

El ingeniero Bazin hizo numerosas determinaciones de este género, y los resultados obtenidos por dicho autor pueden darnos una primera aproximación; pero será preferible estudiar directamente cada uno de los vertederos a utilizar, para la medida exacta de los gastos, a cuyo fin parecería ventajoso emplear un método que ha sido empleado en experimentos de enseñanza, y que permite obtener resultados muy exactos, con medios sencillos.

El gasto, por unidad de longitud, de un prisma líquido de sección rectangular es igual al producto de una sección octogonal del mismo, multiplicado por la velocidad del filete medio, en la misma sección, velocidad que difiere poco de la superficial en un vertedero de esmerados contornos.

Bastará, pues, determinar la velocidad de una porción de filete longitudinal y superficial, así como la sección media correspondiente, para calcular el gasto.

CRONOFOTOGRAFÍA DEL MOVIMIENTO DE UN FILETE LÍQUIDO.—Consideremos: 1.º Una máquina focográfica provista de un objetivo aplanético y sin distorsión, cuya distancia focal es, aproximadamente, de 0,25 metros, y con un diafragma muy pequeño.

2.º Un punto luminoso moviéndose en un plano paralelo a la placa fotográfica ante un fondo oscuro; y

3.º Una rueda dentada, como la rueda Fizeau, que gira con velocidad uniforme delante del objetivo y muy cerca de éste.

Supongamos que la rueda esté inmóvil, en una posición tal que el eje del objetivo pase entre dos dientes; la imagen del punto luminoso móvil, al recorrer la placa, dibujará la forma de la trayectoria en trazo continuo; pero, si la rueda gira, se produce una serie de destellos alternando con eclipses, cuyo resultado es un trazo discontinuo.

Los extremos de los diferentes trazos, cuyas coordenadas podrán medirse, indicarán la posición del móvil en tiempos consecutivos e iguales. Podemos, pues, hallar la ley del movimiento de la imagen, y, por consiguiente, la del movimiento del objeto luminoso, conociendo la relación entre el tamaño de la imagen, el del objeto.

Este método, aplicado al estudio del movimiento de la *cátida* de los cuerpos y del movimiento de los proyectiles en condiciones de resistencia aérea despreciable ha dado resultados muy satisfactorios; el punto luminoso móvil, en este caso, es la imagen del sol, dada por una bola de acero perfectamente pulimentada, de 2 centímetros de diámetro, que sirve de espejo esférico convexo; las imágenes pequeñísimas—prácticamente un punto—, pero es brillantísima. La imagen de este punto dada por el objetivo, hasta empleando un diafragma muy pequeño, impresiona fuertemente la placa, aunque esté animada de una velocidad de un metro por segundo.

Si queremos hallar la ley del movimiento del agua en un vertedero por este procedimiento, tomaremos un pequeño globo de cristal plateado de 5 centímetros de diámetro, lastrado de modo que quede sumergido hasta el nivel de la imagen vista por el objetivo.

Detrás de la trayectoria del globo se colocará una pantalla negra, constituida por una hoja de palastro vertical, paralela a la dirección de los filetes de agua, y sumergida hasta un punto señalado del vertedero. Dicha pantalla llevará, además, dos reglas métricas que servirán de ejes de coordenadas en el plano de la trayectoria del punto luminoso. Se echará al agua el globo, sostenido primeramente por un hilo y una especie de caña de pescar, de tal manera que la trayectoria del punto luminoso esté a una distancia conocida de la pantalla (unos 0,10 metros).

En cada extremo de la parte de trayectoria fotografiada existe una pequeña zona indecisa correspondiente al tiempo de pasar el borde de un diente delante del diafragma. Si este tiempo tiene

una duración igual a la quincuagésima parte del paso de un diente, o de un hueco, ante el centro del objetivo, la longitud de la zona floja es solamente la quincuagésima parte de la longitud de un trazo, y, con alguna práctica, se determina con exactitud suficiente el medio, para que el error relativo, en la evaluación de la longitud, sea sensiblemente inferior a 0,01.

