Año LXVIII — Madrid 21 de octubre de 1920 — Núm. 2352

REVISTA DE OBRAS PÚBLICAS

PUBLICACION TECNICA DEL CUERPO DE INGENIEROS DE CAMINOS, CANALES Y PUERTOS

DIRECTOR

D. MANUEL MALUQUER Y SALVADOR

COLABORADORES

LOS INGENIEROS DE CAMINOS, CANALES Y PUERTOS

SE PUBLICA LOS JUEVES — Dirección y Administración: Plaza de Oriente, 6, primero derecha.

MECÁNICA ELÁSTICA

Trabajo térmico y elástico.

Las hipótesis hechas en este trabajo, que han de servirnos de fundamento para todo lo que más adelante se establecerá, son las siguientes:

1.ª Un elemento de materia, no sometido a fuerza elástica ninguna, tiene para cada temperatura un volumen determinado. La energía elástica contenida en ese elemento es nula.

2.ª Un elemento de materia mantenido a temperatura constante y sometido a fuerzas elásticas toma un volumen único para cada valor de esas fuerzas. Tiene también una energía potencial elástica única para cada valor de las mismas.

Consecuencia de estas dos hipótesis es que para cada temperatura y cada valor de las fuerzas elásticas un elemento de materia tiene un determinado volumen y encierra una cierta cantidad de energía elástica.

Llamaremos volumen *propio* de un elemento a la temperatura t, el que a esa temperatura corresponde cuando el elemento no sufre carga alguna.

Siempre que el volumen sea distinto del propio que a su temperatura corresponde, el elemento está sometido a la acción de fuerzas y posee una energía elástica determinada.

Deformación libre.

Consideremos primero el caso sencillo de una *fibra* recta y homogénea de materia, de sección ω y longitud *propia* l a la temperatura t°.

Sometida esta fibra a tracción simple por la acción de dos fuerzas F, su longitud se convierte en

$$l\left(1+\frac{F}{E\omega}\right)$$

siendo E el coeficiente de elasticidad longitudinal del material.

El trabajo realizado por las fuerzas F durante la deformación vale

$$W=\int_0^F f\times dl=\int_0^F f\times l\times\frac{df}{E\omega}=\frac{F^2\times l}{2E\omega}$$

en el supuesto—que siempre admitiremos—de que las fuerzas obran de un modo gradual y lento, produciendo en cada instante deformaciones proporcionales.

Queda, pues, caracterizado el estado de la fibra a la temperatura t°, sometida a tracción simple por las fuerzas F, por tener una longitud

$$l\left(1+\frac{F}{E\omega}\right)$$

y una energía elástica

$$W=\frac{F^2 l}{2E\omega}$$

(Prescindimos del pequeño estrechamiento de la sección transversal ω que acompaña al alargamiento de la fibra.)

La misma fibra, a la temperatura $t+\Delta t$, tendrá una longitud propia

$$l(1+\lambda_{\Delta t})=l(1+\alpha\times\Delta t)$$

siendo α el coeficiente de dilatación longitudinal.

Al aplicarle como antes las fuerzas F, su longitud se convertirá en

$$l(1+\alpha\times\Delta t)\left(1+\frac{F}{E\omega}\right)$$

y encerrará una cantidad de energía elástica

$$W'=\frac{F^2\times l(1+\alpha\times\Delta t)}{2E\times\omega}$$

Pero, por otra parte, si se calienta la fibra de la temperatura t a la $t+\Delta t$ estando ya actuando las fuerzas F, es preciso, en virtud de las hipótesis hechas, que lleguemos a un estado de equilibrio final igual al anterior, es decir, con la misma longitud

$$l(1+\alpha\times\Delta t)\left(1+\frac{F}{E\omega}\right)$$

y la misma energía potencial

$$\frac{F^2 l(1+\alpha\times\Delta t)}{2E\omega}$$

Durante la dilatación las fuerzas F realizan el trabajo

$$F\times l\left[(1+\alpha\times\Delta t)\left(1+\frac{F}{E\omega}\right)-\left(1+\frac{F}{E\omega}\right)\right]$$

