

En torno a un ejercicio de Zafra

Ha sido mi propósito al hacer este modesto artículo la repetición, a mi modo y manera, de parte del ejemplo décimoséptimo de aquella notable colección de ejercicios compuestos por el Sr. Zafra para la divulgación de los métodos de cálculo de estructuras basados en el trabajo elástico, publicados primeramente en nuestra REVISTA en los números correspondientes al final del año 1912 y al comienzo del 1913.

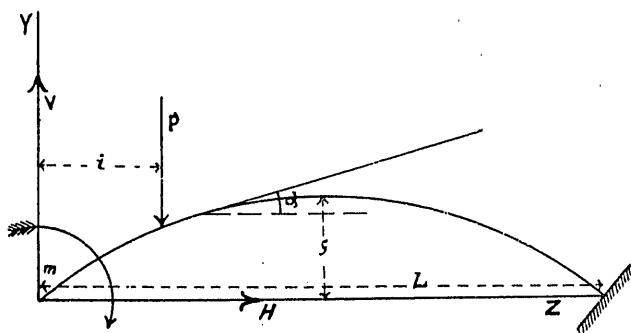
He querido ocuparme, a mi manera y modo, del cálculo de arcos de fábrica empotrados, siguiendo el procedimiento portentosamente sencillo y genial para la determinación de las líneas de influencia en dichos arcos, que nos legó nuestro inolvidable maestro, en el maravilloso ejercicio décimoséptimo de la mencionada colección de ejemplos. En ese ejercicio, cuya admirable resolución, fiel reflejo de la textura técnica y mental de su eminente autor, tan elevada como equilibradamente perfecta, marca indiscutiblemente uno de los muchos puntos culminantes de la brillante y fecunda labor ingenieril de D. Juan Manuel de Zafra.

Al ir a dar título a este sencillo trabajo, se me ocurrieron tales como éstos: «Comentarios y adiciones a un ejemplo de Zafra», «Segunda edición de un ejercicio de Zafra», y otros por el mismo estilo; porque, realmente, tiene o contiene algo de todo ello. Pero hube de desecharlos, porque fué mi deseo desde el primer momento evitar, hasta en la denominación de este artículo, cosas que, por una interpretación equivocada, pudieran quizás dar origen a la confusión de tomar por inocente alarde de la más pueril vanidad por mi parte lo que, ciertamente, es en mí, en la ocasión de ahora, tan sólo testimonio de gratitud y devoción sincera al nombre del ingeniero ilustre, al par que deseo, y deseo egoísta en cuanto con ello me honro, de hacer ostensible mi veneración a la memoria del admirado profesor.

* * *

Entremos en materia.

Comencemos por la presentación de los datos de la cuestión a tratar.



L es la luz del arco parabólico que vamos a considerar.

s representa la flecha del mismo arco.

$$y = \frac{4f}{L^2} z(L - z) \quad [I]$$

es la ecuación de la fibra media del arco que se va a estudiar, referida a los ejes que se expresan en la figura.

α es el ángulo de la tangente en un punto cualquiera de la fibra media, con el eje Z u horizontal de arranques, que se puede definir por

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{dy}{dz} = \frac{4f}{L^2} (L - 2z) \quad [II]$$

expresión que se obtiene por derivación de la ecuación [I].

I_c el momento de inercia de la sección del arco en la clave.

I el momento de inercia de la sección en otro punto cualquiera del arco.

S_c el área de la sección del arco en la clave.

S el área de la sección del arco en cualquier otro punto de su fibra media.

P es la intensidad de la fuerza vertical o peso que actúa sobre el arco.

i la distancia de dicho esfuerzo o peso al apoyo que coincide con el origen de coordenadas.

V , H y m son, respectivamente, la reacción vertical, el empuje y el momento flector en el apoyo izquierdo originados al actuar la fuerza P a la distancia i de dicho apoyo.

M es el momento flector debido al mismo peso y a la indicada posición en una sección cualquiera del arco o punto cualquiera de su fibra media.

N el esfuerzo normal, debido a las mismas causas, en un punto o sección cualquiera del arco de fibra media parabólica de segundo grado considerado.

E el coeficiente de elasticidad del material del arco.

