

REVISTA DE OBRAS PÚBLICAS

PUBLICACION TECNICA DEL CUERPO DE INGENIEROS DE CAMINOS, CANALES Y PUERTOS

DIRECTOR

D. MANUEL MALUQUER Y SALVADOR

COLABORADORES

LOS INGENIEROS DE CAMINOS, CANALES Y PUERTOS

SE PUBLICA LOS JUEVES

Dirección y Administración: Plaza de Oriente, 6, primero derecha.

MECÁNICA ELÁSTICA

Con este mismo título publica la REVISTA de 21 de octubre un artículo del ingeniero de Caminos Sr. Lucia, brillante alumno de nuestra Escuela hasta hace dos años, número uno de su promoción, y del que conservamos grato recuerdo por su inteligencia y aplicación nada comunes.

Muy laudable es que nuestros jóvenes compañeros demuestren su afición y aptitudes, trayendo a las columnas de la REVISTA trabajos de investigación. Pero no lo es que se aventuren de buenas a primeras a tratar de derribar lo existente, aun cuando sea con el plausible objeto de reconstruirlo mejorándolo.

Lamentamos sinceramente no poder tributar al Sr. Lucia entusiasmas felicitaciones, como fué nuestro deseo al empezar la lectura de su artículo. Si tratara éste de asunto de menos trascendencia hubiéramos callado, en gracia a nuestro afecto por el antes discípulo, hoy compañero. Pero los juveniles bríos del señor Lucia le llevan a sentar principios que pueden producir confusión y grave error en materias muy importantes, y creemos necesario rectificarlos, aunque nos disguste hondamente poner censuras donde sólo quisiéramos alabanzas.

Empecemos por lo más esencial. Quiere el Sr. Lucia establecer una teoría general de las *deformaciones contrariadas*, y obtiene

$$\int \frac{M^2}{2EI} dL + \int \frac{N^2}{2ES} dL + \int M \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{c} dL + \int N \lambda_0 dL + \left[\int \frac{(\lambda_1 - \lambda_2)^2}{c} \frac{EI}{2} dL + \int \frac{\lambda_0^2}{2} ES dL \right] \quad (1)$$

como expresión completa (prescindiendo, según es corriente, del término relativo al esfuerzo tangencial) del trabajo elástico acumulado en una pieza prismática sometida a flexión y a las deformaciones unitarias *forzadas* λ .

Compara esa expresión con la siguiente

$$T_1 = \int \frac{M^2}{2EI} dL + \int \frac{N^2}{2ES} dL + \int M \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{c} dL + \int N \lambda_0 dL \quad (2)$$

que es la dada por algunos autores, dice él, por todos cuantos conocemos, decimos nosotros, para el trabajo elástico acumulado en una pieza sometida a flexión y a las deformaciones unitarias *libres* λ .

Y sin parar mientes en la trascendental diferencia que entre

las magnitudes físicas representadas por (1) y (2) existe, declara inexacta la expresión (2), a la que faltan los dos últimos términos de la (1).

Solamente una ininterrumpida serie de milagros pudiera explicar la constante ofuscación de toda una pléyade de profesores e ingenieros que hace tantos años, en particular desde principios del siglo, viene edificando en la teoría y en la práctica sobre la base de esa expresión del trabajo elástico, por todos ellos reputada exacta!

Esos dos últimos términos de la fórmula (1) equivalen, según poco después calcula el Sr. Lucia, a

$$\int \frac{M_t^2}{2EI} dL + \int \frac{N_t^2}{2ES} dL = T_2 \quad (3)$$

valor del trabajo elástico, debido a las reacciones que todas o algunas de las sustentaciones de la pieza tienen que desarrollar para oponerse a los cambios de volumen y forma simbolizados por las λ . Tales reacciones producen los elementos de cálculo momento flector M_t y esfuerzo normal N_t , independientes de los M y N , que, tanto en (1) como, *hasta ahora*, en (2), son los debidos a las acciones $A \dots$ y a las reacciones correspondientes $R \dots$, simultáneamente con las deformaciones libres λ .

El trabajo elástico (1) es, pues, la suma del valorado por (2) con el debido a las reacciones $R_t \dots$, antitéticas de las deformaciones λ . Mal pudiera ser el todo igual a la parte.

Refutada la acusación de inexactitud, restablezcamos en la expresión (2) el criterio de generalidad que cuantos autores conocemos le dan. Los elementos de cálculo, que ahora representamos por M , N , son los debidos a *todas las causas exteriores* que obran sobre la pieza prismática, a saber:

1.º Acciones $A \dots$, reacciones de sustentación correspondientes $R \dots$,

2.º Cambios térmicos o higrométricos λ , que tienden a deformar la pieza, y que por sí solos no producen reacción alguna.

3.º Reacciones de sustentación $R_t \dots$, necesarias y suficientes para *restringir en parte*, o *para anular en absoluto*, según queramos, los efectos de las deformaciones λ en *determinados puntos y direcciones*.