Si el diafragma tiene 3 milímetros de diámetro, con el que se obtiene aún una impresión fuerte en las placas *Lumière* (etiqueta morada), la condición anterior se alcanzará con dientes de 150 milímetros de espesor medio; lo que, suponiendo un número práctico de tres dientes y tres huecos, exige una rueda de 286 milímetros de diámetro, en la circunferencia primitiva. Esta rueda, dando tres vueltas por segundo, produce intervalos de $\frac{1}{18}$ de segundo. Regularemos la velocidad angular de la rueda de manera que el error absoluto posible, en la medida de una porción de trayectoria, resultando de la indecisión terminal, sea del mismo orden de importancia que el error procedente de la evaluación—con lente—de una fracción de división de la escala métrica empleada, sea 0,1 milímetros, aproximadamente, es decir, que procuraremos obtener trazos cuya longitud esté comprendida entre 1 y 2 centímetros.

Conociendo el perfil exacto del vertedero, y refiriendo a las escalas métricas un punto determinado del mismo, podremos trazar dicho perfil en la fotografía a igual escala. De esta manera conoceremos los espesores del prisma líquido, así como las velocidades correspondientes.

El producto de dichas cantidades ha de ser constante en una sección longitudinal del prisma; esta advertencia nos ofrece una comprobación de las distintas medidas; resulta posible, entonces, valorar con bastante exactitud el gasto por unidad de longitud, conociendo el nivel de carga.

Repetiendo la operación para varios regímenes diferentes del vertedero, será posible establecer un gráfico de los caudales correspondientes a los distintos niveles observados entre los límites de las diferentes pruebas, quedando así perfectamente conocido el aforo del aludido vertedero.

Estas pruebas no exigen más condiciones para realizarse que la de una altura favorable; cuando hayamos hecho el gráfico de los caudales, convendrá construir, por medio de los resultados sacados del mismo, una graduación, en la que, frente a cada nivel observado, estará inscrito el caudal correspondiente.

H.

Demostración del postulado de Euclides

POR

D. Ramón Martínez de Campos y Colmenares

Ingeniero-jefe de Caminos, Canales y Puertos y profesor de Ciencias,

I

Generalidades.—El postulado de Euclides y sus equivalentes. Crítica experimental de los sistemas antieuclidianos o pseudo-geométricos.

Desde que en el siglo III antes de nuestra Era formulaba el gran Euclides su famoso postulado, tan esencial a la ciencia del espacio, quedó entablada con su aceptación o con su posible negación una contienda entre dos ideas, las cuales en tiempos modernos han venido disputándose los honores propios del dominio de la verdad. Matemáticos ilustres de todos los tiempos se ocupa-

ron de esta cuestión tan fundamental, sin haber logrado unos ni otros en la época presente aquel general asentimiento que fuera menester. En tiempos modernos han surgido con brío los sistemas no euclidianos, y allegan partidarios a pretexto de que no se había encontrado contradicción alguna entre la negación del postulado y las consecuencias deducidas de esa negación misma, y no han faltado ni faltan personas eminentes que concedieron beligerancia y honores de posibilidad a esos sistemas pseudogeométricos. Afortunadamente la verdad es una, el postulado de Euclides es demostrable, y aquí lo vamos a demostrar, como podrá ver por sí propio el lector. Pero antes haremos unas breves consideraciones, de las que no van a salir muy bien parados aquellos sistemas.