o sea

$$F\times l\times\alpha\times\Delta t+\frac{F^2\times l\times\alpha\times\Delta t}{E\omega}$$

y como la diferencia de las energías potenciales elásticas en los dos estados es sólo

$$W'-W=\frac{F^2 l(1+\alpha\times\Delta t)}{2E\omega}-\frac{F^2 l}{2E\omega}=\frac{F^2 l\times\alpha\times\Delta t}{2E\omega}$$

resulta que *sólo una parte del trabajo de las fuerzas F durante la dilatación se convierte en energía elástica.* Otra parte de ese trabajo, que vale

$$F \times l \times \alpha \times \Delta t + \frac{F^2 l \times \alpha \times \Delta t}{E\omega} - \frac{F^2 l \times \alpha \times \Delta t}{2E\omega} =$$
$$= F \times l \times \alpha \times \Delta t + \frac{F^2 \times l \times \alpha \times \Delta t}{2E\omega}$$

se encuentra convertida en calor, es decir: *ha venido a disminuir el número de calorías necesarias para dilatar la fibra.*

Resumiendo todo este estudio previo de la deformación libre de una fibra podemos decir.

1.° Que el estado elástico de una fibra de longitud propia l y sección ω a la temperatura t°, sometida a tracción simple por las fuerzas F viene definido por su longitud

$$l\left(1 + \frac{F}{E\omega}\right)$$

y la energía elástica;

$$W = \frac{F^2 l}{2E\omega}$$

2.° Si esta fibra en estado elástico sufre un aumento de temperatura, su incremento de energía potencial elástica es sólo

$$\frac{F^2 l \times \lambda_{\Delta t}}{2E\omega} = \frac{F^2 l \times \alpha \times \Delta t}{2E\omega}$$

y no

$$F \times l \times \lambda_{\Delta t} = F \times l \times \alpha \times \Delta t$$

como en algunos Tratados de Mecánica parece suponerse.

Deformación contrariada.

Una fibra de materia que posee a la temperatura t su longitud *propia* l, ya sabemos que no encierra ninguna energía elástica. Pero si en vez de esta longitud l tiene otra

$$l' = l(1 \pm \lambda)$$

poseerá una energía potencial que es muy fácil el determinar.

El esfuerzo unitario correspondiente a la deformación unitaria λ es

$$\frac{F}{\omega} = \lambda \times E$$

El trabajo almacenado es, por lo tanto, según lo establecido antes

$$\frac{F^2 l}{2E\omega}$$

o sea efectuando operaciones

$$W = \frac{\lambda^2 E \times \omega \times l}{2} \qquad [1]$$

Esta fórmula es completamente general; nos da la energía potencial elástica contenida en una fibra de longitud propia l, y sección ω, que sufre una deformación unitaria λ.

¿Qué causas pueden producir esa deformación unitaria λ? Pueden ser: 1) fuerzas exteriores F; este es el caso que antes hemos considerado; 2) cambios de longitud de la fibra *contrariados*; 3) las dos causas anteriores simultáneamente.

Estudiemos este último caso, que es el más general. Supongamos una fibra que a la temperatura t° tendría la longitud propia l. A esta fibra se la *obliga* a tener una longitud

$$l(1 \pm \lambda_t)$$

y además se la somete a la acción de fuerzas, que hacen en definitiva su longitud

$$l(1 \pm \lambda_t)(1 \pm \lambda_f)$$

o sea

$$l(1 \pm \lambda_t \pm \lambda_f)$$

depreciando el término de segundo orden $\lambda_t \times \lambda_f$.