Las reacciones totales, $R = R + R_t$ que, de no existir las R_t , tendrían los recorridos libres r , tienen, efecto del régimen forzado, los r , cuyos valores son: cero si la restricción es absoluta (sustentación perfecta, inmovible), kR si es tan solo parcial (sustentación elástica, que cede kR centímetros al desarrollar la fuerza R o que gira kR radiantes al desarrollar el momento R_m ; o, por último, α centímetros, o α radiantes, que la sustentación

ción, por causas *independientes* del valor de R ha *asentado* desde luego (estribo de un puente, movido por socavación, por ejemplo).

Ahora bien: la expresión (2) generalizada

$$F = \int \frac{M^2}{2EI} dL + \int \frac{N^2}{2ES} dL + \int M \frac{\lambda_i - \lambda_s}{c} dL + \int \lambda N_0 dL \quad (4)$$

no valora ya el trabajo elástico desarrollado por todas las causas antedichas, pero su derivada parcial respecto a cualquiera de las reacciones R .

$$\frac{dF}{dR} = \int \frac{M}{EI} \frac{dM}{dR} + \int \frac{N}{ES} \frac{dN}{dR} + \int \frac{dM}{dR} \frac{\lambda_i - \lambda_s}{c} dL + \int \frac{dN}{dR} \lambda_0 dL = \frac{dT}{dR} \quad (5)$$

mide como siempre el recorrido de la misma, lo que expresamos con la última igualdad.

Demostraremos primeramente esto, que es lo importante, sin perjuicio de estudiar después la discrepancia entre el trabajo elástico total, T y el valorado por la función F .

El efecto M , o N , de la fuerza unidad en el lugar y dirección de cualquier reacción elemental, mide la derivada parcial respecto a ésta del efecto M o N producido por el sistema de causas correspondiente. Si $f(x, y)$ valora el brazo de palanca de la reacción respecto del punto (x, y)

$$1 \times f(x, y) = \frac{dM}{dR} = \frac{dM}{dR} = \frac{dM_t}{dR_t} (*) \quad (6)$$

Y si $\phi(x, y)$ mide el co-seno del ángulo formado por la reacción y la tangente a la fibra media de la pieza en el punto (x, y) ,

$$1 \times \phi(x, y) = \frac{dN}{dR} = \frac{dN}{dR} = \frac{dN_t}{dR_t} (*) \quad (7)$$

En virtud de esta propiedad fundamental, la expresión (5) se transforma, al descomponer M y N en sus sumandos y sustituir unas derivadas por otras según (6) y (7) en

$$\left\{ \int \frac{M}{EI} \frac{dM}{dR} dL + \int \frac{N}{ES} \frac{dN}{dR} dL + \int \frac{\lambda_i - \lambda_s}{c} \frac{dM}{dR} dL + \int \lambda_0 \frac{dN}{dR} dL \right\} + \left\{ \int \frac{M_t}{EI} \frac{dM_t}{dR_t} + \int \frac{N_t}{ES} \frac{dN_t}{dR_t} \right\} \quad (8)$$

El primer polinomio entre llaves, igual a la derivada parcial del trabajo elástico libre (2) valúa el recorrido de la reacción R en la pieza sometida a flexión por las causas $A, \dots, R, \dots$, y a las deformaciones, libremente efectuadas, λ .

El binomio complementario, derivada parcial del trabajo elástico antagónico (3), mide el recorrido de la reacción R_t , antitética de las deformaciones λ .

El recorrido de una reacción del género fuerza es la magnitud lineal descrita por su punto de aplicación; el de otra reacción del género momento es la magnitud angular girada por el plano sobre el cual actúa el par. Los recorridos cuya suma valora la ex-

presión (8) se adicionan, dando un total $r = r + r_t$, que es el recorrido de la reacción suma, $R = R + R_t$, puesto que es la magnitud lineal (o angular) descrita por el punto (o plano) de aplicación, común para las tres reacciones.

Sin necesidad de teoría alguna de la deformación forzada se vienen resolviendo todos los problemas de ese género sencillamente por el sistema de ecuaciones

$$r' = k'R' \dots r(\rho-3) = k(\rho-3) R(\rho-3)$$

expresivas de las cualidades más o menos perfectas de las $(\rho-3)$ sustentaciones elementales indeterminadas. Los primeros miembros r son las derivadas parciales de la función F (4), idéntica en la forma a la expresión del trabajo elástico libre (2), cuando en ésta se consideran M, N , como correspondientes a *todas las causas exteriores*, $A, \dots, R, \dots, \lambda_0, \lambda_i, \lambda_s$ y $R_t, \dots$.

