecuaciones de la estática

$$2Y - 2Y_1 - pl = 0$$

de donde

$$Y = Y_1 + \frac{pl}{2} = Y_1 + Y_2$$

De la misma manera, representaremos por M_i el momento isostático en los puntos del tramo central.

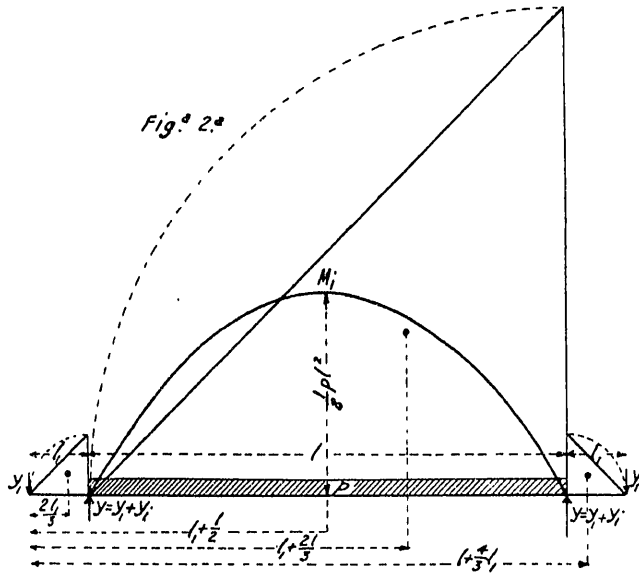
Con estas notaciones, las leyes de variación de los momentos flectores en los tres tramos, tomando por origen de coordenadas el apoyo extremo izquierdo, son las siguientes

$$\begin{aligned} x=0 \} & M = -Y_1 x \\ x=l_1 \} & \\ x=l_1 \} & M = -Y_1 x + Y_1(x-l_1) + M_i = -Y_1 l_1 + M_i \\ x=l_1+l \} & \\ x=l_1+l \} & M = -Y_1 x + Y_1(x-l_1) + Y_1(x-l-l_1) = \\ x=l+l_1 \} & = Y_1(x-l-2l_1) \end{aligned}$$

Y para todas ellas se verifica

$$\frac{dM}{dY_1} = -x.$$

En la aplicación del teorema de Castigliano prescindiremos, como se hace corrientemente, por su in-



significancia, del trabajo debido al esfuerzo cortante de cada punto.

Así, puesto que el recorrido de Y_1 es cero, debe verificarse según dicho teorema que

$$\frac{dT}{dY_1} = 0 = \int_0^{l_1} \frac{Y_1 x^2}{EI_1} dx + \int_{l_1}^{l+l_1} \frac{(Y_1 l_1 - M_i)x}{EI} dx - \int_{l+l_1}^{l+2l_1} \frac{Y_1(x-l-l_1)x}{EI_1} dx$$

o sea

$$0 = Y_1 \int_0^{l_1} \frac{x^2}{EI_1} dx + Y_1 \int_{l_1}^{l+l_1} \frac{l_1 x}{EI} dx - \int_{l_1}^{l+l_1} \frac{M_i x}{EI} dx + Y_1 \int_{l+l_1}^{l+2l_1} \frac{Y_1(2l_1+l-x)x}{EI_1} dx.$$

Haciendo $\frac{l}{I_1} = r$, multiplicando todos los términos por $EI_1 r$, y sacando el valor de Y_1 , resulta

$$Y_1 = \frac{\int_{l_1}^{l+l_1} M_i x dx}{\int_0^{l_1} r x^2 dx + \int_{l_1}^{l+l_1} l_1 x dx + \int_{l+l_1}^{l+2l_1} r(2l_1+l-x)x dx}$$

El numerador de esta fracción es el momento del área del segmento parabólico que da el momento isostático en cada punto y vale, por tanto,

$$\frac{2}{3} \times \frac{1}{8} p l^3 \times l \times \left(l_1 + \frac{l}{2} \right) = \frac{l^4}{24} + \frac{p l^3 l_1}{12}$$

