

sicismo grecorromano e ir en busca de los nuevos mundos de su arte.

Para esto es preciso que los constructores-artistas piensen más en la comodidad y solidez estricta de sus obras y menos en los ornamentos injustificados; que calculen más, aunque dibujen menos. Toda la arquitectura moderna es víctima de la facilidad con que se maneja el lápiz y el pincel y lo premiosamente que se entiende el íntimo sentido de las estructuras. El constructor-ingeniero ha caminado a paso de gigante en esta época de perfeccionamiento técnico y de progreso intelectual, utilizando sabiamente cuantos medios y materiales pone la industria moderna a su disposición, y el arquitecto, divorciado de aquél, sigue dibujando a capricho con un repertorio de formas trasnochado, que engendra obras monstruosas, que a veces se pide a ingenieros y constructores que las calculen, después de haber dado el arquitecto por terminada su labor de proyecto.

El remedio está en que el arquitecto vuelva a ser «maestro de obras», como modestamente se llamaba cuando, al ser ante todo constructor, resultaba artista. La arquitectura debe seguir la evolución de la vida, para lo que es necesario que el arquitecto sea hombre de su tiempo, y sus obras únicamente merecerán el aplauso, cuando reflejen la vida presente. Las cosas antiguas están bien que inspiren respeto, veneración; pero no hay que profanarlas con reproducciones serviles. Nada hay más bello que la vida, y los monumentos antiguos que admiramos son elocuentes, porque perpetúan en símbolos inmutables la potencia vital de la sociedad que los engendró.

De acuerdo con estas ideas, habrán de utilizarse en el nuevo puente que se construya en Toledo sobre el Tajo los más modernos y adelantados procedimientos constructivos, que permitan con relativa facilidad salvar luces considerables, así como los materiales más variados, no sólo los clásicos de sillería,

ladrillo, etc., aplicables a los estribos, sino también el hormigón armado, para el arco único con el que se habrá de cruzar el cauce, y los metales en otros elementos accesorios. Calculadas sabiamente todas las partes del puente mediante la ciencia del ingeniero, surgirán, por la propia naturaleza de la obra, formas claras y expresivas, que con gran sobriedad deberán ser realizadas con la ornamentación. Será el momento de ponderar masas, afinar líneas, purificar contornos, entonar colores, y para todo esto el hormigón es un material de infinita docilidad en el que el cálculo y la fantasía, o sea la ciencia y el arte, pueden vivir en la más fecunda armonía. Los productos cerámicos (no se olvide que Talavera está en Toledo) tendrán su aplicación lógica, siempre que se empleen con discreción y oportunidad.

La obra, en suma, eminentemente ingenieril, deberá tener algo más que ciencia pura; pero las alas que le preste la fantasía para remontarse a las regiones del Arte, no es preciso que sean tan monstruosas como las de algunos ángeles de los cuadros del Greco.

Los ingenieros que acudan al concurso, no deberán escatimar en la gestación de su trabajo colaboraciones y consejos, absolutamente indispensables, de artistas de toda clase. Si se aíslan en su técnica, van seguros al fracaso. Y por idéntica razón la entidad que redacte las bases del concurso y decida la elección del proyecto, deberá estar formada por técnicos de la ciencia y del arte, amantes todos de Toledo. Felizmente, abundan éstos y hay donde elegir. Los nombres de Gómez Moreno, Alcántara, Vegue Goldoni, Marqués de la Vega Inclán y tantos otros acuden a la mente, al tratar de algo que a Toledo interese.

Es indispensable, en suma, que cuantos pongan su mano en Toledo, sientan la enorme responsabilidad que contraen, al incorporar su obra a la historia de nuestra primera ciudad artística.

Vicente MACHIMBARRENA

EL PLANÍMETRO PRYTZ

El planímetro cuya teoría voy a exponer fué descubierto casualmente, en 1879, por el Sr. Prytz, oficial del Ejército dinamarqués. El instrumento, al cual pudiera calificarse de los de confección casera, es sugestivo, y su teoría en extremo interesante. El esbozo de demostración presentado por su autor no satisfizo por completo ni aun al propio inventor, y a perfeccionarle dedicaron sus trabajos algunos matemáticos (*).