Esta fibra así deformada encierra, según la fórmula [1], una energía elástica

$$W = \frac{(\lambda_t \pm \lambda_f)^2 E\omega l}{2} \qquad [2]$$

No hay que olvidar que λ_t, es debido a alteraciones de longitud (por cambios de temperatura, de estado higrométrico, etc.), que no se deja que actúen libremente, resultando así deformaciones forzadas; en el caso de cambios de temperatura, λ_t es una dilatación cuando el cuerpo se enfría y no se le permite contraerse, y una compresión cuando se calienta sin consentirle la dilatación.

En cuanto a la deformación unitaria λ_f es producida por las fuerzas exteriores. Si es n el valor de la carga unitaria en la fibra

$$\lambda_f = \frac{n}{E}$$

y la expresión de la energía potencial se convierte en

$$W = \frac{\left(\lambda_t \pm \frac{n}{E}\right)^2 E \times \omega l}{2} \qquad [3]$$

Esta fórmula [3] desarrollada da

$$W = \frac{n^2}{2E}\omega l \pm n\lambda_t \times \omega \times l + \frac{\lambda_t^2}{2} E\omega l \qquad [4]$$

expresión general de la energía elástica contenida en una fibra de longitud propia l *y sección* ω, *sometida a una carga unitaria* n *y a una deformación unitaria forzada* λ_t.

La expresión [4] será la que utilicemos en las aplicaciones que ahora vamos a hacer de estos resultados obtenidos; en ella el signo + corresponde a valores de n y λ_t en el mismo sentido, y el signo — a valores en sentidos contrarios.

Aplicaciones.

TRACCIÓN O COMPLEXIÓN SIMPLE

Una pieza prismática de sección Ω fija en sus extremos tiene la longitud l.

Si la temperatura se eleva o desciende en Δt°, la pieza *tomaría* una longitud

$$l(1 \pm \alpha \times \Delta t)$$

Hay, por consiguiente, una deformación unitaria forzada

$$\pm \lambda_t = \mp \frac{l\alpha \times \Delta t}{l} = \mp \alpha \times \Delta t$$

Para hallar la energía elástica hagamos en la fórmula [4] $n = 0$, y resulta

$$W = \frac{\alpha^2 \times \Delta t^2}{2} E\Sigma\omega \times l$$

o sea

$$W = \frac{\alpha^2 \times \Delta t^2}{2} \times E \times \Omega \times l$$

Supongamos la misma pieza sometida además a tracción o compresión simple por la fuerza $\pm F$. La energía elástica total es en este caso

$$W = \frac{F^2}{2E\Omega} l \mp F \times \alpha \times \Delta t \times l + \frac{\alpha^2 \Delta t^2}{2} E \Omega l$$

FLEXIÓN SENCILLA

Prescindamos para este estudio de las cargas tangenciales. Su influencia en la energía elástica contenida en una pieza prismática de fibra media plana sometida a flexión sencilla, es en la mayor parte de los casos de la práctica lo suficientemente pequeña para que sea permitido no tenerla en cuenta. En una fibra cualquiera, a una profundidad z, bajo la línea neutra la carga unitaria es

$$n = \frac{N}{\Omega} + \frac{Mz}{I}$$

N = esfuerzo normal en la sección.
M = momento flector.
Ω = área de la sección.
I = momento de inercia de la misma.

Considerando la longitud de fibra elemental contenida entre dos secciones distantes entre sí $d\,L$, el primer término de la ecuación [4] se convierte en

$$\frac{1}{2}\left(\frac{N^2}{\Omega^2} + 2\frac{N}{\Omega} \times \frac{M}{I} \times z + \frac{M^2}{I^2} \times z^2\right) \frac{d\Omega \times dL}{E}$$

Si queremos hallar el valor de este término extendido a toda la rebanada comprendida entre las dos secciones infinitamente próximas, tendremos que calcular la expresión

$$\frac{dL}{2E}\int_\Omega \left(\frac{N^2}{\Omega^2} + \frac{2N}{\Omega} \times \frac{M}{I} \times z + \frac{M^2}{I^2} \times z^2\right) d\Omega$$

Como la línea neutra pasa por el centro de gravedad de la sección

$$\int_\Omega z d\Omega = 0 \qquad \int_\Omega z^2 d\Omega = I$$

y la integral anterior resulta:

$$\frac{dL}{2E}\left[\frac{N^2}{\Omega} + \frac{M^2}{I}\right]$$

Calculemos ahora los otros dos términos de la igualdad [4], para el caso que consideramos. Hay que admitir una cierta ley de variación de las deformaciones unitarias forzadas λ_t en las diversas fibras y secciones de la pieza flectada.

