

# REVISTA DE OBRAS PÚBLICAS

PUBLICACION TECNICA DEL CUERPO DE INGENIEROS DE CAMINOS, CANALES Y PUERTOS

DIRECTOR

D. MANUEL MALUQUER Y SALVADOR

COLABORADORES

LOS INGENIEROS DE CAMINOS, CANALES Y PUERTOS

SE PUBLICA LOS JUEVES

Dirección y Administración: Plaza de Oriente, 6, primero derecha.

## El postulado de Euclides y las geometrías no euclídeas.

Conferencias dadas ante la Sociedad española de Matemáticas en la Facultad de Ciencias de la Universidad Central, por D. Pedro M. González Quijano, ingeniero de Caminos.

(CONTINUACIÓN) (1)

### II

El primero y más esencial de los postulados de la Geometría, por lo menos de la geometría métrica, es un postulado que ordinariamente no se formula, pero que se encuentra implícito en la mayor parte de las demostraciones: es el postulado de posibilidad del movimiento sin deformación. En él se funda la definición y la medida de líneas y superficies, la evaluación de los ángulos, la comparación, en una palabra, entre los elementos de las figuras, comparación que es uno de los objetos esenciales de la ciencia.

El concepto es, sin duda, de origen experimental y se funda sobre las propiedades de los cuerpos sólidos. No observamos en ellos ninguna variación durante el reposo, y, cuando los movimientos, la experiencia nos demuestra que al volver sobre sus apoyos coinciden, hasta el grado de apreciación que alcanzan nuestros sentidos, con sus posiciones primitivas. La igualdad de los sólidos, una vez comprobada, se encuentra además ser independiente de la posición en que puedan colocarse.

Estas propiedades, groseramente reveladas por los sentidos, son comprobadas más tarde por mediciones más precisas. Al aumentar la precisión, algunas divergencias se notan sin embargo; pero son pequeñas, y de ordinario explicables por fenómenos concomitantes cuyas leyes son conocidas y constantes.

La ciencia abstracta prescinde de estas pequeñas anomalías, y recogiendo sólo las modalidades de forma y de magnitud, elabora el concepto de sólido invariable, que es objeto propio de la Geometría. Esta invariabilidad es, sin embargo, no lo olvidemos, un enunciado hipotético en el que se encierran como en síntesis las propiedades experimentadas.

Se concibe, en efecto, que los cuerpos pudieran variar al moverse de forma y de magnitud; pero de tal modo que una y otra propiedad, dependientes de la posición, cambiasen de igual manera en todos los cuerpos y llegaran a verificarse entre ellos al llegar al contacto iguales coincidencias. Presentes al espectáculo, todavía

nuestros sentidos podrían revelarnos los cambios, pero si nuestro cuerpo mismo formaba parte del sistema, si los rayos de luz y las radiaciones sonoras, siguiendo caminos más o menos caprichosos, vinieran también a contribuir a nuestra ilusión, en este mundo sin cesar cambiante, nos parecería comprobar las mismas constancias que experimentamos en el nuestro, y, prescindiendo de diferencias inasequibles, acabaríamos por llamar sólidos a cuerpos en deformación continua.

Cuando así ocurriera, no por eso los seres condenados a esa eterna ilusión dejarían de tener una geometría, que podría hasta ser la misma nuestra si las variaciones concordantes de los cuerpos así lo permitieran, pero que nada indica *a priori* que no pudiera ser diferente. Para que tuviera lugar la identidad sería preciso todavía que se verificaran otros postulados. Se supone, en efecto, en nuestra geometría que existen líneas que quedan completamente determinadas por dos de sus puntos; estas líneas son todas iguales y puede hacerse pasar una y una sola por dos puntos cualesquiera del espacio; son además infinitas o infinitamente prolongables; a estas líneas se las conoce con el nombre de líneas rectas.

Si una recta se mueve alrededor de uno de sus puntos, apoyándose sobre una recta exterior a él, el conjunto de todas sus posiciones constituye una superficie, y si en esta superficie se escogen dos puntos cualesquiera, la recta que pasa por estos dos puntos está toda ella contenida en la superficie. Las superficies así definidas reciben el nombre de planos.

Si en un plano se mueve un segmento rectilíneo manteniendo fijo uno de sus extremos, que se llamará centro, el conjunto de todas las posiciones del extremo libre es una línea: a esta línea se le llama circunferencia y al segmento radio, y es posible siempre desde cualquier centro y con cualquier radio trazar una circunferencia.

Se verifica también en nuestra geometría que las líneas, las superficies y el espacio mismo son continuos, es decir, que por limitada que sea la parte que consideremos de una de estas figuras, es siempre posible separar de ella otra más pequeña. Inversamente, por pequeña que sea una figura, es posible siempre, agrupando figuras iguales a ella y en número finito, llegar a envolver a otra figura cualquiera por grande que sea.

A estos postulados generales es preciso todavía añadir el postulado de Euclides para fundar nuestra geometría.