(*) *Le Stang-Planimètre*, par A. Poulain, S. J., *Mathesis. Deuxième série. Tome V.* 1895. En el suplemento. *On the Hatchet Planimeter*, W. F. Hill, *Philosophical Magazine*, Vol. XXXIII. 1895.

El sabio ingeniero militar D. Nicolás de Ugarte dió a conocer en España el planímetro en un artículo publicado en el *Memorial de Ingenieros del Ejército*, en 1895, e hizo un extracto de los trabajos de Prytz y Poulain. Indicó también el Sr. Ugarte algunas modificaciones que, a su entender, deberían tenerse en cuenta al construir uno de esos instrumentos.

Otros trabajos posteriores, por ejemplo, *Calcul mécanique*, de Jacob, de *L'Encyclopédie scientifique*, reproducen lo ya publicado por Poulain.

M. d'Ocagne, *Cours de Géométrie*, 1918. Tome II, páginas 242-244.

He explicado en cursos anteriores de la Escuela Industrial de Madrid, en la clase de Ampliación de Matemáticas, la teoría de este planímetro. Los alumnos que asisten a dicha clase pertenecen a los peritajes de mecánicos y electricistas y han de seguir durante cuatro cursos prácticas de taller; para dichos escolares es sumamente sencillo y de coste casi nulo el fabricarse cada uno su planímetro, si lo tienen por conveniente.

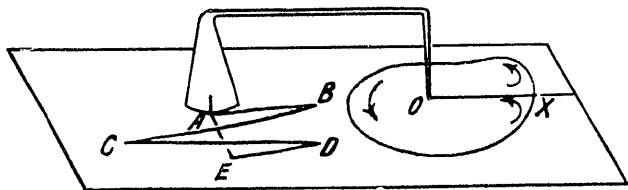
A una de mis conferencias asistió mi antiguo alumno y querido amigo D. Enrique Giménez Girón, profesor de la Escuela de Ingenieros Agrónomos, el cual, seducido por la sencillez del instrumento, introdujo algunos perfeccionamientos; bajo su dirección, se construyeron en los talleres de su Escuela varios acabados modelos, uno de los cuales posee la de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos (*). Ha efectuado

(*) El maestro de taller de la Escuela Industrial de Madrid, Sr. Tébar, construyó otro modelo, que fué presentado por mí en la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, en el curso académico 1922-23, estimándose por la Academia aquella modificación ventajosa para la exactitud de las indicaciones de aquel aparato.

el Sr. Giménez Girón mediciones muy precisas con el aparato por él modificado.

Creo haber simplificado algo la exposición de la teoría, y además he de señalar que algunas de las fórmulas que deduzco al principio conducen a explicar, con más sencillez que la usual, la teoría de otros planímetros y comprenden también la demostración de diversos teoremas, debidos a Holdicht, Leuderhoff, Darboux y otros geómetras.

El planímetro Prytz consiste en una varilla metálica acodada en sus dos extremos en ángulo recto; en uno de aquéllos lleva un punzón, con el cual se contornea el área que se quiere medir; el otro, ter-



minado en forma de hacha, de afilado corte, describe entretanto una curva de forma complicada, que es una tratriz de la recorrida por el punzón. La distancia, OA , entre el punzón y el centro del corte del hacha, es conocida: es la constante del instrumento.

Para hallar el área limitada por una curva, se coloca el punzón en un punto O , centro de gravedad del área apreciado a sentinamiento, señalando en el papel el punto A , donde está el centro del corte. Se hace el recorrido siguiendo una recta OX , dibujada de antemano; después se sigue el perímetro hasta volver a X y, por último, de X a O , sobre la recta ya trazada. El centro del corte recorre entretanto una curva tal como la $ABCDE$; se señala en el papel el punto E . El producto $\overline{OA} \cdot \text{arc } AE$ da el área que queremos medir.