Si fueran conocidos m , H y V , las expresiones del momento flector y del esfuerzo normal en un punto cualquiera del arco, en función de esas reacciones del apoyo, del peso P y de las coordenadas del punto que se considerase, serían las siguientes:

Para $0 < z < i$

$$M = m - Hy + Vz \quad [III]$$

$$N = -H \cos \alpha - V \sin \alpha \quad [IV]$$

Para $i < z < L$

$$M = m - Hy + Vz - P(z - i) \quad [V]$$

$$N = -H \cos \alpha - V \sin \alpha + P \sin \alpha \quad [VI]$$

Prescindiendo de variaciones de longitud tales como las debidas a la elevación o descenso de la temperatura, la expresión del trabajo elástico o de la deformación debida al peso P en el arco empotrado considerado, se reduce a

$$T = \int \frac{M^2}{2EI} dl + \int \frac{N^2}{2ES} dl \quad [VII]$$

expresión que por virtud de las [III], [IV], [V] y [VI] puede venir desarrollada en función de cantidades conocidas y de las reacciones desconocidas m , H y V del apoyo izquierdo.

Puede aplicarse perfectamente por ello el teorema

de Castigliano que dice: La derivada parcial del trabajo elástico respecto a una fuerza o reacción, mide el recorrido de ésta, y como suponemos perfecto el empotramiento en los arranques del arco, cosa equivalente a decir que el recorrido lineal o angular de las reacciones m , H y V es nulo, nos bastará igualar a cero las tres derivadas parciales del trabajo de la deformación representado por la expresión [VII] respecto a m , H y V , para tener un sistema determinado de ecuaciones, del que, como veremos detalladamente a continuación, se pueden deducir los valores de esas tres reacciones y, por ellos, las expresiones de sus líneas de influencia.

* * *

La expresión [VII] precedente, del trabajo de la deformación, sólo contiene los sumandos correspondientes a las deformaciones debidas a los momentos flectores y a los esfuerzos normales. Se prescinde, de ordinario, de las deformaciones originadas por los esfuerzos tangenciales, que pueden suprimirse sin apreciable error aun en los arcos medianamente estudiados, por su escasa importancia e influencia.

Del mismo modo, en gran número de casos prácticos se puede prescindir, sin inconveniente, de las deformaciones debidas a los esfuerzos normales, reduciéndose entonces la expresión del trabajo elástico al primer sumando de los dos del segundo miembro de la expresión [VII], o sea a

$$\int \frac{M^2}{2EI} dl \quad \text{[VIII]}$$

que representa el trabajo de la deformación debida a los momentos flectores.

Más adelante, con casos prácticos o ejemplos sencillos, se tratará de la posibilidad y de la mayor o menor conveniencia de esta reducción de la expresión del trabajo elástico. Mientras tanto, admitamos, para principiar, la deducción de las reacciones en el apoyo, comienzo de la determinación de las expresiones de las líneas de influencia, que por ahora nos ocupamos de los casos en los que el trabajo elástico pueda tener la expresión reducida [VIII] que precede.

En tal supuesto, las derivadas parciales del trabajo de la deformación respecto a m , H y V forman este sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} \int \frac{M}{EI} \cdot \frac{dM}{dm} dl &= 0 \\ \int \frac{M}{EI} \cdot \frac{dM}{dH} dl &= 0 \\ \int \frac{M}{EI} \cdot \frac{dM}{dV} dl &= 0 \end{aligned}$$

que, sustituyendo los valores [III] y [V] del momento flector, se convierten en

$$\left. \begin{aligned} \int_0^L \frac{1}{EI} [m - Hy + Vz] \frac{dM}{dm} dl &= \int_i^L \frac{1}{EI} P(z-i) \frac{dM}{dm} dl \\ \int_0^L \frac{1}{EI} [m - Hy + Vz] \frac{dM}{dH} dl &= \int_i^L \frac{1}{EI} P(z-i) \frac{dM}{dH} dl \\ \int_0^L \frac{1}{EI} [m - Hy + Vz] \frac{dM}{dV} dl &= \int_i^L \frac{1}{EI} P(z-i) \frac{dM}{dV} dl \end{aligned} \right\} \text{[IX]}$$