Un ejemplo dejará perfectamente esclarecida la cuestión. Sea un arco de medio punto empotrado en sus arranques: de las seis reacciones elementales que implica ese modo de sustentación, elegimos tres, las del estribo derecho, para mantener isostáticamente el arco, dejando libre su extremo izquierdo, pero sometido a las tres reacciones desconocidas, m, V, H . Estos tres símbolos involucran, como antes las R , los efectos de *todas las causas* que intervengan. Contando positivamente: los momentos y ángulos en el sentido del reloj; los esfuerzos normales cuando son tracciones; la reacción vertical V en sentido ascendente y la horizontal H , de derecha a izquierda, cuando tira del arco, las expresiones

$$M = \left\{ m + Vr(1 + \sin \alpha) + Hr \cos \alpha \right\} - \left[Pr(\sin \alpha - \sin \theta) \right] \\ N = \left\{ V \sin \alpha + H \cos \alpha \right\} - \left[P \sin \alpha \right]$$

corresponden también a los totales M y N , aunque sólo entren explícitamente las causas exteriores que llamábamos $A, \dots$, reducidas a un peso P en la abscisa angular $\alpha = \theta$.

Supondremos que m y V son reacciones perfectas o que el estribo izquierdo nada absolutamente cede en los sentidos giratorio de m ni vertical de V , pero que es elástico en el horizontal, deformándose la longitud kH en el sentido y dirección de H .

La expresión de esas tres condiciones

$$\frac{dT}{dm} = \frac{dF}{dm} = 0; \quad \frac{dT}{dV} = \frac{dF}{dV} = 0; \quad \frac{dT}{dH} = \frac{dF}{dH} = kH$$

en las que T es la función (2), interpretada con el criterio ya dicho, o sea la F (4), resuelve el problema de una vez, sin necesidad de hacer distinciones entre unas causas y otras ni de estudiar aparte los efectos de cambios de volumen contrariados (*).

Para la primera condición tenemos $\frac{dM}{dm} = 1, \frac{dN}{dm} = 0$; para la segunda $\frac{dM}{dV} = r(1 + \sin \alpha), \frac{dN}{dV} = \sin \alpha$; y para la tercera $\frac{dM}{dH} = r \cos \alpha$ y $\frac{dN}{dH} = \sin \alpha$. Y, al multiplicar ambos

(*) Esto es lo que hacen todos cuantos autores de libros, estudios y proyectos conocemos. En realidad rara vez se recuerda la función (2), sino que se parte directamente de la expresión general de cualquier recorrido, que es la (5) de la derivada parcial de aquélla. La acusación de inexactitud lanzada por el Sr. Lucía nos ha obligado a profundizar la cuestión que, en honor de la verdad, no aparece definida con la precisión con que creemos dejarla ahora expuesta.

(*) Si la reacción es del género momento claro es que $f(x, y) = 1$ y $\phi(x, y) = 0$

miembros por $(EI : r)$, $(EI : r^2)$ y $(EI : 2 r^2)$ y abreviando $\Delta = \lambda_1 - \lambda_s$, resultan:

$$\begin{aligned} \pi m + r \pi V + 2 r H &= -\frac{EI \Delta}{c} \pi + Pr \left\{ \cos \theta + \left(\theta - \frac{\pi}{2} \right) \sin \theta \right\} \\ \pi m + \frac{r \pi}{2} \left(1 + \frac{I}{Sr^2} \right) V + 2 r H &= -\frac{EI \Delta}{c} \pi + Pr \left\{ \cos \theta + \left(\theta - \frac{\pi}{2} \right) \sin \theta + \left(1 + \frac{I}{Sr^2} \right) \times \right. \\ &\quad \left. \times \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2} - \frac{\sin \theta \cos \theta}{2} \right) \right\} \\ m + r V + \left\{ \frac{r \pi}{4} \left(1 + \frac{I}{Sr^2} \right) - \frac{EI}{2 r^2} k \right\} H &= \\ &= -\frac{EI \Delta}{c} - \frac{EI \lambda_0}{r} + Pr \left\{ \frac{1}{4} + \left(\frac{\sin^2 \theta}{4} - \frac{\sin \theta}{2} \right) \left(1 + \frac{I}{Sr^2} \right) \right\} \end{aligned}$$

De las dos primeras se deduce

$$V = P \left(\frac{1}{2} - \frac{\theta}{\pi} - \frac{\sin \theta \cos \theta}{\pi} \right)$$

independiente, no sólo de λ y Δ , sino también de la influencia de los esfuerzos normales, acusada por el binomio $(1 + I : Sr^2)$.

De la primera y tercera obtenemos

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{\frac{\pi}{4} \left(1 + \frac{I}{Sr^2} \right) - \frac{2}{\pi} - \frac{EI}{2 r^2} k} \times \left\{ -\frac{EI \lambda_0}{r^2} + \right. \\ &+ P \left[\frac{1}{4} + \left(\frac{\sin^2 \theta}{4} - \frac{\sin \theta}{2} \right) \left(1 + \frac{I}{Sr^2} \right) - \frac{\cos \theta}{\pi} - \right. \\ &\quad \left. \left. - \left(\frac{\theta}{\pi} - \frac{1}{2} \right) \sin \theta \right] \right\} \end{aligned}$$

y, por sustitución,

$$\begin{aligned} m &= -\frac{EI \Delta}{c} - \frac{EI \lambda_0}{r} + \\ &+ Pr \left\{ \frac{1}{4} + \left(\frac{\sin^2 \theta}{4} - \frac{\sin \theta}{2} \right) \left(1 + \frac{I}{Sr^2} \right) - \frac{1}{2} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\theta + \sin \theta \cos \theta}{\pi} \right\} - \frac{r \pi}{4} H \end{aligned}$$

Vea el lector cómo mediante un solo cálculo aparecen una por una todas las influencias: de las acciones A (peso P), en las tres reacciones m , V , H ; de la dilatación de la fibra media (λ_0) y de la restricción de las deformaciones en H ; de esas mismas causas y del régimen ($\lambda_1 - \lambda_s$) en m . No hay necesidad alguna, como pretende el Sr. Lucia, de hacer cuentas aparte para las causas directas y para las antagónicas de la libre deformación.