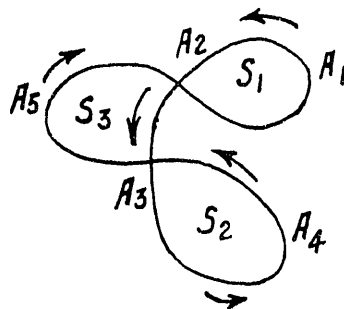
Si el punto inicial O no estuviera próximo al centro de gravedad, se efectúa el mismo recorrido; pero antes hay que hacer girar el planímetro dos ángulos rectos alrededor de O ; la media aritmética de las dos medidas es el área que se quiere determinar. Conviene tomar como dirección OX la del mayor radio vector.

En el planímetro de Prytz se marcan las posiciones inicial y final del centro del corte golpeando ligeramente la cabeza del hacha, y quedarán marcados en A y en E dos pequeños trazos. En el perfeccionado por el Sr. Giménez Girón se señalan las posiciones inicial y final por medio de dos agujas movidas por un resorte que marcan dos puntos muy próximos simétricos con respecto al punto central del corte; quedan así perfectamente determinados A y E . Otra modificación introducida por el Sr. Giménez es que la mano del operador no actúe directamente sobre el punzón, modificación que permite además interrumpir en un instante dado la operación, conservando el planímetro en posición vertical, para reanudarla más tarde sin necesidad de volver a empezar.

La teoría del planímetro

Un punto $A(x_1, y_1)$ recorre un contorno cerrado cuya área designaremos por $[A]$. Otro punto, $B(x_2, y_2)$, describe al mismo tiempo otra curva cerrada de área $[B]$.

Si el punto A sigue el contorno $A_1 A_2 A_3 A_4 A_5$, en el sentido señalado por las flechas, se entenderá



por área limitada por la curva representada en la figura la expresión

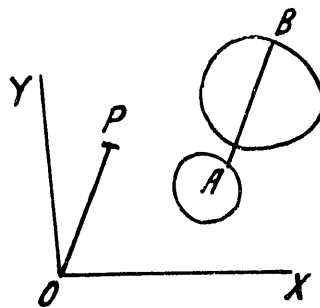
$$[A] = S_1 + S_2 - S_3$$

(Para una curva más complicada, supongo conocida del lector la regla de Gauss, que afecta a cada parcela de un coeficiente numérico.)

Un área vendrá expresada por las integrales curvilíneas a lo largo del contorno recorrido

$$[A] = \int x_1 dy_1 = - \int y_1 dx_1$$

Supongamos que el punto A parte de una posición, sigue el perímetro correspondiente y vuelve a su posición inicial, mientras el punto B recorre la otra curva, volviendo también a su punto de partida. Si entre los instantes inicial y final el punto A recorre m veces su perímetro y el B describe n veces el suyo, las áreas simultáneamente descritas por los puntos serán $m[A]$ y $n[B]$.



Imaginemos un vector, OP , equipolente al AB . Su extremo describirá una curva cerrada de área $[P]$.

Las coordenadas, X, Y , de P son, respectivamente, $x_2 - x_1, y_2 - y_1$. El área $[P]$, vendrá dada por la fórmula

$$[P] = \int X dY = \int (x_2 - x_1) (dy_2 - dy_1)$$

o bien

$$[P] = [B] - \int x_1 dy_2 - \int (x_2 - x_1) dy_1$$

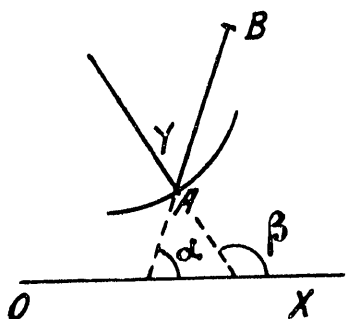
Restando y aumentando al segundo miembro $\int x_1 dy_1$ y teniendo en cuenta que

$$\int x_1 dy_1 = - \int y_1 dx_1, \quad - \int x_1 dy_2 = \int y_2 dx_1$$

se obtiene

$$[P] = [B] - [A] + \int [(y_2 - y_1)dx_1 - (x_2 - x_1)dy_1] \quad [1]$$

LLamemos l la distancia, constante o variable, AB ; α , el ángulo de AB con la parte positiva del eje OX ; β , el ángulo de la normal interior a la curva



va A con el mismo eje; γ , el ángulo de esta normal con el vector AB , y $d\sigma$, la diferencial del arco en la curva A .