En los arcos de fábrica, la sección y el momento de inercia, o son constantes, o aumentan desde la clave hasta los arranques, con ó sin reglas de fácil manejo en el cálculo analítico. La cuestión es relativamente secundaria, y lo será tanto más cuanto más llegue a ir librándose el cálculo de arcos de las garras del empirismo y de la rutina. Para nuestro caso de arco parabólico de segundo grado, empotrado, adoptaremos, para facilitar el cálculo, la siguiente ley de variación de los momentos de inercia en los distintos puntos de la fibra media

$$I = \frac{I_c}{\cos \alpha} = \frac{I_c}{\frac{dz}{dl}} \quad \text{[X]}$$

Las derivadas parciales que figuran en el precedente sistema [IX] se deducen sencillamente de las expresiones [III] y [V], que nos dan los siguientes valores para dichas derivadas

$$\frac{dM}{dm} = 1; \quad \frac{dM}{dH} = -y = -\frac{4f}{L^2} z(L-z); \quad \frac{dM}{dV} = z$$

Haciendo en el sistema [IX] las sustituciones de I y de las derivadas parciales, por sus valores o expresiones acabadas de obtener, y efectuando las sencillas integraciones indicadas, se llega a un sistema de tres ecuaciones con las incógnitas m , H y V , de muy fácil resolución, de las que resultan los siguientes valores de las reacciones que buscábamos

$$\begin{aligned} V &= P \left[1 - 3 \left(\frac{i}{L} \right)^2 + 2 \left(\frac{i}{L} \right)^3 \right]; \\ H &= \frac{15}{4} \cdot P \cdot \frac{L}{f} \left[\left(\frac{i}{L} \right)^2 - 2 \left(\frac{i}{L} \right)^3 + \left(\frac{i}{L} \right)^4 \right]; \\ m &= \frac{PL}{2} \left[-2 \frac{i}{L} + 9 \left(\frac{i}{L} \right)^2 - 12 \left(\frac{i}{L} \right)^3 + 5 \left(\frac{i}{L} \right)^4 \right]; \end{aligned}$$

llamando X a la relación $\frac{i}{L}$ de la abscisa del punto de aplicación de la fuerza P a la luz, y suponiendo a X variable, se obtienen las siguientes expresiones de las líneas de influencia de las reacciones V , H y m en el apoyo del arco empotrado, que he puesto ordenadas respecto a sencillas funciones de X , para facilitar así cuanto he encontrado posible el cálculo numérico de dichas líneas de influencia.

$$V = P[(1-X)^2 + 2X(1-X)^2] = PF_1(X); \quad \text{[XI]}$$

$$H = 3,75P \cdot \frac{L}{f} [X(1-X)^2] = P \frac{L}{f} F_2(X); \quad \text{[XII]}$$

$$m = PL[-X(1-X)^2 + 2,50(X(1-X))^2] = PLF_3(X); \quad \text{[XIII]}$$

Las funciones sencillas de X , que constituyen las que, para abreviar, hemos representado por

$$F_1(X), F_2(X) \text{ y } F_3(X)$$

en las precedentes expresiones [XI], [XII] y [XIII], son

$$(1-X)^2, X(1-X)^2 \text{ y } [X(1-X)]^2$$

cuyos valores para los de la abscisa unitaria, o sea X , variables de 5 en 5 centésimas, aparecen en la tabla siguiente:

Valores de las expresiones

Abscisas unitarias X	$(1 - X)^2$	$X(1 - X)^2$	$[X(1 - X)]^2$
0,00	1,00	0,000	0,0000
0,05	0,9025	0,045125	0,002256
0,10	0,81	0,081	0,0081
0,15	0,7225	0,108375	0,016256
0,20	0,64	0,128	0,0256
0,25	0,5625	0,140625	0,035156
0,30	0,49	0,147	0,0441
0,35	0,4225	0,147875	0,051756
0,40	0,36	0,144	0,0576
0,45	0,3025	0,136125	0,061256
0,50	0,25	0,125	0,0625
0,55	0,2025	0,111375	0,061256
0,60	0,16	0,096	0,0576
0,65	0,1225	0,079625	0,051756
0,70	0,09	0,063	0,0441
0,75	0,0625	0,046875	0,035156
0,80	0,04	0,032	0,0256
0,85	0,0225	0,019125	0,016256
0,90	0,01	0,009	0,0081
0,95	0,0025	0,002375	0,002256
1,00	0,00	0,000	0,0000

Las expresiones [XI], [XII] y [XIII] permiten el fácil cálculo de las correspondientes a las líneas de influencia en cualquier otro punto de la fibra media o sección del arco. Vamos a hacer aplicación a la clave del arco parabólico de segundo grado que estudiamos, deduciendo la línea de influencia correspondiente al momento flector en la sección de clave.