Supongamos que en una sección cualquiera λ_t varía linealmente desde λ_i en la fibra inferior hasta λ_s en la superior, tomando el valor λ_0 en la fibra media, entonces, si es c la altura de la sección

$$\lambda = \lambda_0 + \frac{\lambda_i - \lambda_s}{c} \times z$$

(Es preciso tener siempre en cuenta que los valores positivos de z se cuentan de arriba abajo.)

El segundo término de la fórmula [4] para una fibra elemental se convierte en

$$\left(\frac{N}{\Omega} + \frac{Mz}{I}\right)\left(\lambda_0 + \frac{\lambda_i - \lambda_s}{c} z\right) d\Omega \times dL$$

y extendido a una rebanada elemental resulta

$$dL \int_\Omega \left(\frac{N}{\Omega} + \frac{Mz}{I}\right)\left(\lambda_0 + \frac{\lambda_i - \lambda_s}{c} \times z\right) d\Omega$$

o sea teniendo en cuenta los valores de los integrales en z

$$dL\left[N\lambda_0 + M\frac{\lambda_i - \lambda_s}{c}\right]$$

Por último, el tercer término de la fórmula [4] para una fibra es

$$\frac{1}{2}\left(\lambda_0 + \frac{\lambda_i - \lambda_s}{c} z\right)^2 E \times d\Omega \times dL = \frac{\lambda_0^2}{2} E \times d\Omega \times dL +$$
$$+ \lambda_0 \times \frac{\lambda_i - \lambda_s}{c} \times zEd\Omega \times dL + \frac{(\lambda_i - \lambda_s)^2}{2c^2} z^2 E d\Omega \times dL$$

Integrando en una rebanada, se obtiene

$$\left[\frac{\lambda_0^2 E \times \Omega}{2} + \frac{(\lambda_i - \lambda_s)^2}{2c^2} EI\right] dL$$

En resumen: en una pieza sometida a flexión *sencilla* y a una deformación contrariada, la energía elástica contenida entre dos secciones infinitamente próximas, vale:

$$dW = \left[\frac{N^2}{\Omega} + \frac{M^2}{I}\right]\frac{dL}{2E} + \left[N\lambda_0 + M\frac{\lambda_i - \lambda_s}{c}\right] dL +$$
$$+ \left[\frac{\lambda_0^2 E \times \Omega}{2} + \frac{(\lambda_i - \lambda_s)^2}{2c^2} EI\right] dL$$

Y si queremos hallar el valor de la energía elástica en toda la pieza, tendremos que integrar la expresión anterior a todo lo largo de su longitud L. Resulta

$$W = \int \frac{N^2}{2E\Omega} \times dL + \int \frac{M^2}{2EI} dL + \int N\lambda_0 dL +$$
$$+ \int M\frac{\lambda_i - \lambda_s}{c} dL + \int \frac{\lambda_0^2}{2} E \times \Omega dL +$$
$$+ \int \left(\frac{\lambda_i - \lambda_s}{c}\right)^2 \frac{EI}{2} \times dL \qquad [5]$$

Esta es la expresión *completa* (prescindiendo únicamente del término $\int x \frac{T^2}{2E_t \times \Omega} dL$, debido al esfuerzo tangencial T) que nos da la energía elástica contenida en una pieza prismática *a un tiempo sometida a flexión y a las deformaciones unitarias forzadas* λ.