El segundo miembro de la fórmula [1] se puede transformar teniendo en cuenta que

$$y_2 - y_1 = l \sin \alpha, \quad x_2 - x_1 = l \cos \alpha, \quad dx_1 = d\sigma \cdot \sin \beta, \\ dy_1 = -d\sigma \cos \beta, \quad \beta - \alpha = \gamma,$$

la igualdad [1] se convertirá en

$$[P] = [B] - [A] + \int l \cos \gamma d\sigma \quad [2]$$

Apliquemos esta fórmula al planímetro Prytz.

En este caso, l , es constante, es la distancia entre la punta O del punzón y el punto central del corte del hacha. La curva A , es una tractriz de la B ; por tanto, la recta móvil, AB , es tangente a la tractriz en todas sus posiciones. Cuando la punta del estilete parte de O , recorre el trozo rectilíneo OX , después el perímetro B y vuelve de X a O , el trazo A del hacha recorre la curva $ABCDE$ y el punto P describirá un cierto arco de círculo. Para cerrar el contorno descrito por el punto central del corte del hacha, imaginemos que el punzón queda fijo en O y hagamos girar el otro extremo del planímetro de manera que el centro del corte describa el arco de círculo EA cuyo centro es O .

El extremo P del vector vuelve a recorrer en sentido contrario el arco de círculo descrito anteriormente; se tendrá, por tanto, en el caso de un movimiento cerrado de vaivén,

$$[P] = 0$$

Si el movimiento no fuera de vaivén se tendría, siendo m un entero,

$$[P] = m\pi l^2$$

El término $\int l \cdot \cos \gamma \cdot d\sigma$ consta de dos partes: una, la correspondiente a la tractriz $ABCDE$, que es nula, por ser en ese recorrido γ ángulo recto; la otra parte, la referente al arco EA , tiene por valor

$$l\sigma = l \cdot \text{arco } EA$$

por ser en ese recorrido γ constantemente nulo o igual a π .

La fórmula [2] se convertirá, en el caso del movimiento de vaivén, en

$$[B] = [A] + l\sigma \quad [3]$$

Siempre que para una posición del punto O de partida haya compensación de áreas en A , porque las áreas positivas y negativas tengan en esta curva el mismo valor absoluto, se tendrá

$$[A] = 0$$

La fórmula [3] se reducirá a

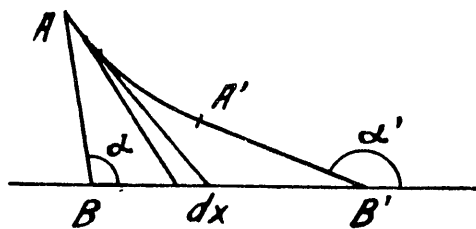
$$[B] = l \cdot \text{arco } EA$$

Prácticamente, puede tomarse, sin error sensible, la cuerda EA en lugar del arco EA , y se tendrá

$$[B] = l \cdot \overline{EA}$$

Si se tiñe el borde del hacha para señalar en el papel la curva A , se observa que esa compensación de áreas se verifica en las proximidades del centro de gravedad.

Si el movimiento es cerrado, pero no de vaivén, habría que tener en cuenta lo que hemos indicado antes, esto es, que el área de P es un múltiplo del área del círculo de radio l ; pero no consideramos este caso, pues en el estudio que hacemos a continuación, para ver la influencia del punto de arranque en la compensación de áreas en la curva A , observaremos que se atenúan errores si es pequeña la relación entre el máximo radio vector de la curva y la longitud de la varilla del planímetro.