Si se verifica que $0 < X < \frac{1}{2}$, la expresión del momento flector en la clave es la siguiente

$$m_c = m - \left[H + V \frac{L}{2} - P \left(\frac{L}{2} - LX \right) \right] = \left. \begin{aligned} &= 0,50PL[X^2 - 2,50X(1 - X)]^2 \end{aligned} \right\} \quad \text{[XIV]}$$

Si se tiene que $\frac{1}{2} < X < 1$, entonces el momento flector en clave tiene por expresión

$$m_c = m - \left[H + V \frac{L}{2} - P \left(\frac{L}{2} - LX \right) \right] = \left. \begin{aligned} &= 0,50PL[(1 - X)^2 - 2,50X(1 - X)]^2 \end{aligned} \right\} \quad \text{[XV]}$$

Observemos que si en la expresión [XIV] se cambia X en $1 - X$, se tiene la expresión [XV], y viceversa si es en la [XV] en la que se hace dicha sustitución. Se deduce de ello que, como debe ocurrir, la línea de influencia del momento flector en la clave es simétrica, teniendo por eje de simetría la vertical de la clave, es decir, el mismo eje del arco parabólico considerado.

Con la tabla anterior, y con las expresiones simplificadas del momento flector en la clave que se acaba de detallar, se ha calculado la tabla siguiente, cuyas columnas son o contienen:

A) Los valores de la abscisa unitaria o relaciones entre las distancias de la fuerza P al apoyo y la luz del arco $\left(X = \frac{i}{L} \right)$.

B) Los valores de la $F_1(X)$ que, multiplicados por P , nos dan las ordenadas de la reacción vertical en el apoyo (línea de influencia de V).

C) Los valores de la $F_2(X)$ que, multiplicados por $P \frac{L}{i}$ nos dan las ordenadas de las líneas de influencia del empuje (H).

D) Los valores de la $F_3(X)$ o cantidades que multiplicadas por PL nos dan las ordenadas de la línea de influencia del momento flector en el arranque (m).

E) Las cantidades que, multiplicadas por PL , nos dan las ordenadas de la línea de influencia del momento en la clave (m_c).

A	B	C	D	E
0,00	1,000	0,00000	0,00000	0,00000
0,05	0,99275	0,00846	— 0,03948	— 0,00157
0,10	0,972	0,03037	— 0,06075	— 0,00512
0,15	0,93925	0,06096	— 0,06773	— 0,00907
0,20	0,896	0,096	— 0,064	— 0,012
0,25	0,84375	0,13184	— 0,05273	— 0,01269
0,30	0,784	0,16537	— 0,03675	— 0,01012
0,35	0,71825	0,19409	— 0,01848	— 0,00344
0,40	0,648	0,216	0,00000	+ 0,008
0,45	0,57475	0,22971	+ 0,01702	+ 0,02468
0,50	0,50	0,23437	+ 0,03125	+ 0,04687
0,55	0,42525	0,22971	+ 0,04177	+ 0,02468
0,60	0,352	0,216	+ 0,048	+ 0,008
0,65	0,28175	0,19409	+ 0,04977	— 0,00344
0,70	0,216	0,16537	+ 0,04725	— 0,01012
0,75	0,15625	0,13184	+ 0,04102	— 0,01269
0,80	0,104	0,096	+ 0,032	— 0,012
0,85	0,06075	0,06096	+ 0,02152	— 0,00907
0,90	0,028	0,03037	+ 0,01125	— 0,00512
0,95	0,00725	0,00846	+ 0,00325	— 0,00157
1,00	0,000	0,00000	0,00000	0,00000

Si eligiéramos varios arcos con rebajamientos diferentes, uno rebajado $\frac{1}{5}$ y más rebajados los restantes, y con auxilio de las expresiones [IV], [VI], [XI] y [XII] que conocemos, calcularíamos los esfuerzos normales en varias de sus secciones debidos a la fuerza P , observaríamos que estos esfuerzos se aproximan bastante, relativamente, al empuje para cada una de las posiciones de dicha fuerza, y comprobaríamos a la vez que, si tomáramos para valor del esfuerzo normal el del empuje correspondiente a cada posición del peso P , se cometerían errores, unas veces por defecto y otras por exceso, tanto más pequeños cuanto más rebajado sea el arco que se considere.