La reacción horizontal depende de un modo decisivo de la característica k , de la deformabilidad de la sustentación. En el caso límite $k = \infty$, $H = 0$: es el de un tubo elástico sometido a dos fuerzas iguales y opuestas; el semitubo superior es nuestro arco de medio punto, sustentado por el semitubo inferior; el extremo izquierdo puede moverse libremente en el sentido H , pero no girar en el m ni recorrer nada en el V . En tal supuesto ($k = \infty$), y si por sencillez $\theta = 0$, o sea P en la clave:

$$m = -\frac{EI}{c} (\lambda_1 - \lambda_s) + Pr \left(\frac{1}{\pi} - \frac{1}{2} = -0,182 \right); V = 0,5 P$$

En el límite opuesto, $k = 0$, el estribo es perfecto, incommovible: H alcanza su máximo valor absoluto y resultan, abreviando $B = 1 + (I : Sr^2)$:

$$\begin{aligned} H &= \frac{4 \pi}{B \pi^2 - 8} \left\{ -\frac{EI \lambda_0}{r^2} + P \times f(\theta) \right\}; V = P \left(\frac{1}{2} + \phi(\theta) \right) \\ m &= -\frac{EI \Delta}{c} + \frac{(8 + \pi^2 (1 - B)) \frac{EI \lambda_0}{r} + \pi^2 Pr \times f(\theta)}{B \pi^2 - 8} + \\ &\quad + Pr \times F(\theta) \end{aligned}$$

En los casos intermedios, abreviando $K = (EI k : 2 r^2)$

$$\begin{aligned} H &= \frac{4 \pi}{B \pi^2 - 4 K \pi - 8} \left\{ -\frac{EI \lambda_0}{r^2} + P \times f(\theta) \right\}; \\ V &= P \left(\frac{1}{2} + \phi(\theta) \right) \\ m &= -\frac{EI \Delta}{c} + \\ &+ \frac{(8 + 4 K \pi + \pi^2 (1 - B)) \frac{EI \lambda_0}{r} + \pi^2 Pr \times f(\theta)}{B \pi^2 - 4 K \pi - 8} + Pr \times F(\theta) \end{aligned}$$

Aunque sea ajeno a la cuestión, que harto dilucidada está, queremos aprovechar esta coyuntura para hacer resaltar la pequeña influencia que en general tienen los términos

$$\int \frac{N^2}{2 ES} dL \quad \text{e} \quad \int \frac{N}{ES} \frac{dN}{dR} dL$$

que se traducen por sustituir el binomio B a la unidad. En un tubo como el sifón de Albelda, $r = 200$ cm y (en un ancho de a cm) $S = 20 a$ cm², $I = 666,66 a$ cm⁴; $B = 1 + (I : Sr^2)$ vale 1,000 833. En una tubería maestra de $r = 50$ y $e = 2$ cm, $S = 2 a$ cm², $I = 0,666 a$ cm⁴; $B = 1,000$ 133. En un puente de 50 metros de luz y 80 cm de espesor, $S = 80 a$ cm², $I = 42 333 a$ cm⁴, $B = 1,000$ 085. El error cometido al suponer $B = 1$ es bien escaso.

Así, pues, el máximo empuje producido en el arco de medio punto por la dilatación λ_0 , coartada en absoluto ($k = 0$) por el estribo, es $H_\lambda = -6,723 \frac{EI}{r^2} \lambda_0$, produciéndose al mismo tiempo

un par $m_\lambda = +4,280 \frac{EI}{r} \lambda_0$, o sea $-0,636 r H_\lambda$. Y una diferencia de temperaturas $\Delta = \lambda_1 - \lambda_s$ solamente produce el par

$$-\frac{EI \Delta}{c} = m_\Delta$$

Pero así como estos dos pares no producen, por extenderse su efecto sin variación a todo el arco, deformación alguna, *mientras sea constante el espesor c* , el empuje origina una flexión $M_t = H_\lambda r \cos \alpha$, variable desde cero en los arranques hasta $H_\lambda r = -6,723 \frac{EI}{r} \lambda_0$ en la clave, que origina aumento de curvatura y de peralte. La fuerza unidad en la clave da $-1 \times r \sin \alpha$, como valor de $\frac{dM}{dA}$ y solo desde $\alpha = 0$ hasta $+0,5 \pi$. Su recorrido vale ($V = 0$),

$$\begin{aligned} -\frac{1}{EI} \int_0^{0,5 \pi} \left\{ m + Hr \cos \alpha \right\} r \sin \alpha \times r d\alpha &= \\ &= -\frac{2 m + Hr}{2 EI} r^2 = -0,919 r \lambda_0 \end{aligned}$$

es decir, que el radio vertical, que en completa libertad se dilataría $\lambda_0 r$, sólo aumenta la fracción $0,92 = (8 - 2\pi) : (\pi^2 - 8)$ del mismo $\lambda_0 r$ cuando el diámetro horizontal no puede dilatarse nada.