Sean AA' un arco de tractriz de la recta BB' , α y α' los ángulos que las tangentes en A y A' forman con BB' , $d\varphi$ el ángulo de contingencia de la tractriz. En el triángulo formado por dos tangentes infinitamente próximas, se tiene

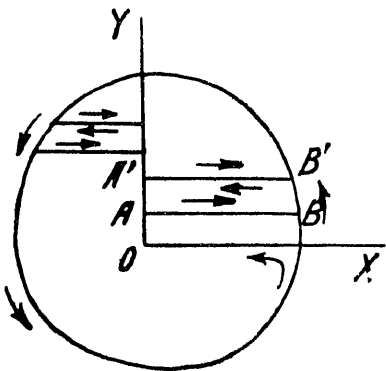
$$\frac{dx}{l} = \frac{d\varphi}{\sin \varphi}$$

Integrando se deduce

$$\tan \frac{\alpha'}{2} = e^{-\frac{x}{l}} \tan \frac{\alpha}{2} \quad [4]$$

Descompongamos el área que queremos medir en elementos infinitamente pequeños por medio de pa-

rales al eje X . La punta del estilete recorrerá en cada elemento el trayecto señalado por las flechas. Así, cada trozo de recta AB se recorre sucesivamente dos veces en sentido contrario; es, pues, equiva-

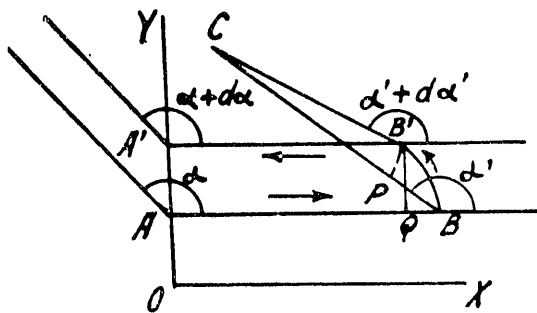


lente lo que hacemos a arrancar del origen, seguir el eje X hasta C , contornear el área hasta C y volver al origen por el eje X .

La aplicación de la fórmula [4] al recorrido AB y al $B'A'$, da por sustracción lo que se obtiene diferenciando la citada igualdad, o sea

$$\frac{da'}{\sin a'} = -\frac{dx}{l} + \frac{da}{\sin a} \quad [5]$$

Describamos el arco de círculo $B'P$ desde el punto C , de intersección de dos posiciones infinitamente próximas de la varilla, cuando el punzón pasa de



B a B' ; el ángulo en C es el de contingencia de la tractriz e igual a da' , el arco PB' será $l \cdot da'$. Proyectando ortogonalmente sobre $B'P$ el contorno BQB' , formado por los lados dx , dy , se tiene

$$l \cdot da' = -dx \sin a' + dy \cos a' \quad [6]$$

Eliminando a' y da' , entre [4], [5] y [6], se obtiene

$$l \cdot da = \left(e^{\frac{x}{l}} \cos^2 \frac{a}{2} - e^{-\frac{x}{l}} \sin^2 \frac{a}{2} \right) dy$$

cuyo segundo miembro, expresado en función de $\sin \frac{a}{2}$ da

$$l \cdot da = \left[e^{\frac{x}{l}} - \left(e^{\frac{x}{l}} + e^{-\frac{x}{l}} \right) \sin^2 \frac{a}{2} \right] dy$$

Multiplicando por l , e integrando a lo largo del recorrido

$$l^2 \cdot a = l \int e^{\frac{x}{l}} dy - 2l \int \sin^2 \frac{a}{2} dy$$

Desarrollando en serie el minuendo del segundo miembro

$$l \cdot \int e^{\frac{x}{l}} dy = l \cdot \int dy + \int x dy + \frac{1}{l} \int \frac{x^2}{2} dy + \frac{1}{2l^2} \int \frac{x^3}{3} dy + \frac{1}{4l^3} \int x^4 dy + \dots$$

En el segundo miembro de la igualdad anterior se tiene

$$\int dy = 0, \quad \int x dy = [B], \quad \int \frac{x^2 dy}{2} = [B]X, \\ \int \frac{x^3 dy}{3} = [B]\rho^2;$$

X , es la abscisa del centro de gravedad del área, y ρ , el radio de giro respecto al eje de abscisas.