Tomando estas deformaciones λ con la significación que hasta ahora las venimos dando, es decir: *deformaciones en la longitud propia producidas por cambios de longitud contrariados*, no pueden ser exactas las fórmulas que dan para W algunos autores, en las que faltan los dos últimos términos

$$\int \frac{\lambda_0^2}{2} E \times \Omega \times dL + \int \left(\frac{\lambda_i - \lambda_s}{c}\right)^2 \frac{EI}{2} dL$$

Y es bien evidente que no pueden faltar estos términos, pues, en caso contrario, si hacemos cero las fuerzas exteriores $N = 0$ y $M = 0$, y al sustituír en la fórmula

$$W = 0$$

Pero esto es falso, las deformaciones forzadas que sufre la pieza producen siempre en ella cierta cantidad de energía elástica, aunque las fuerzas exteriores que originan la flexión lleguen a anularse.

No se llega a este absurdo con la fórmula [5]; pues aunque $N = M = 0$, siempre subsisten los dos últimos términos que dan un valor distinto de cero para W.

Estudio de las deformaciones contrariadas en la pieza prismática.

Vamos a estudiar precisamente este caso: aquel en que no hay más deformaciones que las producidas al *impedir* los cambios de volumen.

La energía elástica W en la pieza prismática es entonces (fórmula [5]).

$$W_t = \int \frac{\lambda_0^2}{2} E \times \Omega \times dL + \int \left[\frac{\lambda_i - \lambda_s}{c}\right]^2 \frac{EI}{2} dL \qquad [6]$$

Observemos que en esta igualdad λ_0, λ_i y λ_s, deformaciones *reales* forzadas que sufren las fibras, son desconocidas, pues lo único que podemos conocer son las variaciones de longitud que los cambios de temperatura u otros harían tomar a la pieza, caso de poder deformarse libremente.

Si es λ la deformación unitaria forzada en un punto cualquiera de una sección, a la distancia z bajo la fibra neutra, el esfuerzo unitario que sufre el material en aquel punto es

$$n_t = E \times \lambda = E\left(\lambda_0 + \frac{\lambda_i - \lambda_s}{c} \times z\right)$$

Componiendo todos los esfuerzos elementales $n_t \times d\,\Omega$ en una sección, encontramos para resultante de todos ellos: una fuerza normal

$$N_t = \int_\Omega E\lambda_0\, d\,\Omega + \int_\Omega E \frac{\lambda_i - \lambda_s}{c} z d\,\Omega = E\lambda_0 \times \Omega \qquad [7]$$

y un par

$$M_t = \int_\Omega E\lambda_0\, z d\,\Omega + \int E \frac{\lambda_i - \lambda_s}{c} z^2 d\,\Omega = EI \frac{\lambda_i - \lambda_s}{c} \qquad [8]$$

Por consiguiente, *el estado elástico de una pieza prismática sometida a una deformación contrariada es el mismo que produciría en cada sección un esfuerzo normal* N_t *y un momento flector* M_t, *dados por las igualdades* [7] y [8].

Este resultado, por otra parte, es evidente; la dificultad no está en relacionar N_t y M_t con las deformaciones *reales*, sino con las que tomaría la pieza de poder deformarse con libertad.

En el caso más general, la pieza prismática estará sustentada en tal forma que resulten n reacciones elementales de sustentación.

Si de estas reacciones elementales no existieran sino tres, las únicas que puede determinar la estática, el cuerpo cambiará libremente de longitud en todas sus fibras al producirse el cambio, que supondremos, por ejemplo, de temperatura. No pudiendo ser así a causa de la sustentación hiperestática, al contrariarse los cambios de volumen, al mismo tiempo que las deformaciones λ, se originan en los apoyos determinadas reacciones.

Sean éstas

$$R'_t,\ R''_t,\ R'''_t,\ \ldots..,\ R^{(k)}_t,\ \ldots..,\ R^{(n)}_t$$

El esfuerzo normal N_t y el momento flector M_t en cada sección serán funciones de estas reacciones, y serán funciones conocidas desde el momento que se sepa la forma de sustentación de la pieza.

