

Se ocupa extensamente de la realización del ensayo en metales sometidos a una previa operación de temple, y deduce consecuencias no solamente utilizables en este ensayo, sino en la aplicación industrial de los cojinetes de bolas.

Se observa, comparando las flechas de las impresiones realizadas por esferas de diversos diámetros, que hasta cierta presión (600 kilogramos en los casos estudiados) se obtienen las mismas flechas, no alcanzándose resultados comparables ni proporcionales.

Estudia el método propuesto por el célebre metalurgista Saudberg, fundado en idénticos principios que el Brinnell, aplicando una presión de 50.000 kilogramos sobre una esfera de 19 milímetros de diámetro, y obtiene números de dureza Saudberg que compara con los de Brinnell.

También vuelve a recordar el método Ludwik, por el cual el número de dureza se deduce de la fórmula

$$\Delta = \frac{P}{4,43 f^2}$$

En este método para una presión igual se obtiene siempre más flecha que en el Brinnell, siendo, sin embargo, menor la aproximación de los resultados obtenidos.

Por último, realiza un útil y muy completo estudio sobre la influencia de la temperatura del ambiente y del metal ensayado en los resultados obtenidos.

Como puede comprobarse en la ligera reseña que acabo de hacer, es muy completo el estudio realizado por Figari y presentado de un modo muy ordenado y metódico.

Aunque aquí termino el corto estudio crítico que he realizado de la obra de aquél, indicaré que Guillery en la *Revue de Metallurgie* ha expuesto también interesantes estudios que ha realizado sobre el mismo ensayo, especialmente orientados en buscar el medio de eliminar la influencia sobre el mismo de la duración.

Fundado en ello, y buscando la posibilidad de hacer este ensayo, no solamente con rapidez, sino en el mismo sitio donde se encuentren depositados los materiales cuyas características se desea conocer, describe dos aparatos portátiles, en los cuales la esfera recibe un fuerte golpe de un martillo o maza, actuando por choque.

Ambos están estudiados por Guillery.

En el primero (fig. 2.ª) se actúa dando un golpe de martillo en la cabeza superior *B* del aparato; este golpe se transmite por intermedio de unas arandelas Belleville *L*, debidamente graduadas al portaútil *H*; del golpe recibido, la esfera recibe la parte de energía que las arandelas permiten llegar, y el resto, es decir si el golpe es lo suficientemente enérgico, hace tropezar la parte saliente del aparato con la superficie del cuerpo que se desea ensayar.

Como la energía necesaria es pequeña, no es preciso un golpe demasiado vivo ni un martillo muy pesado, siendo suficiente una herramienta corriente y la fuerza de cualquier operario.

El mismo Guillery ha estudiado un nuevo aparato, en el cual la presión sobre el cuerpo ensayado se ejerce cayendo de una altura fija una maza metálica, de peso determinado, que lleva la esfera en su parte inferior.

En la figura 3.ª se representa un corte de este aparato.

Consiste en un tubo *T*, abierto con cuatro ventanas *F* en su parte inferior, para poder examinar la zona en la que se quiera realizar el ensayo.

Dentro del mismo se mueve una maza *L*, compuesta de un elemento cilíndrico pesado, que contiene un juego de arandelas Belleville, el portaútil y la esfera; dicha maza es la que, cayendo

de una altura determinada y fija, produce la impresión en el cuerpo.

Dicha maza tiene alojadas en su interior, en dos ranuras transversales, dos pequeños rodillos *G*, los cuales pueden separarse entre sí, en cuyo caso, ejerciendo rozamiento sobre la pared interior del aparato, puede modificar el movimiento de la maza.

Entre esos rodillos se aloja una varilla *C*, labrada en su parte baja en forma cónica, que al penetrar entre dichos rodillos los separa y ejercen éstos presión en la pared interior.

Para operar con el aparato se invierte éste, y por su propio peso la maza introduce entre dichos rodillos el final cónico de la varilla y los acuña; se sujeta, además, la maza por un pequeño diente *A*.

Cuando se quiere soltar la maza se tira del botón *B*, se desacuñan los rodillos y, soltando al mismo tiempo el diente *A*, cae aquélla, produciéndose la impresión, absorbiendo la energía sobrante las arandelas y siendo constante la presión ejercida por el choque.