El postulado famoso puede enunciarse así: *En el plano, la perpendicular y una oblicua en distintos puntos de una misma recta, se encuentran.* Por equivalencia, se puede decir también: *Por un punto exterior a una recta no se puede trazar más de una paralela a ella.*

Otras proposiciones geométricas elementales, que al postulado conducen o de él se derivan, se consideran como equivalentes suyas desde el punto de vista filosófico-geométrico, y si alguna de ellas se demostrare *directamente* prescindiendo del postulado, quedaría con ello demostrado éste también. Por ejemplo, dice la geometría euclidiana (la única verdadera): *La suma de los tres ángulos de un triángulo vale dos ángulos rectos.*

Niegan o ponen en duda los antieuclidianos la verdad de esas proposiciones, y nada ofrecen como garantías de acierto. No han logrado (¡qué han de lograr!) exhibir un solo triángulo rectilíneo cuyos ángulos sumen más o menos dos rectos, aun valiéndose de figuras enormes y de goniómetros muy perfeccionados. Del espacio da mejor idea la ciencia euclidiana que los sistemas opuestos y es también más propia que ellos para efectuar cualquiera representación (geométrica) gráfica de que la Mecánica y otras ciencias se sirven. No ya un geómetra, cualquier alumno, al manejar un lápiz y un juego de escuadras, no siente vacilación ni tampoco impedimento alguno para trazar por un punto una paralela, y sólo una, a cualquier recta; como que ve para ello un solo borde de la plantilla. No ya un analista, cualquier operario instruido, si para un trabajo de su oficio ha menester medir, dibujar, cuadrar, cubicar, hacer aplicación elemental de las propiedades gráficas de los números o de las propiedades numéricas de las figuras geométricas, realiza también su cometido sin experimentar indecisión ni dificultad. Otro ejemplo, y muy contundente. Supongamos una pesa, con sus guías y sus poleas, en un gimnasio. Supuesto que el aparato tuviese una perfección geométrica de instalación y ajuste, forma y dimensiones, si la pesa descende normalmente al suelo, plano y horizontal, tenemos idea clara del movimiento perpendicular de un cuerpo a un plano. Todos los puntos de la pesa recorrerán caminos de igual longitud, guardarán entre sí distancias fijas, y esas trayectorias formarán un haz de rectas paralelas. Decir que no existe tal paralelismo, o que ofrecerá indecisión, indeterminación, equivale a sostener absurdamente que las trayectorias presentan convergencias, divergencias o bifurcaciones, y que los puntos de una masa móvil, supuesta rígida e indeformable, no conservan sus separaciones respectivas, y que la pesa, en fin, cambia de forma o de tamaño al moverse.

Los antieuclidianos no han demostrado, ni demostrarán jamás, la verdad de sus afirmaciones ni de sus negaciones, en cuanto unas y otras representan contradicción del postulado de Euclides, y no pueden menos de observar gran armonía en las leyes

por que se rige la geometría euclidiana, y en las que relacionan entre sí unas y otras matemáticas, sirviendo de enlace entre el análisis y la síntesis. Los sistemas antieuclidianos, sin base alguna experimental, viven fuera de la realidad, contra la realidad y contra la experiencia, y, por tanto, su vida es ficticia, efímera y desprovista de aplicaciones prácticas. Y ¿qué puede esperarse de unos sistemas que no aportan dato alguno positivo para desmentir al contrario, que les precedió con tantos siglos de antelación y que fué admitido sin dificultad por tantas inteligencias de primer orden del mundo antiguo y de los siglos medios y modernos? Es bien cierto; la ciencia del espacio, como todas, no sería verdadera ciencia si en sus leyes fundamentales admitiese la posibilidad de que la contraria u opuesta sea exacta. Esas leyes tan sometidas a número y medida, no tienen parecido con los delirios antieuclidianos, y al formar un conjunto armónico, que una tesis opuesta no ha podido ni puede ofrecer, aportan al ánimo la convicción de que la ciencia euclidiana, si no fuese, como es, *la única verdadera* en materia geométrica, por lo menos sería *el sistema filosófico más perfecto.*

Hagamos, no obstante, justicia a los distinguidos matemáticos que han discutido y puesto en duda el postulado famoso. Sin sus valiosos trabajos e investigaciones no se hubiera enriquecido la Ciencia con una porción de alardes del ingenio humano, ni se hubiera procurado con tanto empeño la demostración del postulado de Euclides.

II

De algunos principios fundamentales.—Demostración gráfica y analítica del postulado de Euclides.