La suma de los términos que siguen es una fracción muy pequeña del área para una relación entre la máxima x y l , menor que $\frac{1}{4}$.

La integral del substraendo no acusa error sensible, a causa de los cambios de signo en los elementos de la integral y de la presencia del factor $\sin^2 \frac{a}{2}$; el ángulo a recibe valores menores que $\frac{1}{4}$ de radian para una dirección inicial de la varilla en el sentido del eje de abscisas.

Puede, por tanto, escribirse

$$l \cdot \text{arco } AE = [B] + \frac{[B]X}{l} + \frac{[B]\rho^2}{2l^2} + \varepsilon$$

Los términos que pueden producir error sensible son: el relativo al centro de gravedad y aquel en que interviene el momento de inercia.

El término en que aparece X , se anulará cuando el arranque se haga desde el centro de gravedad, o será tanto más pequeño cuanto más próximo a dicho punto se coloque el punzón en la arrancada. Siempre es posible hacer desaparecer ese término de la fórmula, aun en el caso de colocar el punzón a la salida en otro lugar. Si se arranca desde un punto cualquiera y, después de hacer el recorrido, se vuelve al mismo punto y se gira el planímetro dos ángulos rectos, repitiendo otra vez el recorrido, se tendrá

$$l \cdot \text{arco } A'E' = [B] - \frac{[B]X}{l} + \frac{[B]\rho^2}{2l^2} + \varepsilon'$$

De las dos igualdades anteriores deduciremos

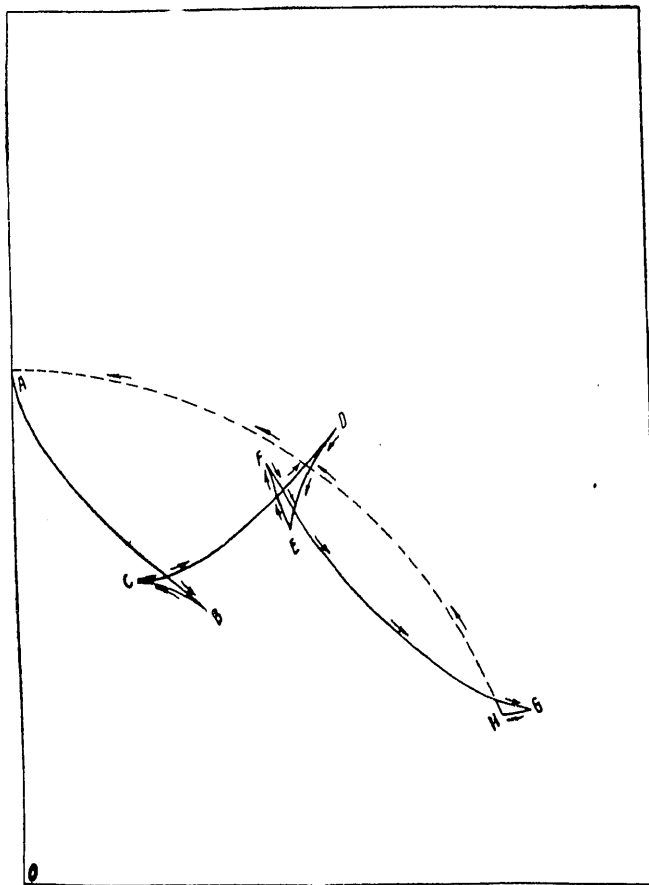
$$l \cdot \frac{AE + A'E'}{2} = [B] + \frac{[B]\rho^2}{2l^2} + \varepsilon$$

El único término que puede producir error sensible es el segundo de la fórmula anterior; pero puede llegar a hacerse una fracción muy pequeña del área para valores pequeños de la relación de ρ a l . Prácticamente, se logra que así sea fraccionando el área.