La Casa H. Morin ha puesto a la venta un pequeño aparato portátil, en el cual la presión se ejerce por el golpe de un martillo, y en forma que el golpe, no sólo produzca la impresión en el cuerpo que debe ensayarse, sino también en una pieza de acero cromado, y en la cual está señalada la huella por la bola de 10 milímetros y la presión en prensa de 3.000 kilogramos.

Para la comparación de las dos huellas obtenidas en la pieza *etalon* y la señalada en el cuerpo ensayado, se determina, mediante tablas de fácil manejo, las características del cuerpo cuyas propiedades se desea conocer.

El porvenir de este ensayo seguramente exigirá el empleo, cada día más frecuente, de aparatos portátiles de cualquiera de los tipos que he descrito.

DOMINGO MENDIZÁBAL,
ingeniero de Caminos.

Madrid, 1.º de septiembre de 1921.

Apuntes sobre el cálculo de arcos de fábrica

POR

JOSÉ LÓPEZ RODRÍGUEZ

Pudiera haber principiado escribiendo así:

Para el objeto de estos apuntes, llámase arcos de fábrica a los de hormigón, mampostería o sillería, con o sin armaduras.....

Mas no me ha parecido conveniente tal cosa, por si alguien, equivocadamente, llegara a deducir de ello que iba a leer algo acabado, u ordenado por lo menos, acerca del cálculo de arcos de fábrica, lo cual dista mucho del alcance de mi incompetencia y de mis propósitos al dar a publicar estas notas sueltas.

Sea suficiente lo que acaba de indicarse para leve asomo del inevitable prólogo, si es que la llaneza y la sinceridad sirven para algo.

* * *

Voy a deducir las expresiones de varias líneas de influencia, en el arco de medio punto de espesor constante, siguiendo para ello el procedimiento aplicado por el Sr. Zafra para el cálculo del arco empotrado, en los ejercicios que publicó en la *REVISTA DE OBRAS PÚBLICAS* en los años 1912 y 1913, para la divulgación de los métodos de cálculos de estructuras derivados del trabajo elástico o de la deformación.

El objeto y la utilidad de ello más adelante quedarán demostrados. Valga de esta vez para todas la advertencia de que en estos apuntes evitaré, en cuanto me sea posible, anunciar las cosas, y, aún más, ponderar su importancia relativa.

Se ha representado en la figura I la fibra media de un arco de medio punto. Su ecuación, para los ejes OZ y OY , designando por D el diámetro o luz del arco, es la siguiente:

$$y^2 = z(D - z)$$

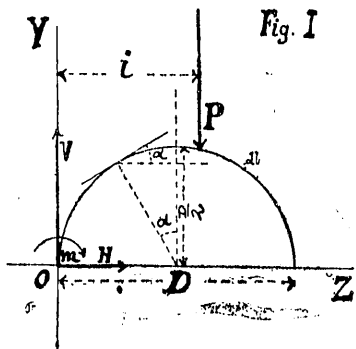
De dicha ecuación, y por la figura, se obtienen las relaciones que paso a detallar:

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{dy}{dl} = \frac{D - 2z}{D}; \quad \cos \alpha = \frac{dz}{dl} = \frac{2y}{D};$$

$$\operatorname{tang} \alpha = \frac{dy}{dz} = \frac{D - 2z}{2y};$$

Se admite que haya empotramiento perfecto en los apoyos del arco, y se designan por:

P , la fuerza vertical o peso unidad, y por V , H y m , la reacción vertical, el empuje y el momento flector determinados en el apoyo que coincide con el origen de coordenadas, al actuar la fuerza P a la distancia i del mismo.



Las expresiones del momento flector y del esfuerzo normal, en función de las reacciones y fuerza dichas, son diferentes, según que la abscisa del punto de la fibra media que se considere sea menor o mayor que i .

Momento para $0 < z < i$ $M = m - Hy + Vz$

Momento para $i < z < D$ $M = m - Hy + Vz - P(z - i)$

Esfuerzo normal para $0 < z < i$ $N = -H \cos \alpha - V \operatorname{sen} \alpha$

Esfuerzo normal para $i < z < D$ $N = -H \cos \alpha - V \operatorname{sen} \alpha + P \operatorname{sen} \alpha$