Para definir la línea recta, mencionaremos aquellas propiedades suyas de ser *el camino más corto entre dos puntos* y de que todos sus puntos están en una misma dirección. De otras propiedades, citaremos éstas: Entre dos puntos sólo existe una línea recta. Si dos rectas tienen dos puntos comunes, coinciden en toda su extensión. Dos puntos delinen una recta y sólo una. El borde de una regla rectilínea debe coincidir con la línea que se haya trazado, sirviéndonos de él, cualquiera que sea el modo de adaptar la regla a esa línea.

Para las definiciones y propiedades de perpendiculares y oblicuas y ángulos, nos atenemos a lo establecido; que así como en el concepto del paralelismo hay diversidad de opiniones que distan mucho de estar acordes, en el concepto de perpendicularidad (y en el de oblicuidad más elemental) hay concordancia de pareceres entre los geómetras, y se consideran plena y definitivamente demostrados los principios fundamentales. En ellos nos hemos de basar, y como tan sabidos, limitémonos a recordar estos enunciados de Geometría plana:

Dos rectas perpendiculares forman alrededor del punto de intersección cuatro ángulos iguales que se llaman ángulos rectos. Por un punto, sea en la recta o sea fuera de ella, se puede trazar siempre una perpendicular a esa recta, y sólo una. La perpendicular es más corta que la oblicua. Las oblicuas cuyos pies equidistan del pie de la perpendicular son iguales, y recíprocamente; y los ángulos respectivos son también iguales. Todos los ángulos rectos son iguales, etc.

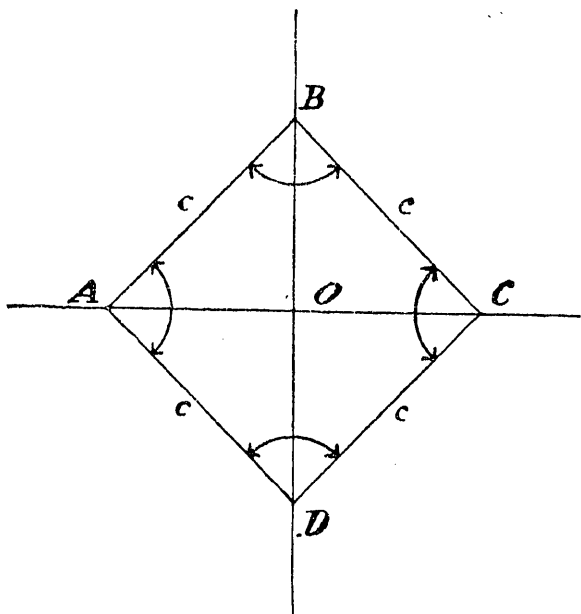
Y del paralelismo, ¿qué concepto hemos de formarnos? El que se deriva de nuestra definición:

Son rectas paralelas las perpendiculares a otra del mismo plano.

Esta definición implica que en una extensión limitada del plano, por grande que sea, ningún punto puede haber común a dos paralelas, porque si lo hubiera, desde él habría dos perpendiculares a una recta, y eso es imposible. Y no nos hace falta discutir ahora, ni aceptar ni negar, que una perpendicular y una oblicua se cortan. Al contrario: para demostrar el postulado de Euclides hace falta no apoyarse en él.

Nuestra demostración es muy elemental, y es, a la vez, geométrica y analítica.

Traemos dos ejes ortogonales en cruz y marquemos en uno de ellos dos puntos, B y D , equidistantes del centro O . Formemos los ángulos rectos B , D , teniendo el eje BD por bisectriz.