Por consiguiente, si en la ecuación [6] ponemos en vez de λ_0 y $(\lambda_i - \lambda_s)$ sus valores deducidos de las igualdades [7] y [8] resulta

$$W_t = \int \frac{N_t^2}{2E\Omega} dL + \int \frac{M_t^2}{2EI} dL \qquad [9]$$

y en esta expresión resulta también W_t función de las reacciones

$$R'_t,\ R''_t,\ \ldots..,\ R^{(k)}_t,\ \ldots..,\ R^{(n)}_t$$

Tomemos de estas n reacciones elementales, tres de ellas arbitrariamente; si suponemos que las $n - 3$ restantes desapareciesen, el cuerpo al ocurrir el cambio de temperatura cambiaría de forma con libertad.

El punto de aplicación de una cualquiera de las reacciones hiperestáticas $R_t^{(k)}$ recorrería una distancia $-r_t^{(k)}$ en la dirección de $R_t^{(k)}$ y en sentido contrario al de esta fuerza. Para llevar al cuerpo a su posición real puede suponerse que las $n - 3$ reacciones hiperestáticas han tenido que desarrollar un trabajo, en *todas positivo*, que en total vale

$$W_t = \frac{1}{2} \sum_0^n R_t^{(k)} \times r_t^{(k)}$$

existiendo el coeficiente $^1/_2$ por el hecho de ser, como siempre, las acciones graduales y las deformaciones instantáneas proporcionales a ellas.

Ahora bien, hecha la hipótesis de que la pieza prismática ha llegado al estado final por el proceso arriba indicado, el teorema de Castigliano nos dice que para una cualquiera de las reacciones indeterminadas

$$r_t^{(k)} = \frac{dW_t}{dR_t^{(k)}}$$

Sustituyendo aquí su vez de W_t su valor dado por la igualdad [9] resulta

$$r_t^{(k)} = \int \frac{N_t}{E\Omega} \frac{dN_t}{dR_t^{(k)}} dL + \int \frac{M_t}{EI} \frac{dM_t}{dR_t^{(k)}} dL \qquad [10]$$

¿Cómo podemos hallar ahora $r_t^{(k)}$, conocidas las alteraciones ambientes? Supongamos que los cambios de temperatura, higrométricos, o como sean, tiende a producir en las fibras centrales una deformación unitaria Δ_0, y una diferencia de deformaciones unitarias $(\Delta_i - \Delta_s)$ en las fibras extremas; estos valores de Δ pueden ser constantes en todas las secciones o variables de una a otra. Pero aun en este último caso, ha de ser conocida esa ley de variación.

Al dejar al cuerpo deformarse libremente, soportado sólo por las tres reacciones elementales escogidas, tomará la misma forma que le hubieran hecho tomar: un esfuerzo normal *ficticio*

$$N'_0 = E\Delta_0 \times \Omega$$

y un momento flector *ficticio*

$$M'_0 = EI \cdot \frac{\Delta_i - \Delta_s}{c}$$

en cada una de las secciones de la pieza.

Por lo tanto, la deformación en el punto de aplicación $R_t^{(k)}$, en su dirección y en *sentido contrario*, será en valor absoluto

$$r_t^{(k)} = \int \frac{N'_0}{E\Omega} \times N'_1 dL + \int \frac{M'_0}{EI} M'_1 dL \qquad [11]$$

siendo N'_1 y M'_1 el esfuerzo normal y el momento flector que una fuerza igual a 1, en el punto de aplicación de $R_t^{(k)}$, con su dirección y en *sentido contrario*, produciría en una sección cualquiera.