Cada uno de los términos del denominador representa el momento del área del triángulo rectángulo isósceles construido sobre cada segmento como cate-to en los términos extremos y el área correspondiente multiplicada por l_1 , en el intermedio, o sea, respectivamente,

$$r \frac{l_1^2}{2} \times \frac{2}{3} l_1 = \frac{r l_1^3}{3}; \quad \frac{l^2}{2} \times l_1$$

y

$$\frac{r l_1^2}{2} \times \left(l + \frac{4}{3} l_1 \right) = \frac{r l_1^2 l}{2} + \frac{r 2 l_1^3}{3}$$

y su suma nos da el denominador de la fracción, que vale

$$l_1^3 r + \frac{l_1^2 l r}{2} + \frac{l^2 l_1}{2}$$

y, por tanto,

$$Y_1 = \frac{\frac{p l^4}{24} + \frac{p l^3 l_1}{12}}{l_1^3 r + \frac{l_1^2 l r}{2} + \frac{l^2 l_1}{2}}$$

si en esta expresión hacemos $l_1 = 0$, estamos en el caso de empotramiento perfecto del tramo central, pues esto equivale a reducir hasta un infinitésimo la longitud de los tramos extremos o, lo que es lo mis-

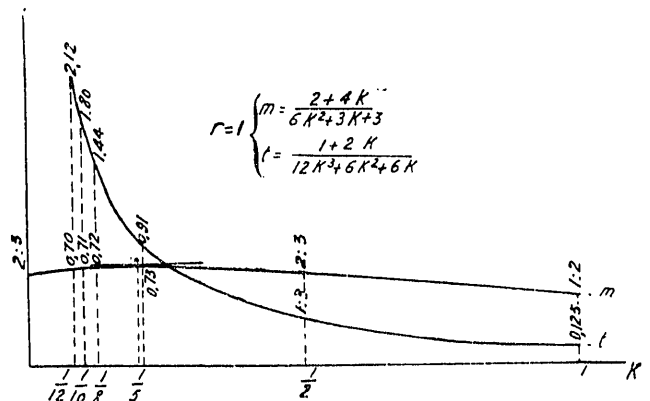


Fig. 3

mo, puesto que la elástica tiene su último elemento invariable, a impedir el giro de la sección de arranque, y entonces se verifica

$$M_i = Y_1 \times l_1 = \frac{\frac{p l^4}{24}}{\frac{l^2}{2}} = \frac{p l^2}{12}$$

como debía de ser, y claro está que ha de resultar, como resulta, $Y_1 = \infty$.

Si en la fracción que nos da el valor de Y_1 hacemos $l_1 = k \times l$, obtendremos

$$Y_1 = \frac{\frac{pl}{24} + \frac{plk}{12}}{k^3r + \frac{k^2r}{2} + \frac{k}{2}} = \frac{pl}{2} \cdot \frac{1+2k}{12k^3r + 6k^2r + 6k}$$

y, por tanto,

$$\frac{Y_1}{Y_i} = l = \frac{1+2k}{12k^3r + 6k^2r + 6k} \quad [1]$$

De la misma manera obtenemos

$$M_1 = \frac{\frac{pl^2}{24} + \frac{2pl^2k}{24}}{k^3 + \frac{k}{2} + \frac{1}{2}} = \frac{pl^2}{8} \times \frac{2+4k}{6k^3r + 3kr + 3}$$

y, por tanto,

$$\frac{M_1}{M_i} = m = \frac{2+4k}{6k^3r + 3kr + 3} \quad [2]$$

fórmulas que han de servirnos de base a la discusión. Supongamos, en primer término, $r = 1$; entonces

$$l = \frac{1+2k}{12k^3 + 6k^2 + 6k}; \quad m = \frac{2+4k}{6k^3 + 3k + 3}$$

que desarrollamos en la figura 3.^a. Para $k=1$ ($l_1 = l$) obtenemos

$$l = \frac{1}{8} \quad \text{y} \quad m = \frac{1}{2}$$

es decir, que la componente Y_1 vale

$$\frac{1}{8} \frac{pl}{2} = \frac{1}{16} pl$$

y entonces, como tenía que ser

$$M_1 = \frac{1}{2} \times \frac{1}{8} pl^2 = \frac{1}{16} pl^2,$$

momento que traslada la parábola de los momentos isostáticos a su posición media y realiza las mejores condiciones de trabajo en la viga.

A medida que l_1 disminuye, el valor de Y_1 aumenta, y el momento M_1 , producto de ambos factores, aumenta hasta cierto valor. Así, para

$$k = \frac{1}{2}, \quad Y_1 \text{ vale } \frac{1}{6} pl$$

y

$$M_1 = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{8} pl^2 = \frac{1}{12} pl^2;$$

es decir, que se precisa dar a la viga una entrega igual a la mitad de su longitud para obtener el em-

potramiento perfecto con una reacción vertical aumentada en $\frac{1}{6} pl$ sobre la isostática.