Resulta el cuadrilátero $ABCD$, equilátero; sus lados c forman parte de los triángulos ABC y BDC , ambos isósceles, y equivalentes (por ser mitades del cuadrilátero $ABCD$, que tiene los dos ejes de simetría AC y BD) (1). La suma de ángulos es la misma en los dos triángulos, $A + B$; cada ángulo pequeño $\frac{A}{2}$ es mitad del grande A del BCD ; y cada ángulo pequeño $\frac{B}{2}$ del BCD es mitad del grande B (recto) del ABC . Todo triángulo rectilíneo está perfectamente determinado por dos lados y el ángulo comprendido; así que cada uno de los otros elementos es función (no importa cuál) de esos datos; de modo que podemos escribir:

$$\left. \begin{aligned} \frac{A}{2} &= f(B, c) \\ \frac{B}{2} &= f(A, c) \end{aligned} \right\}$$

y eliminando (2) c , resulta:

$$\phi(A, B) = 0$$

No cabe suponer que ϕ envuelva una identidad, sin admitir previamente la igualdad $A = B$ y la igualdad de ambos triángulos, que implicaría de antemano un valor de dos rectos para la suma de ángulos $A + B$, y la consiguiente aceptación previa del postulado de Euclides. Luego ϕ establece una verdadera ecuación

entre A y B ; ecuación que no contiene más que ángulos, y al no contener dimensión lineal alguna, es independiente del tamaño de la figura, y restaura en principio la teoría de la semejanza. También implica, en principio, la verdad del paralelismo; la teoría de paralelas, restaurada; porque el ángulo $\frac{A}{2}$ tiene un sólo valor para un valor dado de c , que define con B el triángulo rectángulo isósceles, y ese valor $\frac{A}{2}$ es constante, en la serie de triángulos rectángulos isósceles, porque si no lo fuese dependería de c , y ya hemos visto que no depende.

La comprobación del paralelismo, por la igualdad de ángulos correspondientes, adquiere pleno carácter general, del siguiente modo. Supongamos que permanece fija la dirección AB y cambian los ejes, conservando su perpendicularidad mutua y el origen O . El cuadrilátero de lados c' , equilátero, será también simétrico, y sus triángulos mitades, permitirán escribir como antes:

$$\left. \begin{aligned} \frac{A'}{2} &= f(B', c') \\ \frac{B'}{2} &= f(A', c') \end{aligned} \right\} \phi(A', B') = 0;$$

con las mismas funciones f y ϕ , puesto que se trata de fórmulas generales. Las consecuencias subsisten, y los nuevos ejes, o sea las nuevas secantes del haz O , forman también ángulos constantes $\frac{A'}{2}$ y $\frac{B'}{2}$ con todas las paralelas de la familia AB ; de modo que ya tenemos la igualdad de ángulos correspondientes; la de alternos internos, por ejemplo, se deduce inmediatamente de la anterior. Lo mismo que de AB podemos decir de la recta BC y su familia de paralelas del mismo plano. Con otros centros O y con otras direcciones para los ejes, se hace extensiva la teoría euclidiana a los demás haces de secantes y a las demás familias de paralelas.

Queda convertido en teorema el postulado de Euclides.

A mayor abundamiento, podemos decir que una vez observada la constancia del ángulo A respecto al B , cómo de la familia de rectas AB forma parte una que pasa por el centro O , se comprueba con ella que al pasar de una familia a otra, o bien al suponer un giro en la inclinación AB o en el par de ejes ortogonales, ganará tanto un ángulo como pierda el otro, y la suma $A + B$ permanecerá constante, y como en las posiciones límites (al anularse el área de $ABCD$ por abatirse los cuatro lados c sobre uno u otro de los ejes ortogonales) la suma $A + B$ vale dos rectos, conocemos ya entonces la función ϕ , porque los ángulos A y B resultan suplementarios:

$$A + B = \pi;$$

y en el caso particular de la figura,

$$A = B = \frac{\pi}{2}.$$

de lo cual resulta que la suma de los ángulos del triángulo rectángulo isósceles vale dos rectos, y el cuadrilátero $ABCD$ es equiángulo, tetra rectangular, sirve como unidad para la medida de áreas y posee las demás propiedades que le atribuye la Geometría euclidiana, única verdadera.

(1) Hemos podido razonar sobre las áreas; pero es mucho más claro y sencillo valerse de los ángulos.

(2) La necesidad de que en f no entre c después de simplificar, aparece demostrada por la misma ϕ . Las tres ecuaciones son, en realidad, una.