La última fórmula indica la conveniencia de iniciar el recorrido en dirección al mayor radio vector y próximo al centro de gravedad, pues así se tendrá menor valor para el radio de giro.

Puede obtenerse el área con la mayor exactitud, sea o no el movimiento de vaivén. La fórmula [2] da el valor del área exactamente; pero hay que apreciar entonces el valor del área $[A]$ con el mismo planímetro. Para ello, se seguirá con un lápiz la tractriz descrita por el hacha. No se puede sustituir la cuerda por el arco, pues se cometería error grande, por ser el ángulo de las posiciones inicial y final de la varilla superior a la fracción de radian que antes hemos indicado. Se necesita el concurso de otra persona, además de la conductora del planímetro, para dibujar la tractriz, ya que el mismo aparato no puede señalar la curva, pues la colocación de un lápiz en el punto central del corte variaría la curva A y dejaría de ser una tractriz de la curva B . Por esto, conviene en la práctica limitar la aplicación del planímetro al primer caso.

En la última figura se ha dibujado en escala reducida la tractriz correspondiente al rectángulo indicado en la misma. Como la longitud del planímetro es la distancia OA y ésta es pequeña respecto a las dimensiones del rectángulo, se ha colocado el punzón en O y el hacha en A . La tractriz es $ABCDEFHG$; el arco de círculo HA , que cierra el área $[A]$, corresponde a un ángulo en el centro de



unos 70° . La aplicación de la fórmula [2] da el área con gran exactitud, pues para un área de unos $1\,200\text{ cm}^2$ se comete un error de 60 mm^2 .

Augusto KRAHE
De la R. A. de Ciencias E., F. y N.

Autostradas italianas

El rey de Italia ha inaugurado recientemente, y de un modo oficial, la primera carretera exclusivamente destinada a vehículos automóviles que existe en Europa, y creemos que en América, obra notable, de la que ya había dado la REVISTA DE OBRAS PÚBLICAS una breve noticia (1), construida por una entidad particular, con el auxilio del Gobierno.

La iniciativa de esta empresa se debe al ingeniero Piero Puricelli, constructor del circuito de Monza, en donde se han corrido renombrados campeonatos, y también de la notable pista de ensayo de coches de $1\,400\text{ m}$ de longitud, que tiene la Sociedad «Fiat» en la terraza de su magnífica fábrica de Turín.

Para realizarla, después de importantes estudios y de una activa propaganda, se constituyó una Sociedad Anónima, denominada «Autostrade», con un capital, primero, de $25\,000\,000$ de liras, que se ha elevado a $30\,000\,000$, y de la que es presidente honorario el del «Turismo Club Italiano» y efectivo el del «Automóvil Club de Milán», y en la que figuran las más prestigiosas firmas de constructores de automóviles y de sus accesorios, suministradores de comi-

bustibles y grasas e industriales de todas clases que tienen relación con el turismo, pues es indudable, y así lo han reconocido los fundadores, que el fin principal que esta Sociedad persigue es el desarrollo de todas esas industrias, y en especial la del turismo, aunque también se fomenta el tráfico general.

Se designa en el país al grupo de esas nuevas vías de comunicación con el nombre de carretera de *Milán a los Lagos*, pues, efectivamente, conduce, de la capital de la Lombardía, a los lagos de Como, Lugano y Mayor; la longitud de los cinco trozos en que está dividida es la siguiente:

I.	De Milán a Lainate.	12,430	km.
II.	Lainate-Gallarate.	20,670	»
III.	Gallarate-Varese.	16,180	»
IV.	Lainate-Como.	24,660	»
V.	Gallarate-Vergiate.	11,080	»
TOTAL.		85,020	»

De ellos, están construídos y en explotación los cuatro primeros, a excepción de los $1\,800\text{ m}$ primeros del primer trozo, o sea la salida de Milán, que, por dificultades de orden administrativo, no se po-

(1) Véase el núm. 2 416, pág. 388, de REVISTA.