Llamando E al coeficiente de elasticidad, S al área de la sección del arco e I al momento de inercia de la misma, pueden escribirse las siguientes ecuaciones para el cálculo de V , H y m , que por el procedimiento que sigo para efectuarlo resultan de igualar a cero las derivadas del trabajo de la deformación respecto a dichas reacciones desconocidas:

$$\frac{1}{EI} \int M \frac{dM}{dm} dl + \frac{1}{ES} \int N \frac{dN}{dm} dl = 0;$$

$$\frac{1}{EI} \int M \frac{dM}{dH} dl + \frac{1}{ES} \int N \frac{dN}{dH} dl = 0;$$

$$\frac{1}{EI} \int M \frac{dM}{dV} dl + \frac{1}{ES} \int N \frac{dN}{dV} dl = 0;$$

En lo que precede están las expresiones de M y N ; y de ellas se obtienen los siguientes valores de las derivadas parciales:

$$\frac{dM}{dm} = 1; \quad \frac{dN}{dm} = 0; \quad \frac{dM}{dH} = -y; \quad \frac{dN}{dH} = -\cos \alpha;$$

$$\frac{dM}{dV} = +z; \quad \frac{dN}{dV} = -\operatorname{sen} \alpha$$

valores que, sustituidos como los de M y N en las ecuaciones anteriores, las convierten en las siguientes:

$$\begin{aligned} \int_0^D (m - Hy + Vz) dl &= \int_i^D P(z - i) dl; \\ \int_0^D (m - Hy + Vz) (-y) dl &+ \\ + \frac{I}{S} \int_0^D (-H \cos \alpha - V \operatorname{sen} \alpha) (-\cos \alpha) dl &= \\ = \int_i^D P(z - i) (-y) dl + \frac{I}{S} \int_i^D (-P \operatorname{sen} \alpha) (-\cos \alpha) dl; \\ \int_0^D (m - Hy + Vz) z dl &+ \\ + \frac{I}{S} \int_0^D (-H \cos \alpha - V \operatorname{sen} \alpha) (-\operatorname{sen} \alpha) dl &= \\ = \int_i^D P(z - i) z dl + \frac{I}{S} \int_i^D (-P \operatorname{sen} \alpha) (-\operatorname{sen} \alpha) dl; \end{aligned}$$

de las cuales, efectuando las integraciones indicadas, resulta el sistema:

$$\begin{aligned} m \frac{\pi D}{2} - H \frac{D^2}{2} + V \frac{\pi D^2}{2} &= \\ = P \frac{D}{2} \left\{ \left(\frac{D}{2} - i \right) \left[\pi \operatorname{arc} \cos \left(1 - \frac{2i}{D} \right) \right] + \sqrt{i(D-i)} \right\}; \\ - m \frac{D^2}{2} + H \pi \left(\frac{D^3}{16} + \frac{I}{S} \cdot \frac{D}{4} \right) - V \frac{D^3}{4} &= \\ = P \left[-\frac{D}{4} (D-i)^2 + \frac{I}{S} \left(\frac{i^2}{D} - i \right) \right]; \\ m \frac{\pi D^3}{4} - H \frac{D^3}{4} + V \pi \left(\frac{3D^3}{16} + \frac{I}{S} \cdot \frac{D}{4} \right) &= \\ = P \left\{ \frac{D}{2} \left(\frac{3}{8} D^2 - \frac{Di}{2} \right) \left[\pi - \operatorname{arc} \cos \left(1 - \frac{2i}{D} \right) \right] + \right. \\ \left. + \frac{D}{2} \left(\frac{3D}{4} - \frac{i}{2} \right) \sqrt{i(D-i)} + \right. \\ \left. + \frac{I}{S} \left[\frac{D}{4} \left[\pi - \operatorname{arc} \cos \left(1 - \frac{2i}{D} \right) \right] + \right. \right. \\ \left. \left. + \left(\frac{i}{D} - \frac{1}{2} \right) \sqrt{i(D-i)} \right] \right\}; \end{aligned}$$

Por razón de claridad y de comodidad pondremos i en función de X , designando por X la abscisa unitaria o relación $\frac{i}{D}$, y ha-

ciendo la sustitución en las ecuaciones que forman el sistema, se obtiene éste:

$$\begin{aligned}
 m \frac{\pi}{D} - H + V \frac{\pi}{2} &= \\
 = P \left[\left(\frac{1}{2} - X \right) \left[\pi - \arccos(1 - 2X) \right] + \sqrt{X(1-X)} \right]; \\
 - m \frac{\pi}{D} + H \pi^2 \left(\frac{1}{8} + \frac{I}{SD^2} \cdot \frac{1}{2} \right) - V \frac{\pi}{2} &= \\
 = P \pi \left[- \frac{(1-X)^2}{2} + \frac{I}{SD^2} 2(X^2 - X) \right]; \\
 m \frac{\pi}{D} = H + V \pi \left(\frac{3}{4} + \frac{I}{SD^2} \right) &= \\
 = P \left\{ \left(\frac{3}{4} - X \right) \left[\pi - \arccos(1 - 2X) \right] + \right. \\
 \left. + \left(\frac{3}{2} - X \right) \sqrt{X(1-X)} + \frac{I}{SD^2} \left[\pi - \arccos(1 - 2X) + \right. \right. \\
 \left. \left. + (4X - 2) \sqrt{X(1-X)} \right] \right\};
 \end{aligned}$$

del cual fácilmente se deducen los valores de las reacciones V , H y m , que son:

$$V = P \frac{\left\{ \begin{aligned} &\pi - \arccos(1 - 2X) + (2 - 4X) \sqrt{X(1-X)} + \frac{4I}{SD^2} \left[\pi \right. \\ &\left. - \arccos(1 - 2X) + (4X - 2) \sqrt{X(1-X)} \right] \end{aligned} \right\}}{\pi + \frac{4\pi^2 I}{SD^2}};$$

$$H = P \frac{\left\{ \begin{aligned} &8 \sqrt{X(1-X)} - 4\pi X^2 - (4 - 8X) \arccos(1 - 2X) \\ &\quad + \frac{16\pi I}{SD^2} (X^2 - X) \end{aligned} \right\}}{\pi^2 - 8 + \frac{4\pi^2 I}{SD^2}};$$

$$\begin{aligned}
 m = P \frac{D}{\pi} \left\{ -X \left[\pi - \arccos(1 - 2X) \right] + 2X \sqrt{X(1-X)} + \right. \\
 \left. + \frac{2I}{SD^2} \left[\frac{(4 - 8X) \sqrt{X(1-X)}}{1 + \frac{4I}{SD^2}} \right] + \right. \\
 \left. + \frac{8 \sqrt{X(1-X)} - 4\pi X^2 - (4 - 8X) \arccos(1 - 2X) + \frac{16\pi I}{SD^2} (X^2 - X)}{\pi^2 - 8 + \frac{4\pi^2 I}{SD^2}} \right\}
 \end{aligned}$$

expresiones que son las ecuaciones de las líneas de influencia buscadas, siendo X variable.

* *

El vulgo de otros tiempos nos legó sobre la abundancia estas dos frases sentenciosas, que no es siempre fácil acordar:

«Todo lo malo abunda.»

«Lo que abunda no daña.»

Esta última, si acaso, es la que cabe aplicar al crecido número de fórmulas para la determinación del espesor de un arco en la clave, que con pródiga mano nos ofrecen todos los manuales y textos más o menos especialistas en puentes. Esas fórmulas son completamente inofensivas y ha llegado a abusarse de ellas, hasta el extremo de proyectar un arco, tomando para su espesor en la clave la media de los dados por ocho o diez de estas fórmulas.

Para las necesidades de estos apuntes me serviré sólo de dos

de ellas; la del Sr. Gaztelu (la simplificada) y la del Sr. Boix. Llamando L a la luz del arco y e al espesor en la clave, dichas conocidas fórmulas son:

$$e = 0,50 + 0,02 L; \quad e = \frac{1}{3} \sqrt[3]{L}$$

¿Que en qué va a parar todo esto? Voy seguidamente a decirlo. Para el equilibrio de una viga recta corresponde al momento de inercia de su sección el papel más importante; para el de un arco, lo más importante es la figura de su fibra media, restando un secundario papel, por lo general, al momento de inercia, que es tanto más de tener en cuenta cuanto más rebajado es el arco, es decir, cuanto más se aproxima a la *rectificación* (si tal palabra se me admite).

Las ecuaciones exactas que se ha obtenido de las líneas de influencia en el arco de medio punto son larguísimas, aunque no de complicación, dados los elementos que las integran; y como nada tiene este arco respecto a gran rebajamiento, pueden simplificarse mucho las ecuaciones, prescindiendo en ellas de todos los productos en que $\frac{I}{SD^2}$ entra como factor.