Pero según uno de los teoremas conocidos de la Mecánica Elástica

$$N'_1 = -\frac{dN_t}{dR_t^{(k)}} \qquad M'_1 = -\frac{dM_t}{dR_t^{(k)}}$$

Por consiguiente, sustituyendo en la igualdad [11], se encuentra

$$r_t^{(k)} = -\int \frac{N'_0}{E\Omega} \times \frac{dN_t}{dR_t^{(k)}} \times dL - \int \frac{M'_0}{EI} \frac{dM_t}{dR_t} dL$$

o sea

$$r_t^{(k)} = -\int \Delta_0 \frac{dN_t}{dR_t^{(k)}} dL - \int \frac{\Delta_i - \Delta_s}{c} \frac{dM_t}{dR_t} dL \quad [12]$$

Igualando las dos expresiones [10] y [12] de $r_t^{(k)}$, resulta en definitiva

$$\int \frac{N_t}{E\Omega} \frac{dN_t}{dR_t^{(k)}} dL + \int \frac{M_t}{EI} \frac{dM_t}{dR_t^{(k)}} dL + \int \Delta_0 \frac{dN_t}{dR_t^{(k)}} dL + $$

$$+ \int \frac{\Delta_i - \Delta_s}{c} \frac{dM_t}{dR_t} dL = 0 \quad [13]$$

Análoga a la ecuación [13] podremos escribir otras $n - 4$ para las restantes reaciones elementales indeterminadas. Como en estas ecuaciones, todo es función de

$$R'_t, R''_t, \ldots\ldots, R^{(k)}_t, \ldots\ldots, R^{(n)}_t$$

con ellas y las tres ecuaciones de la Estática, se pueden determinar las n reacciones de sustentación.

Vemos, pues, cuál es el método a seguir para hallar las reacciones de sustentación producidas por cambios de temperatura, higrométricos u otros, en una pieza prismática hiperestáticamente sustentada.

No hay que olvidar que en la fórmula [13], Δ_0 y $(\Delta_i - \Delta_s)$, *son las deformaciones que se producirían si el cuerpo pudiese deformarse libremente*. Es decir, serán positivas en el caso, por ejemplo, de aumento de temperatura, negativas en el caso de enfriamiento.

*
* *

Una vez halladas las reacciones R'_t, R''_t, ..., $R_t^{(n)}$ en la pieza prismática de deformación contrariada, son conocidos en cada sección N_t y M_t ; pueden, pues, determinarse los esfuerzos unitarios en cada punto de cada sección, y por ende el esfuerzo unitario máximo en la pieza.

Para terminar el estudio de ésta, no queda sino el calcular las deformaciones en los diversos puntos.

Admitiremos, como anteriormente, que se llega al estado final por un proceso que comprende dos partes: 1) una deformación libre, con apoyo en tres reacciones elementales; 2) una deformación y un trabajo realizado por las reacciones hiperestáticas, al volver sus puntos de aplicación al lugar donde deben estar.

Durante el primer período, en un lugar y en una dirección y sentido que simbolizaremos con 1, hay una deformación

$$\eta' = \int \frac{N'_0}{E\Omega} \left(\frac{dN'_0}{d\,1}\right) dL + \int \frac{M'_0}{EI} \left(\frac{dM'_0}{d\,1}\right) dL$$

representado por $\left(\frac{dN'_0}{d\,1}\right)$ y $\left(\frac{dM'_0}{d\,1}\right)$ el esfuerzo normal y el momento flector producidos en una sección cualquiera por una fuerza unidad, obrando en el lugar, dirección y sentido 1.

En el segundo período, al llevar al cuerpo a su posición real, se superpone a esta deformación otra η'', que vale

$$\eta'' = \int \frac{N_t}{E\Omega} \left(\frac{dN_t}{d\,1}\right) dL + \int \frac{M_t}{EI} \left(\frac{dM_t}{d\,1}\right) dL$$

siendo

$$\left(\frac{dN_t}{d\,1}\right) = \left(\frac{dN'_0}{d\,1}\right) \qquad \left(\frac{dM_t}{d\,1}\right) = \left(\frac{dM'_0}{d\,1}\right)$$

y teniendo ambos la significación antes dicha.