Volvamos ahora a la expresión (4), cuyas derivadas parciales son idénticas a las del trabajo elástico total, con deformaciones restringidas, representado por la suma de (2) y (3), que no es, sin embargo, el valorado por (4). La razón se ocurre desde luego: la diferencia entre ambas expresiones **F** y **T** es independiente de todas las variables **R** y nada influye en las derivaciones parciales.

En efecto, desarrollando uno cualquiera de los cuadrados

$$\int \frac{M^2}{2EI} dL = \int \frac{M^2 + M_t^2 + 2MM_t}{2EI} dL$$

su diferencia con la suma de los homólogos es

$$\int \frac{MM_t}{EI} dL$$

M es función de las *R*, *M_t* de las *R_t*, pero ninguna de las dos tiene correlación con las variables **R**, sumas de dos variables *R*, *R_t*, absolutamente independientes una de otra. Así, pues, y por analogía

$$\int \frac{1}{EI} \frac{d(MM_t)}{dR} dL = 0 = \int \frac{1}{ES} \frac{d(NN_t)}{dR}$$

En cuanto a los términos

$$\int M \frac{\Delta}{c} dL \quad \text{e} \quad \int N \lambda_0 dL$$

que difieren de los homólogos de (2) en

$$\int M_t \frac{\Delta}{c} dL \quad \text{e} \quad \int N_t \lambda_0 dL$$

cuyas derivadas respecto a **R** son nulas, producen, como hemos visto, cada uno un solo término en la derivación. Pero es de notar que lo mismo podemos, en virtud de (6) y (7), expresar las derivadas parciales respectivas por

$$\int \frac{dM}{dR} \frac{\Delta}{c} dL \quad \text{e} \quad \int \frac{dN}{dR} \lambda_0 dL$$

como por

$$\int \frac{dM_t}{dR_t} \frac{\Delta}{c} dL \quad \text{e} \quad \int \frac{dN_t}{dR_t} \lambda_0 dL$$

Es decir, que *algebraicamente* se pueden permutar los sistemas *M*, *M_t*, *A*, *R* y (*M_t*, *N_t*, *R_t*), suponiendo, a la inversa de lo hecho, que este último es el que, juntamente con las deformaciones libres λ , produce un cambio de forma en la pieza, que es luego restringido por el primer sistema, actuando éste entonces como antagonico. Y claro es que *físicamente* también sería posible que ciertas causas *R_t* iniciaran la deformación juntamente con las λ , viniendo después las demás *A* *R* a modificarla. Pero en estricta realidad sólo se producen las reacciones totales **R**, cuya descomposición en *R* y *R_t* es cosa puramente nuestra, no de la Naturaleza; ésta lo ejecuta todo a un tiempo, y la deformación *real* es *única*, aunque para analizarla tengamos también que descomponerla en la verificada en libertad y en la debida a las causas antagonistas.

Como base de su teoría de la deformación contrariada estudia

el Sr. Lucía el trabajo elástico acumulado en una fibra, sometida primero a una fuerza y después a una elevación de temperatura. Lo compara con el calculado para las mismas causas exteriores, pero actuantes en orden inverso, y proclama conclusiones singulares, como la siguiente:

Una fibra, cuya longitud inicial *l* ha llegado a ser, bajo la acción gradual de una fuerza *F*,

$$l \left(1 + \frac{F}{ES} \right) = l (1 + \delta) \quad (A)$$

adquiere, efecto de calor recibido del exterior, otra (abreviando $\tau = \alpha \times \Delta t^\circ$),

$$l (1 + \delta) (1 + \tau); \quad (B)$$

y del trabajo realizado por *F*, que, durante la dilatación, se mantiene invariable

$$Fl (\tau + \delta \tau) \quad (C)$$

tan sólo una pequeñísima parte

$$\frac{1}{2} Fl \delta \tau \quad (D)$$

se convierte en energía potencial; el resto

$$Fl \left(\tau + \frac{\delta \tau}{2} \right) \quad (E)$$

se transforma en calor.