En el ejemplo del Sr. Zafra que nos ocupa, al tener en cuenta el trabajo de la deformación debido a los esfuerzos normales, del que se ha prescindido en lo que antecede, se hace notable simplificación de los cálculos, que se justifica por estas dos cosas: la primera, por adoptar para valor del esfuerzo normal el

$$N = \dots H \quad \text{[XVI]}$$

en vez del que dan las expresiones [IV] y [VI], lo que reduce los cálculos como vamos a ver.

Al tener en cuenta el trabajo elástico correspondiente a los esfuerzos normales, el sistema de las ecuaciones resultante al obtener las derivadas del

trabajo de la deformación respecto a las reacciones desconocidas m , V y H , es el siguiente

$$\left. \begin{aligned} \int \frac{M}{EI} \cdot \frac{dM}{dm} dl + \int \frac{N}{ES} \cdot \frac{dN}{dm} dl &= 0 \\ \int \frac{M}{EI} \cdot \frac{dM}{dH} dl + \int \frac{N}{ES} \cdot \frac{dN}{dH} dl &= 0 \\ \int \frac{M}{EI} \cdot \frac{dM}{dV} dl + \int \frac{N}{ES} \cdot \frac{dN}{dV} dl &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \text{[XVII]}$$

gunda ecuación del sistema [XVII] esta integral sencillísima

$$\int_0^L \frac{H}{ES} dl$$

integral que se reduce a ésta

$$\int_0^L \frac{H}{ES_e} dz = \frac{HL}{ES_e};$$

Las derivadas parciales del esfuerzo normal respecto a dichas reacciones son, según las expresiones [IV] y [VI],

$$\frac{dN}{dm} = 0; \quad \frac{dN}{dH} = -\cos \alpha; \quad \frac{dN}{dV} = -\sin \alpha;$$

mientras que para el valor del esfuerzo normal dado por la expresión [XVI] se convierten dichas derivadas parciales en las

$$\frac{dN}{dm} = 0; \quad \frac{dN}{dH} = -1; \quad \frac{dN}{dV} = 0$$

valores según los cuales la primera y la tercera de las ecuaciones del sistema [XVII] son las mismas primera y tercera del sistema [IX] anteriormente resuelto, y la segunda sólo difiere en que hay que adicionar a su primer miembro para obtener la se-

$$m = PL \cdot \frac{\left(\frac{f}{L}\right)^2 \left(-4\frac{i}{L} + 18\left(\frac{i}{L}\right)^2 - 24\left(\frac{i}{L}\right)^3 + 10\left(\frac{i}{L}\right)^4\right) - 45\frac{I_c}{S_e L^2} \left[\frac{i}{L} - 2\left(\frac{i}{L}\right)^2 + \left(\frac{i}{L}\right)^3\right]}{4\left(\frac{f}{L}\right)^2 + 45\frac{I_c}{S_e L^2}};$$

que lo mismo que los anteriores, cuyas expresiones eran algo menos complicadas, se han descompuesto en funciones sencillas de la abscisa unitaria X o relación $\frac{i}{L}$, para facilitar el cálculo numérico, resultando éstas

$$V = P[(1-X)^2 + 2X(1-X)^2]; \quad \text{[XVIII]}$$

$$H = 15P \cdot \frac{f}{L} \cdot \frac{[X(1-X)]^2}{4\left(\frac{f}{L}\right)^2 + 45\frac{I_c}{S_e L^2}}; \quad \text{[XIX]}$$

$$m = PL \left[-X(1-X)^2 + 10\left(\frac{f}{L}\right)^2 \cdot \frac{[X(1-X)]^2}{4\left(\frac{f}{L}\right)^2 + 45\frac{I_c}{S_e L^2}} \right] \quad \text{[XX]}$$

Las funciones en las que se ha descompuesto estas expresiones de las líneas de influencia son las mismas calculadas en la tabla primera de las que preceden. Los valores de V son los mismos anteriormente deducidos y los de H y m vienen influidos ahora por la rigidez o por el espesor del arco, puesto que de arcos de fábrica se trata.

Si el sumando $45\frac{I_c}{S_e L^2}$ fuese despreciable respecto del $4\left(\frac{f}{L}\right)^2$, las expresiones [XIX] y [XX] se convertirían en las [XII] y [XIII] anteriormente calculadas.