Para calcular en casos extremos la importancia de dicho factor, he recurrido a las fórmulas del espesor del arco en la clave. La del Sr. Gaztelu da un metro para el arco de 25 metros de luz, y la del Sr. Boix, 1,44 metros de espesor para el arco de 80 metros de luz; con estos datos y los tomados de la alcantarilla modelo núm. 42 de la Colección oficial, que tiene 2,50 metros de luz y 0,42 metros de espesor en la clave, he formado el estado siguiente:

Luces de los arcos D (o L).	Espesores en la clave.	Valores de $\frac{I}{SD^2}$
Metros.	Metros.	
2,50	0,42	0,002352
25	1	0,000133
80	1,44	0,000027

Los valores que se ha obtenido atestiguan que el factor $\frac{I}{SD^2}$ tiene valores pequeños, pero variables, hasta el extremo de ser los obtenidos como 87, 5 y 1. Quiere esto decir que puede hacerse en la generalidad de los casos las simplificaciones que resultan de prescindir en las ecuaciones exactas de las líneas de influencia deducidas de los productos por el factor $\frac{I}{SD^2}$. Es fácil deducir en cada caso, por sencillísimas operaciones de Aritmética elemental, el error cometido y su cuantía en cada uno de los valores de V , H y m .

Las ecuaciones, simplificadas, son:

$$V = \frac{P}{\pi} \left[\pi - \arccos(1 - 2X) + (2 - 4X) \sqrt{X(1-X)} \right];$$

$$H = P \frac{8 \sqrt{X(1-X)} - 4\pi X^2 - (4 - 8X) \arccos(1 - 2X)}{\pi^2 - 8};$$

$$\begin{aligned}
 m = \frac{PD}{\pi} \left[-X \left[\pi - \arccos(1 - 2X) \right] + 2X \sqrt{X(1-X)} + \right. \\
 \left. + \frac{8 \sqrt{X(1-X)} - 4\pi X^2 - (4 - 8X) \arccos(1 - 2X)}{\pi^2 - 8} \right]
 \end{aligned}$$

La representación gráfica de estas ecuaciones es muy sencilla. Por ahora me limito a hacer aplicación a un ejemplo práctico fácil.

Determinemos los valores de la reacción vertical, del empuje y del momento en el apoyo, en el arco de 80 metros, para una

carga vertical cualquiera puesta en la clave, y las distancias a la fibra media, de los encuentros de las reacciones con las secciones de arranque y de clave.

Las fórmulas simplificadas nos dan para $X = \frac{1}{2}$:

$$V = \frac{P}{2} = 0,50 P; \quad H = P \frac{4 - \pi}{\pi^2 - 8} = 0,46 P;$$

$$m = P \frac{D}{\pi} \left(\frac{2 - \pi}{4} + \frac{4 - \pi}{\pi^2 - 8} \right) = 0,055 PD = 4,40 P$$

El momento en la clave es $m_c = 0,075 PD = 6 P$, y las distancias que buscamos las siguientes: en la sección de arranques $\frac{0,055 PD}{0,50 P}$, que para $D = 80$ vale 8,80 metros, y en la sección de clave $\frac{0,075 PD}{0,46 P}$, que para el mismo valor da 13,04 metros.

Queden para después los comentarios de estos resultados.

(Se continuará.)

El aprovechamiento hidráulico

de la cuenca del Dordoña y la electrificación de la red de la Compañía del ferrocarril de Orleans.

Con este título, y en sus números del 28 de agosto y 4 de septiembre, publica *Le Génie Civil* sendos artículos de M. G. Tochon que resumimos en esta nota.

Antes de entrar en el asunto principal, el autor expone algunas generalidades sobre la cuenca del Dordoña, diciendo que entre los dos potentes depósitos de energía hidráulica, los Alpes al Este y los Pirineos al Sur, el macizo central ofrece a la industria recursos que, aunque sean menos importantes de aquéllos, no dejan de tener un interés de primer orden. De 1.900 metros, punto culminante de sus más altas cimas, el sistema montañoso que cubre con sus ramificaciones el centro del país, se destacan, hacia el Norte y el Oeste, sus mesetas ligeramente inclinadas y, en algunos puntos, profundamente recortadas. La vertiente que mira al Océano, mucho más extensa, recibe abundantes lluvias, que se evalúan, en la alta cuenca del Dordoña, por ejemplo, en un espesor medio de 120 a 130 centímetros por año.

abril, cuando la fusión de las nieves y el estiaje, contrario a lo que se observa en los Alpes, hacia los meses de julio y agosto. Durante el resto del año el régimen es muy variable y depende únicamente de la intensidad y del reparto de las lluvias. No se podrá, pues, sacar partido industrialmente de la energía de estos ríos más que construyendo, en los puntos convenientes, depósitos susceptibles de embalsar las altas aguas de la primavera y del invierno, hasta el verano.