No en algunos Tratados de Mecánica, sino en muchos—en todos cuanto conocemos—se prescinde, como es usual en todos los problemas análogos de Física, del término de segundo orden $Fl \times \delta \tau$ (*) y se afirma, no se supone, que el trabajo $Fl\tau$ queda almacenado en la barra, que al final del proceso encierra

$$Fl \frac{\delta}{2} + Fl\tau (**) \quad (F)$$

kilogrametros. El Sr. Lucía afirma, contra los autores de tales Tratados, que son solamente

$$Fl \frac{\tau \delta}{2} + Fl \frac{\delta}{2} (***) \quad (G)$$

Veamos, por curiosidad, qué orden de magnitud tendría ese error, por tantos cometido! En barras metálicas, la carga unitaria, (*F* : *S*) vale alrededor de 1 000 kg : cm² y el coeficiente de elasticidad *E*, unos 2 000 000 kg : cm²; δ es, pues, 0,000 5.

Para una variación, $\Delta t^\circ = 25^\circ$ y un coeficiente de dilatación de 0,000 012, vale $\tau = 0,000 3$.

El trabajo acumulado es, según los autores,

$$Fl \{ 0,000 25 + 0,000 30 = 0,000 550, 000 \}$$

y según el Sr. Lucía

$$Fl \{ 0,000 250, 000 + 0,000 000, 075 = 0,000 250, 075 \}$$

El error de los autores sería pues del orden de

$$Fl \times 0,000 299, 925 = \infty Fl \times 0,000 30 \quad (H)$$

superior al total del trabajo evaluado conforme al novísimo criterio!

(*) Las áreas dilatadas se valían multiplicadas por $(1 + 2\tau)$, los volúmenes por $(1 + 3\tau)$.

(**) El orden de los símbolos δ y τ recuerda el orden del proceso.

El Sr. Lucia, cree que la barra que pasa de la longitud l a $l(1 + \tau)$, efecto de calorías recibidas del exterior, no contiene más energía potencial (*) que antes. Y, sin pensar que esa barra, al enfriarse, podría al mismo tiempo desarrollar un cierto trabajo que, aun cuando nada tiene que ver con F , podemos representar por un cierto número de kilográmetros ($F\tau$), sólo cuenta como acumulada la energía

$$\frac{1}{2} Fl(1 + \tau) \delta = Fl \frac{\tau \delta}{2} + Fl \frac{\delta}{2} \quad (G)$$

que la fuerza F , creciente de un modo gradual, desarrolla al pasar la barra de

$$l(1 + \tau) \quad \text{a} \quad l(1 + \tau)(1 + \delta) = l(1 + \tau + \delta + \tau \delta)$$

Y tomando como indiscutible su evaluación, y no pudiendo negar que se pone en juego una energía Fl (o bien $F\tau(1 + \delta)$ según su cuenta) afirma el Sr. Lucia que, salvo la insignificante fracción $0,5 F\tau \delta$, todo lo demás se transforma en calor.

¿Cómo puede una energía cinética, que se desenvuelve libremente, sin traba alguna, transformarse en calor? ¿Por qué no se transforma íntegra? ¿Por qué se acumula en forma elástica, según la llama el Sr. Lucia, esa minúscula fracción ($75 : 300\,000 = 0,000\,25$) $F\tau$?

La causa del recorrido de la fuerza F no es ella misma, sino una causa completamente extraña, una cantidad de calor que se acumula en la barra. ¿Va a ser el efecto la producción de más calor?

Vuélvase la oración por pasiva, suponiendo que en lugar de aumentar disminuye la temperatura, que en vez de calorías son *frigorias* las que recibe la barra. ¿Perderá tan sólo la energía potencial $0,5 F\tau \delta$, quedándole, según el avalúo (G), $0,5 Fl \delta (1 - \tau)$ y se transformará en *frío* el trabajo (E) — $F\tau(1 + 0,5 \delta)$, que durante la contracción desarrolla la fuerza?

La capacidad de la fuerza para dilatar la barra *se agota* cuando la longitud llega a $l(1 + \delta)$. Al sobrevenir entonces una nueva causa, en absoluto *independiente*, la permanencia de F nada influye en el nuevo alargamiento (**) que, esté la barra previamente estirada o comprimida o en reposo elástico, es el mismo, porque nace exclusivamente de aquella causa, a la cual ni ayuda ni contraría la fuerza preexistente.

Afirmar que la actuación de esa fuerza *disminuye el número de calorías necesarias para dilatar la fibra* equivale a decir que los viajeros que dentro de un tren parado actuaran, mediante un mecanismo a propósito, sobre el primer enganche, dilatando los resortes de la barra de tracción, ayudarían a la locomotora al ponerse el tren en marcha y proseguir ellos forcejeando en aquel mecanismo.

El físico Joule (***) utilizó para medir el equivalente mecánico del calor, aparte de otros procedimientos, el estudio del proceso siguiente. Una barra que bruscamente sufre una tracción T y se alarga una longitud Δl , *se enfría*, perdiendo c calorías, que pasan al estado de energía potencial, sumándose con la correspondiente al trabajo $T \times \Delta l$. Suprimida también de pronto la fuerza T , recobra la barra su longitud primitiva y *se calienta*, apareciendo en-

tonces c' calorías. La diferencia ($c' - c$), siempre positiva, da un equivalente mecánico

$$e = \frac{T \times \Delta l}{c - c'} \text{ kilográmetros por caloría,}$$

que concuerda muy aproximadamente con el determinado por otros métodos. La precisión en las medidas de c y c' , por diferencias de temperatura muy pequeñas (décimas de grado) no permite mayor exactitud.