En definitiva, la deformación total en el lugar, dirección y sentido 1, es

$$\eta = \eta' + \eta'' = \int \frac{N'_0}{E\Omega} \left(\frac{dN_t}{d\,1}\right) dL + \int \frac{M'_0}{EI} \left(\frac{dM_t}{d\,1}\right) dL +$$

$$+ \int \frac{N_t}{E\Omega} \left(\frac{dN_t}{d\,1}\right) dL + \int \frac{M_t}{EI} \left(\frac{dM_t}{d\,1}\right) dL$$

o sea sustituyendo en vez de N'_0 y M'_0 sus valores en función de Δ

$$\eta = \int \Delta_0 \left(\frac{dN_t}{d\,1}\right) dL + \int \frac{\Delta_i - \Delta_s}{c} \left(\frac{dM_t}{d\,1}\right) dL +$$

$$+ \int \frac{N_t}{E\Omega} \left(\frac{dN_t}{d\,1}\right) dL + \int \frac{M_t}{EI} \left(\frac{dM_t}{d\,1}\right) dL \quad [14]$$

En esta ecuación [14] no hay que olvidar el significado de las deformaciones unitarias Δ ni el de los símbolos $\left(\frac{dN_t}{d\,1}\right)$, $\left(\frac{dM_t}{d\,1}\right)$ esfuerzo normal y momento flector en una sección cualquiera, producidos por una fuerza unidad obrando en el lugar, dirección y sentido 1, en el cual lugar, dirección y sentido se busca la deformación η.

Resumen. Resumiendo los resultados del estudio de una pieza prismática de fibra media plana, con sustentación hiperestática, estando todas las reacciones elementales en el plano de la fibra media (son estas suposiciones implícitas en todo el cálculo), vemos que al contrariarse en esa pieza los cambios de volumen que alteraciones de t^a u otras tienden a producir, se originan:

1.° Reacciones R'_t, R''_t, ..., $R_t^{(k)}$, ..., $R_t^{(n)}$; estas reacciones se determinan con las tres ecuaciones de la Estática, y con otras $(n - 3)$ de la forma:

$$\int \frac{N_t}{E\Omega} \frac{dN_t}{dR_t^{(k)}} dL + \int \frac{M_t}{EI} \frac{dM_t}{dR_t^{(k)}} dL + \int \Delta_0 \frac{dN_t}{dR_t^{(k)}} dL +$$

$$+ \int \frac{\Delta_i - \Delta_s}{c} \frac{dM_t}{dR_t} dL = 0$$

En esta expresión N_t y M_t son funciones conocidas de las reacciones; Δ_0 y $(\Delta_i - \Delta_s)$ son por hipótesis datos del problema.

2.° Esfuerzos elásticos en el material; se calculan sus valores unitarios una vez conocidos N_t y M_t (en función de R'_t, R''_t. ....., $R_t^{(n)}$ ya determinadas) por las fórmulas clásicas de Resistencia de los Materiales.

3.° Deformaciones reales en el conjunto de la pieza.

En un lugar, dirección y sentido 1, su valor es

$$\eta = \int \Delta_0 \left(\frac{dN_t}{d\,1}\right) dL + \int \frac{\Delta_i - \Delta_s}{c} \left(\frac{dM_t}{d\,1}\right) dL +$$

$$+ \int \frac{N_t}{E\Omega} \left(\frac{dN_t}{d\,1}\right) dL + \int \frac{M_t}{EI} \left(\frac{dM_t}{d\,1}\right) dL$$

teniendo los símbolos

$$\left(\frac{dN_t}{d\,1}\right) \quad \text{y} \quad \left(\frac{dM_t}{d\,1}\right)$$

las significaciones ya indicadas.

Pedro José Lucía,
Ingeniero de Caminos.

Madrid, Octubre 1919.