Hemos dicho que el valor de M pasa por un máximo, que vamos a obtener

$$\begin{aligned} \frac{dm}{dk} = 0 &= \frac{4(6k^2 + 3k + 3) - (12k + 3)(2 + 4k)}{(6k^2 + 3k + 3)^2} = \\ &= \frac{6 - 24k - 24k^2}{(6k^2 + 3k + 3)^2} \end{aligned}$$

y, por tanto,

$$24k^2 + 24k - 6 = 0$$

de donde

$$k = \frac{-4 + \sqrt{32}}{8} = \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}} = \sim \frac{1}{4,8}$$

y

$$\begin{aligned} M_{1 \text{ máx}} &= \frac{2 + \frac{4}{4,8}}{\frac{6}{23,04} + \frac{3}{4,8} + 3} \times \\ &\times \frac{pl^2}{8} = \sim 0,73 \times \frac{1}{8} pl^2 = \sim \frac{1}{11} pl^2 \end{aligned}$$

y entonces el momento en el centro de la viga valdrá

$$0,27 pl^2 = \sim \frac{1}{34} pl^2$$

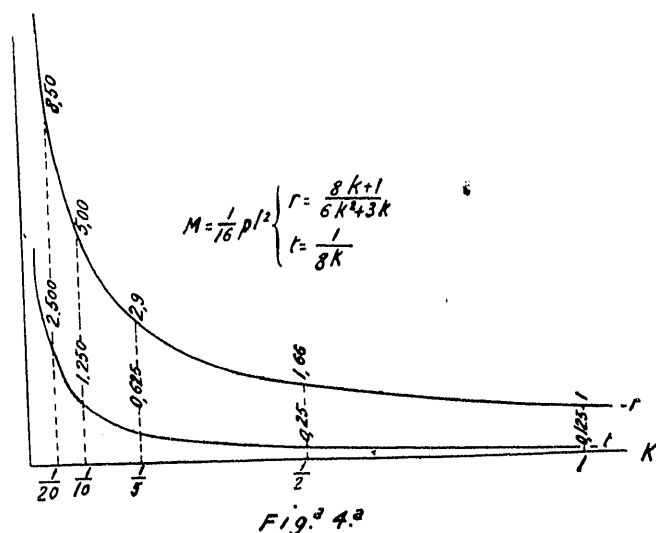
con una reacción vertical Y aumentada en

$$Y_1 = \sim 0,80 \frac{pl}{2}$$

sobre Y_i , es decir, que se hace aproximadamente doble de la isostática.

Para $k = 0$ volvemos a obtener, como anteriormente, el empotramiento perfecto, pero entonces el valor de Y es infinito.

De lo anterior deducimos como conclusión la necesidad de dar una fuerte entrega y de consolidar



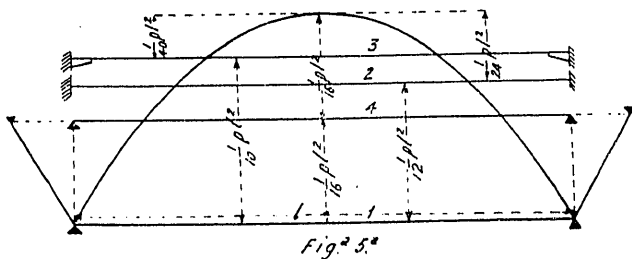
perfectamente los apoyos para asegurar su inmovilidad, tanto en el superior como en el inferior de cada extremo, y contrarrestar las reacciones que se originen en ellos, si hemos de conseguir el debido empotramiento.

Hasta ahora hemos supuesto $r = 1$; pero cabe valerse de esta indeterminada, en las vigas de madera y de hormigón armado, para obtener el empotramiento en mejores condiciones.

Entonces, para cada valor de M_1 tendríamos distintos valores de r y de k ; pero nosotros vamos a referirnos únicamente al valor

$$M_1 = \frac{1}{16} pl^2,$$

que, como más arriba se dijo, realiza las mejores condiciones de trabajo igualando los momentos flectores en las secciones central y de arranques (fig. 5.^a).