¿Qué pasa al operar gradual y no bruscamente? El trabajo producido es $0,5 T \times \Delta l$ (o, más exactamente, tiende a ese *límite inferior*, correlativo con una duración indefinida del crecimiento gradual de T) en lugar de $T \times \Delta l$. Las c calorías desaparecidas parece que debieran reducirse a $0,5 c$; pero, como según vaya enfriándose la barra puede ir recibiendo calor del aire que la rodea, dada la lentitud del proceso, deja éste de ser *adiabático*, resultando prácticamente *isotermo*. La energía acumulada ($T \times \Delta l + c : e = \epsilon$) en el proceso brusco, es, pues, en el gradual mayor que $0,5 \epsilon$. Al sobrevenir, con entera independencia de T , un aumento de temperatura, la barra acumula calorías susceptibles de transformarse en trabajo, al que se suma el desarrollado por T durante esta nueva dilatación, debida exclusivamente a aquellas calorías.

El problema es, pues, harto más complejo de lo que a primera vista parece. Al prescindir, por falta de conocimiento exacto, de la parte de energía procedente de calorías acumuladas y susceptible de transformarse en trabajo, resulta forzosamente una diferencia de evaluaciones. En el orden (δ, τ) la fuerza F obra primero gradualmente y después, en la dilatación térmica sigue actuando con *todo* su valor. En el orden (τ, δ) la fuerza *no actúa* en la primera fase, y sólo en la segunda de un modo gradual, es decir, con un valor *medio* $0,5 F$. Las evaluaciones (F) y (G) tienen que dar forzosamente resultados muy distintos, puesto que sólo comprenden los trabajos desarrollados por F , correspondientes en un caso a dos recorridos, en otro a uno sólo. ¿Puede concluirse de esa natural discrepancia entre dos magnitudes distintas que el valor (G) es exacto y el (F) erróneo?

Lo más peregrino es que, gracias a la confusión de conceptos que reina en el artículo entre las dilataciones libres y las restringidas, llega el Sr. Lucia, partiendo de una expresión errónea a otra cierta. Es esta la (4) del artículo,

$$W = \frac{n^2}{2E} \omega l \pm n \lambda_t \times \omega \times l + \frac{\lambda_t^2}{2} E \omega l$$

que, como según sus mismas notaciones, $n = E \lambda_f = \frac{F}{\omega}$, equivale a

$$\frac{1}{2} Fl \lambda_f \pm Fl \lambda_t + \frac{1}{2} (E \lambda_t \omega) \times l \lambda_t$$

El primer término es el trabajo gradualmente desarrollado por la fuerza F al producir la deformación unitaria λ_f (que reemplaza a nuestra δ). El segundo es el puesto en juego por la misma F , con todo su valor, cuando, independientemente de ella, *otra causa* origina la variación unitaria λ_t (que sustituye a nuestra τ). El doble signo corresponde a la concordancia o discordia de sentidos de δ y τ . Y el último término mide el trabajo especial desarrollado gradualmente, cuando a ello ha lugar, por la fuerza $(E \lambda_t \omega)$, que, no produce, sino restringe la variación de dimensiones simbolizada por λ_t .

La energía acumulada en la barra que, bajo la acción de una fuerza F y de una causa térmica o higrométrica, *independiente*

(*) En el artículo se la llama indiferentemente energía elástica, energía potencial y energía potencial elástica.

(**) Salvo dilatar $\delta \times \tau$, cantidad de segundo orden, la longitud τl que, no existente antes, no había sufrido la acción de F .

(***) Inglés y no francés como creen muchos, y como se supuso al dar a la unidad de trabajo el nombre de julio, que, en todo caso, debiera haber sido jaulio.

de F , sufre libremente, sin restricción, las deformaciones unitarias respectivas δ , τ , es, pues,

$$\frac{1}{2} F \delta + F \tau$$

según el Sr. Lucia, de acuerdo con todos los autores.

Otros errores de concepto contiene el referido artículo. Basten los dos fundamentales a que en éste nos limitamos.

JUAN MANUEL DE ZAFRA,
Ingeniero de Caminos.

El problema ferroviario

Consideraciones acerca de la transformación necesaria en el régimen que se sigue para su construcción y explotación.

I

Justifico mi intervención en este tema.

De todos los problemas latentes en la gestión de las Obras públicas, es en España primordial el ferroviario. Con ser tan importante y a pesar de estar planteado en la mente de muchos de nosotros los ingenieros de Caminos, apenas ha sido abordado en la REVISTA hasta hace bien poco tiempo, aun cuando en la prensa diaria emitieran opiniones multitud de entidades. Es que los ingenieros tenemos abandonado un campo de actividad mental que, en espera de nuestros esfuerzos, no da cosecha, laborado como está por ignorantes cultivadores.