Por el contrario, con rebajamientos muy grandes, o sea muy reducidos valores de la relación $\frac{f}{L}$ y, a

al aceptar para ley de variación de las áreas de las secciones (segunda causa o justificación de las simplificaciones obtenidas en el cálculo al tener en cuenta el trabajo elástico debido a los esfuerzos normales), la siguiente

$$S_e = \frac{S_c}{\cos \alpha} = \frac{S_c}{\frac{dz}{dl}};$$

Resuelto el sistema [XVII], se obtienen los valores siguientes de las reacciones y al propio tiempo de las ordenadas de las líneas de influencia (esto último, naturalmente, al suponer variable i):

$$V = P \left[1 - 3\left(\frac{i}{L}\right)^2 + 2\left(\frac{i}{L}\right)^3 \right];$$

$$H = 15P \cdot \frac{f}{L} \cdot \frac{\left(\frac{i}{L}\right)^2 - 2\left(\frac{i}{L}\right)^3 + \left(\frac{i}{L}\right)^4}{4\left(\frac{f}{L}\right)^2 + 45\frac{I_c}{S_e L^2}};$$

la vez, excesivos espesores en la clave del arco, en pequeñas luces sobre todo, tenderían los valores del momento flector a aproximarse a los dados por esta otra expresión límite

$$m = -PLX(1-X)^2;$$

que es la de la línea de influencia del momento flector en el apoyo de una viga recta empotrada en sus dos extremos, así como la expresión [XVIII] representa la línea de influencia de dicha sección de empotramiento de la viga recta, de la reacción vertical correspondiente.

Del mismo modo que anteriormente vimos, la línea de influencia del momento flector en la clave, al tener en cuenta la rigidez del arco, presenta, como en el caso de prescindir del trabajo elástico de los esfuerzos normales, estas dos formas de expresión:

Si se verifica que $0 < X < \frac{1}{2}$

$$m_c = 0,50PL \left[X^2 - 10\left(\frac{f}{L}\right)^2 \cdot \frac{[X(1-X)]^2}{4\left(\frac{f}{L}\right)^2 + 45\frac{I_c}{S_e L^2}} \right] \quad \text{[XXI]}$$

Y cuando $\frac{1}{2} < X < 1$

$$m_c = 0,50PL \left[(1-X)^2 - 10\left(\frac{f}{L}\right)^2 \cdot \frac{[X(1-X)]^2}{4\left(\frac{f}{L}\right)^2 + 45\frac{I_c}{S_e L^2}} \right]$$

formas que pueden discutirse sencillamente para los valores relativos de los sumandos de

$$4\left(\frac{l}{L}\right)^2 + 45\frac{I_c}{S_c L^2}$$

como acabamos de hacer al tratar del momento en el apoyo.

* * *

La oración breve sube al cielo. Yo, por eso, no estoy por los artículos largos, y el presente pasaría de los límites de extensión que a mí me agradan si incluyera en él unos ejemplos sencillos que pensaba poner para aplicación y como mejor aclaración, por consecuencia, de los manifestado en lo que precede. Queden los ejemplos para más adelante, para cuando pueda con ellos formar otro artículo, que podrá llamarse «Aplicaciones de un ejercicio de Zafra».

En vista de esto, voy a limitarme, para terminar, a poner de manifiesto cuánto es el error que se comete al prescindir del trabajo elástico o de la deformación debido a los esfuerzos normales, en la cuantía del trabajo total de la deformación por la acción del peso P , porque de ese modo podremos tener indicios del grado de aproximación de las expresiones de las líneas de influencia, que por la aplicación del teorema de Castigliano han quedado establecidas.

Para operar cómodamente, al intentar contrastar esos resultados, he dado forma sencilla y práctica a la relación entre la luz y el espesor en la clave por la fórmula

$$e_c = \sqrt{\frac{L}{37,50}}$$

que da un metro de espesor en la clave, para la luz de 35,50 m, por lo que no resulta ni mejor ni peor que las demás fórmulas empíricas de las que tan excelente colección hay en todos los manuales y textos que tratan, más o menos bien, de arcos y de puentes.

Con dicha fórmula, el sumando $45\frac{I_c}{S_c L^2}$ de las expresiones de los denominadores de H y m se convierte en $\frac{1}{10L}$ por ser $\frac{I_c}{S_c}$ el cuadrado del radio de giro en la sección rectangular de la clave del arco, que vale $\frac{e_c^2}{12} = \frac{L}{450}$.