Entonces

$$\frac{2 + 4k}{6k^2r + 3kr + 3} = \frac{1}{2},$$

de donde

$$r = \frac{8k + 1}{6k^2 + 3k} \quad [3]$$

Por otra parte

$$Y_1 \times l \times k = \frac{1}{16} pl^2; \quad Y_1 = \frac{pl}{2} \times \frac{1}{8k} = Y_i \times \frac{1}{8k},$$

o sea

$$l = \frac{1}{8k} \quad [4]$$

Las fórmulas [3] y [4] merecen ser discutidas, teniendo en cuenta sus resultados, que se indican en la figura 4.^a.

Si hacemos $k = 1$, obtenemos $r = 1$, resultado de acuerdo con el encontrado más arriba, en que el valor de Y_1 resulta aumentado en $\frac{1}{8} \frac{pl}{2}$ con relación a la isostática.

Los valores de Y_1 aumentan a medida que k disminuye, según las ordenadas de una hipérbola equilátera; pero resultan mucho menores que los hallados anteriormente, correspondientes a $r = 1$.

Para valores corrientes de k , de $\frac{1}{10}$ a $\frac{1}{12}$, el valor de Y se hace, aproximadamente, 2,5 veces la reacción isostática para un valor de $r \sim 6$.

Hemos supuesto que el valor de r se conserva en toda la longitud de la entrega en el muro, y en tal caso, en el supuesto de piezas rectangulares, siendo b el peralto en el tramo central, manteniendo cons-

tante el ancho, el peralto b_1 en los tramos extremos será

$$b_1 = \frac{b}{\sqrt[3]{r}}$$

Pero en general conviene variar el peralto de una manera gradual, bastando, con suficiente aproximación, con tomar dicho valor a la mitad de la longitud

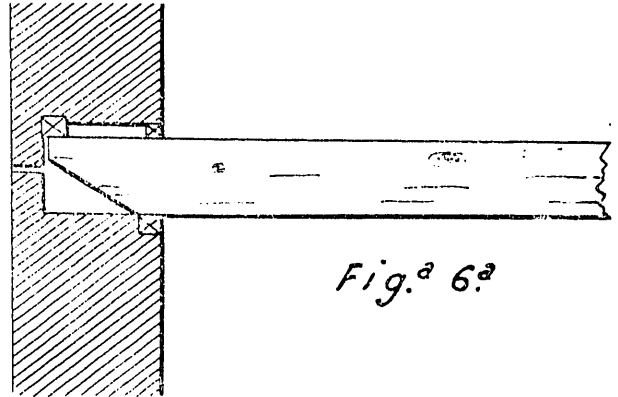


Fig. 6.^a

de la entrega y bajando desde el peralto b al b_1 y al extremo de la viga, según las ordenadas de una línea recta.

En la figura 5.^a se indican las posiciones de la parábola que da la ley de variaciones de los momentos flectores en los cuatro casos: viga apoyada [1], viga empotrada [2], viga empotrada con cartelas [3], aproximadamente, y, por último, viga con semiempotramiento que pudiéramos llamar perfecto, obtenido como se indica más arriba.

En la figura 6.^a pretendemos dar una idea de la manera de aplicar los resultados anteriores a una viga de madera, realizando las condiciones teóricas que nos sirven al mismo tiempo para aislar la cabe-

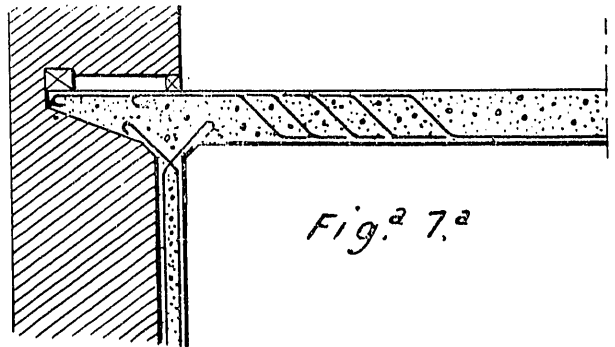


Fig. 7.^a

za de la viga, quedando ésta en una cámara de aire en comunicación con el exterior, lo que se recomienda para evitar la pudrición de la madera.

A veces convendrá colocar un pie derecho, que podrá quedar embebido en la pared y tiene por objeto resistir la presión vertical; la figura 7.^a da idea de la manera de realizar este objeto en una viga de hormigón armado. El cruce de las armaduras longitudinales del pie derecho tiene por objeto disminuir la resistencia a la flexión del pie en el punto donde ésta debiera ser nula por haberse supuesto un apoyo perfecto; pero es lo suficiente en este caso para realizar las condiciones teóricas sin necesidad de acudir a disposiciones especiales.