Nos entregamos al estudio de estos asuntos en su fase técnica; pero entre nosotros apenas hay quien, de un modo científico sistematizado, aborde las cuestiones económicas sociales. Y, a falta de nosotros, se aplican a ello otros, en general abogados o comerciantes, especialmente comerciantes en dinero o sus representaciones, que por su idiosincrasia profesional ni han sacado ni sacarán estos problemas de su estado de oscuridad y estancamiento actual.

«Financiero» y «economista» son dos denominaciones que casi se confunden en el concepto vulgar y que son, sin embargo, casi contradictorias en realidad práctica; porque los financieros tienen por rutina una confusión, casi invencible entre los conceptos de «dinero» y «riqueza» y no hacen la discriminación necesaria entre las clases de propiedad, de donde sacan un confuso concepto que les induce a lamentables errores.

De algún tiempo a esta parte aparecen, sin embargo, en la REVISTA trabajos y estudios firmados por personas de toda autoridad, como el últimamente redactado por el ex ministro de Fomento D. Emilio Ortuño o aquéllos tan bien encauzados y documentados del inspector Bores y Romero.

Entre los escritos del Sr. Bores se insertó una cláusula que me da pie para intervenir en el asunto, porque dice:

«De sobra sabemos que en España todo lo que sea para salir de la rutina es predicar en el desierto; pero, así y todo, creemos que falta a sus deberes todo aquel que teniendo una opinión, por modestísima que sea, no contribuyera al esclarecimiento de cuestiones tan vitales para el país, y a que se forme el estado de opinión necesario para que se produzcan cambios radicales en la gestión de los negocios públicos.»

Y puesto que tengo una opinión, que tiene que ser, por ser mía, modesta, y porque mi opinión difiere radicalmente de las

expuestas, aunque sea para predicar en desierto, por no faltar a mis deberes cívicos, me veo constreñido a presentar al lector esta larga y difusa disertación.

Carácter esencial del estudio que sigue.

Si hubiera de discurrir dentro de las pautas corrientes y generalmente admitidas, como fundamento de los asuntos económicos, sería ociosa mi intervención y después de haber hablado los Sres. Ortuño, Bores y Coderch, me tocaría sólo haber escuchado atentamente, meditar lo oído y aprender en consecuencia.

Pero sucede que en los mismos principios radicales sobre los que se erige la argumentación, difiero enteramente de los que hasta ahora han expuesto sus opiniones, y de principios enteramente desacordes tengo que deducir consecuencias distintas, que el lector apreciará si son de considerar.

Porque aquellos ilustres ingenieros, como otros igualmente apreciables que han terciado en la exposición del problema, admiten principios fundamentales por transferencia del resultado del análisis que hacen los economistas a que antes me refería, que pertenecen a esferas de disciplina mental enteramente distintas de las nuestras y que admitimos, sin crítica previa, por aquella dejación de iniciativa que he señalado. Pero el armazón científico que nos endosan los pseudo economistas a la moda es una balumba de contradicciones y de burdos errores, de que no nos libramos hasta el día feliz en que tomen por su cuenta la edificación de un sistema económico tan sólido y robusto como esos otros admirables edificios lógicos que se llaman aritmética, geometría, mecánica racional los pensadores que se nutren de otras esencias del saber que los financieros. Hasta que mis compañeros no perfeccionen una *Economía política racional* no podremos nosotros los ingenieros responder de afirmaciones que aceptamos sólo porque hemos concedido a otros una mal ganada autoridad.

El problema ferroviario.

Llamamos problema ferroviario a un complejo de conflictos en que nos vemos sumidos en la gestión de los ferrocarriles. La construcción y explotación de los ferrocarriles se había hecho en España, y fuera de ella, por ciertos sistemas acerca de la solidez de cuyos fundamentos no abrigábamos dudas. Pero una larga experiencia nos va revelando que el sistema tiene inconvenientes graves y nos lleva a dificultades de imposible salvación. Con lo cual remiramos el camino andado y comenzamos a criticar aquellos sistemas de ejecución de nuestros planes. La crítica, hasta ahora, no es acerba y todavía la trama de aquellos sistemas sigue en predicamento. Son aisladas opiniones las que aprecian una relación de consecuencia entre las bases fundamentales de aquellos sistemas y estos otros obstáculos que en nuestro camino se interponen. Los cuales han sido muy bien catalogados por el señor Bores, poco más o menos como sigue:

- 1.º Que las Compañías que explotan los ferrocarriles no pueden vivir sino a costa de favores gubernamentales.
- 2.º Que no pueden aplicarse tarifas convenientes.
- 3.º Que la situación financiera de las Compañías no las permite mejorar o ampliar sus instalaciones, en la medida demandada por las necesidades del tráfico.
- 4.º Que las escasísimas líneas en construcción no llevan una marcha desembarazada.
- 5.º Que el Estado no encuentra concesionarios para construir y explotar los restantes ferrocarriles de sus planes; y
- 6.º Que no hay que pensar en reformas técnicas, que, sin embargo, se imponen, como la adopción del ancho europeo o la electrificación.