La suma $4\left(\frac{l}{L}\right)^2 + 45\frac{I_c}{S_c L^2}$ es ahora $\frac{1}{L}\left[4\frac{l^2}{L} + 0,10\right]$ y las expresiones de H y m se cambian en éstas

$$H = 15Pf \cdot \frac{[X(1-X)]^2}{4\frac{l^2}{L} + 0,10} \quad [\text{XXII}]$$

$$m = PL \left[-X(1-X)^2 + 10\frac{l^2}{L} \cdot \frac{[X(1-X)]^2}{4\frac{l^2}{L} + 0,10} \right] \quad [\text{XXIII}]$$

Claramente manifiestan esas expresiones que, para un rebajamiento dado, influye cada vez menos la ri-

gidez a medida que la luz aumenta, y que para una determinada luz, cuanto más rebajado es el arco mayor influencia en los valores de H y m tiene la rigidez. Consecuencias: que al establecer la relación entre los trabajos elásticos correspondientes al esfuerzo normal y al momento flector, hemos de ver corroboradas. Pasemos a calcular esa relación, que, hechas las primeras reducciones, tiene el valor siguiente

$$\frac{\int \frac{N^2}{2ES} dl}{\int \frac{M^2}{2EI} dl} = \frac{\int \frac{N^2}{S} dl}{\int \frac{M^2}{I} dl} = \frac{I_c}{S_c} \cdot \frac{\int N^2 dz}{\int M^2 dz}$$

vamos a determinar el valor de esa relación en el caso de que la fuerza vertical o peso P actúe en la clave del arco, porque es la posición más favorable a la estimación del trabajo de los esfuerzos normales, que entonces es un máximo. Tiene, además, esa posición del peso la ventaja de que por simetría sólo hay que tomar las mitades de los trabajos de la deformación que representan las integrales del quebrado precedente, efectuando las integraciones entre 0 y $\frac{L}{2}$. Los valores del momento y del empuje correspondientes a la posición de P en la clave, se obtienen haciendo $X = \frac{1}{2}$ en las precedentes expresiones [XXII] y [XXIII], y son los siguientes

$$H_{\frac{1}{2}} = \frac{\frac{15}{16} \cdot Pf}{4\frac{l^2}{L} + 0,10}$$

$$m_{\frac{1}{2}} = PL \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{\frac{l^2}{L} - 0,10}{4\frac{l^2}{L} + 0,10}$$

siendo digno de observarse que el momento es nulo en el arranque para un peso P aplicado en la clave, cuando cumpliéndose la condición o relación sencilla entre el espesor en la clave y la luz que fijamos para simplificar los cálculos, se cumple, además, la relación $L = 10l^2$. Es decir, que es ahora nulo el momento flector en el arranque del arco, para la abscisa unitaria 0,50, en determinados casos, en vez de serlo siempre para la abscisa 0,40, como sucedía (cosa que puede verse en la segunda de las tablas precedentes) al prescindir de la influencia del esfuerzo normal en el trabajo de la deformación.

El valor del momento flector en un punto cualquiera del arco, en el caso de actuar P en la clave, se obtiene de los valores de $H_{\frac{1}{2}}$ y $m_{\frac{1}{2}}$ calculados precedentemente, y del de la reacción vertical que vale ahora $\frac{P}{2}$; y su expresión es:

$$M = PL \frac{\frac{1}{8} \left[\frac{l^2}{L} - 0,10 \right] - \frac{Z}{2L} \left[\frac{7}{2} \cdot \frac{l^2}{L} - 0,10 \right] + \frac{Z^2}{4L^2} \cdot 15 \frac{l^2}{L}}{4\frac{l^2}{L} + 0,10}$$

el esfuerzo normal en un punto cualquiera, admitimos que sea como para el cálculo de las expresiones [XVIII], [XIX] y [XX], $N = -H$, teniendo $H_{\frac{1}{2}}$ el valor antes deducido.