Precisamente la topografía parece prestarse perfectamente a la constitución de estas reservas, y ninguno de los proyectos de presas estudiados hasta aquí, a pesar de sus dimensiones verdaderamente colosales (por ejemplo el del Chambon, sobre el Dordoña: embalse 110 metros; capacidad total 715 millones de metros cúbicos), ha dado lugar a objeciones por parte de los expertos geólogos que los han examinado.

Pero las obras destinadas a corregir las disposiciones de la Naturaleza son costosas, y esto explica la razón por la cual los cursos de agua del macizo central han sido relativamente desdénados por los industriales, que han preferido los torrentes de los Alpes o de los Pirineos.

La potencia total de las fábricas en explotación en el macizo central, en 1919, no representaba, en efecto, más que el 7 por 100 del conjunto de las instalaciones del territorio.

No sucede eso en la actualidad, en que la necesidad creciente de energía eléctrica obliga al productor a dirigirse a los cursos de que había al principio prescindido. Tanto es así, que los proyectos en estudio o en vías de realización en la región del Centro alcanzan la suma de 585.000 caballos, correspondiendo en este total 255.000 caballos a la cuenca del Dordoña. Este importante afluente del Garona parece que, en efecto, ofrece a la industria, por sí mismo y sus afluentes, importantes disponibilidades de energía eléctrica, que se elevan, según recientes inventarios, a un total de 2.680 millones de kilovatios hora, como energía anual.

Hace notar el autor que de este total la potencia utilizada en el día es insignificante. Sobre el Dordoña mismo, del Mont Dore al Bec-d'Amber, en una distancia de 500 kilómetros, no se cuenta en la actualidad, prescindiendo de algunos molinos insignificantes, más que las modestas fábricas del Mont-Dore y de la Bourboule (200 kilovatios cada una), y mucho más abajo, cerca de Bergerac (fig. 1.^a), la de Tuilière (de 9.000 a 15.000 kilovatios), a la cual van a unirse bien pronto las de Mauzac y de Lalinde, que casi duplicarán su potencia.

Los afluentes del Dordoña no están hasta ahora mejor utilizados: las principales fábricas hidráulicas son en Saillaut, sobre el Vézère (4.000 kilovatios), y en Bar, sobre el Corrèze (3.500 kilovatios), a las que pueden añadirse las en construcción sobre el

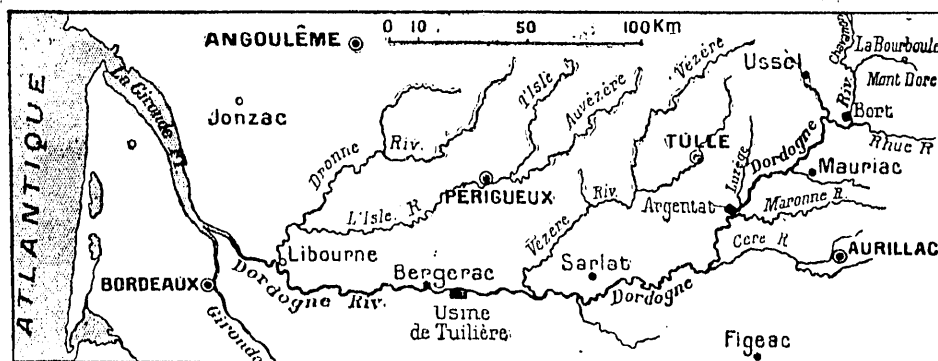


Fig. 1.^a

No tiene, por lo tanto, nada de particular que se calcule en 1.400.000 caballos la potencia media bruta disponible en esta parte del territorio. Sin duda, la altitud media relativamente pequeña y la falta total de reservas glaciares, perjudican a la regularidad de los caudales de los cursos de agua de esta región.

Las altas aguas tienen lugar, generalmente, hacia marzo o

Diège (9.000 kilovatios), sorbe el Cère (25.000 kilovatios) y algunas pequeñas fábricas diseminadas por toda la cuenca.

Era, pues, necesario ver el medio de aprovechar el total de la energía eléctrica que podría proporcionar el Dordoña y cuya importancia resulta manifiesta si se considera que para producir con la hulla los 2.680 millones citados anteriormente se ne-