La relación de los trabajos elásticos, hechas las sustituciones e integraciones expresadas, tiene el siguiente valor:

$$\frac{I_c}{S_c} \cdot \frac{\int_0^{\frac{L}{2}} N^2 dz}{\int_0^{\frac{L}{2}} M^2 dz} = \frac{L}{450} \cdot \frac{\frac{L}{2} \cdot H_{\frac{1}{2}}^2}{\int_0^{\frac{L}{2}} M^2 dz} = \frac{75 \cdot \frac{f^2}{L}}{2 + 10 \frac{f^2}{L} + 200 \frac{f^4}{L^2}} \quad [\text{XXIV}]$$

No pueden ser absolutos los resultados de la discusión de la relación obtenida entre los trabajos del esfuerzo normal y del momento flector, deducida en una hipótesis particular, aunque aceptable en muchos casos, respecto a la relación entre el espesor o rigidez del arco, y la luz del mismo. Sin embargo, algo orienta sobre el particular la determinación de los valores de esa relación de los trabajos elásticos, en casos corrientes; por lo que, a continuación, se han reunido varios datos y resultados para que juzgue el lector.

Luces de los arcos — Metros	Flechas — Metros	Valores de la relación entre los trabajos del esfuerzo normal y del momento flector
10,00	1,00	1,50
30,00	3,00	0,98
25,00	5,00	0,35
75,00	9,00	0,33
30,00	6,00	0,29

Vese, pues, que el trabajo de la deformación debido a los esfuerzos normales iguala o supera al debido a los momentos flectores, en ocasiones, aunque otras muchas veces sea bastante inferior. Hay que estudiar en cada caso de aplicación lo que proceda acerca de la supresión en los cálculos del trabajo de los esfuerzos normales; estudio del que resultará que en los arcos muy rebajados, o en luces pequeñas para

un rebajamiento dado, no se debe prescindir del trabajo debido a los esfuerzos normales. Es decir, que deben aplicarse sin reducción ninguna las expresiones del empuje [XIX] y del momento flector en el arranque [XX], obtenidas por el Sr. Zafra, que son modelo de sencillez, dentro de su notable grado de aproximación.

He dicho y repetido, y con esta ligera observación voy a terminar, que tratamos de arcos de fábrica; y es probable que ofrezca reparo, el que para la deducción de las expresiones de las líneas de influencia, se haya aceptado los mismos supuestos de variación o leyes de variación de los momentos de inercia y de las áreas de las secciones respecto a los valores en la clave. Efectivamente, en un arco de hormigón corriente, si se cumple la relación $I = \frac{I_c}{\cos \alpha}$ no puede

verificarse la $S = \frac{S_c}{\cos \alpha}$ sino la $S = \frac{S_c}{\sqrt[3]{\cos \alpha}}$

La objeción, tratada como yo deseo, requiere alargar demasiado este sencillo artículo; su comentario, en vista de ello, quede para otra ocasión, ya que podrá servir bien, para comenzar por él la segunda parte del presente, sobre *Aplicaciones de un ejercicio de Zafra*.

José LÓPEZ RODRÍGUEZ
Ingeniero de Caminos

DE SUR A NORTE

Los ferrocarriles de la meseta de Castilla y sus longitudes virtuales

Hace algún tiempo, y en colaboración con el comandante de Ingenieros D. Joaquín de la Llave—apellido de ilustre abolengo y autoridad presente en el arte de la fortificación—publiqué un artículo en la REVISTA DE OBRAS PÚBLICAS relativo a los ferrocarriles necesarios en la meseta de Castilla la Vieja, desde los puntos de vista comercial y militar, llegando a una conclusión que nuevamente expongo a mis lectores, porque es de tal interés, que no se repetirá nunca bastante hasta que sea realidad. Decía así:

Es de grandísima importancia económica y de enorme importancia militar el enlace ferroviario con doble vía—de ancho normal español en las circunstancias actuales—de la meseta de Soria con Logroño, Estella y Pamplona, por una parte, y con Aljaro y Pamplona

por otra, por los valles de los ríos Iregua, Alhama y Arga; la construcción, también con doble vía, del ferrocarril Burgos-Soria-Calatayud y la instalación de ella en todo el actual recorrido Madrid-Torralba-Soria.

Cada día que pasa adquiere mayor importancia el tema, y le dan actualidad las competencias comerciales, exteriorizadas en la Prensa técnica y diaria, entre distintos puertos del Cantábrico y regiones a ellos afines, que aspiran a una legítima expansión ferroviaria, sin faltar más discutibles sueños de exclusivismo.

Desde hace diez años, y en cinco de activa actuación en dos periodos de criterios superiores distintamente definidos, he estudiado todas las soluciones lógicamente posibles para la comunicación directa