¿Son compatibles todos estos postulados? ¿No existirá quizás entre ellos alguna contradicción interna? La experiencia parece revelárnoslos, no sólo como posibles, sino como reales: es ella la

(1) Véanse los números 2327 y 2328.

que nos ha inducido a formularlos. Los desarrollos lógicos de que han sido objeto en consecuencias innumerables y cada vez más complicadas durante más de dos mil años de historia científica, parece que deban alejar las dudas a este respecto; pero si pudiera quedar el más ligero temor de que la evidencia de nuestras intuiciones, fundada sobre engañosas ilusiones sensoriales, se introdujera en nuestros razonamientos aun a pesar nuestro, alejando en cada momento la contradicción a punto de producirse, ahí tenemos la geometría analítica que, reduciendo todas las propiedades de las figuras a simples hechos numéricos, nos ofrece nuevas garantías contra las imperfecciones experimentales, dando entrada a los resultados en los más elevados dominios de la humana certeza.

Todo esto supuesto, la cuestión del postulado de Euclides se presenta a nuestra consideración bajo la siguiente forma: ¿Es posible, es decir, es concebible que verificándose todos los demás postulados en que se funda nuestra geometría, el postulado de Euclides deje de verificarse? O en otros términos: ¿Cabe imaginar una geometría no euclídea que satisfaga, sin embargo, a los demás postulados? Porque si la contestación es afirmativa, evidente es que el postulado no podrá llegar a demostrarse, y si fuera negativa, sería porque se probará alguna contradicción en esta hipótesis, con lo cual *ipso facto* quedaría demostrada la exactitud del postulado.

Para abordar el asunto empezaremos por limitarlo al caso de la geometría plana o de dos dimensiones y para prescindir de consideraciones intuitivas, que pudieran introducir encubiertos postulados en nuestros razonamientos, procuraremos, por el contrario, reducir los postulados admitidos a términos de geometría analítica, sin que de ésta admitamos tampoco, por el momento, más proposiciones que las que son independientes de la teoría de las paralelas.

Ya, desde luego, los postulados de continuidad permiten representar el plano, cualquiera que él sea, por un sistema de dos coordenadas  $u$  y  $v$ . Para formular de modo explícito el postulado del movimiento, es preciso fijar un criterio que nos permita juzgar de la permanencia de las figuras, y como las figuras se reducen en definitiva a puntos, lo que será necesario es un medio de comprobar la invariancia del sistema de dos puntos. Un sistema de dos puntos está caracterizado en nuestra geometría por la distancia que los separa; pero esta noción de distancia es ya demasiado compleja. La distancia envuelve ya la noción de medida y en el concepto de medida está comprendida la comprobación de la igualdad, pero también la idea de suma. A nosotros, por el momento, con la igualdad nos basta, y la igualdad lo mismo quedaría satisfecha si comprobáramos directamente la de las distancias de los puntos o la de funciones idénticas de estas mismas distancias, con tal que para cada valor de la variable correspondiera para la función un valor único, y viceversa.

Lo que en definitiva necesitamos es, pues, una cierta función

$$\varphi(u_1, u_2, v_1, v_2)$$

de las coordenadas de los dos puntos, que permanezca invariable cuando la mutua relación de posición de los dos puntos no varíe. Si suponemos uno de los dos puntos fijo y el otro variable, igualando esa función a una constante

$$\varphi(u, a, v, b) = k$$

tendríamos la ecuación del círculo, y según el postulado correspondiente, la expresión

$$\varphi(u, a, v, b) = \varphi(u_1, a, v_1, b)$$

deberá tener una significación, cualesquiera que sean  $a$ ,  $b$  y  $u$ ,  $v$ .

Pero no basta que esto se verifique para que la función  $\varphi$  pue-

da quedar en todo lo demás arbitraria. Por lo pronto la función ha de ser simétrica con relación a los dos puntos, y como, además, todo punto coincide consigo mismo, si esta relación de identidad ha de mantenerse, será preciso que la función se reduzca a una constante cuando las coordenadas de los dos puntos se identifiquen. Tampoco esto será suficiente si se ha de conservar la libertad de movimientos de la figura.

Si queda satisfecho el postulado del círculo, el sistema de dos puntos podrá ciertamente ser trasladado en el plano sin limitación, escogiendo arbitrariamente la posición de uno de ellos y quedando todavía indeterminada la del segundo, que se podrá fijar de un modo cualquiera sobre la circunferencia, que queda representada, como hemos visto, por una ecuación entre sus dos coordenadas. Cuando se trate de un sistema de tres puntos, podremos también fijar uno arbitrariamente y otro sobre una circunferencia; para que el tercer punto quede entonces en la misma posición relativa que tenía respecto de los otros dos, sus coordenadas deberán satisfacer dos ecuaciones: el sistema será determinado y el movimiento será posible.

Pero si los puntos son cuatro y hubiéramos fijado tres de ellos en una posición cualquiera, ya el cuarto no encontraría en general sitio donde colocarse, si había de conservar sus relaciones de posición primitivas con los otros tres puntos. Sería preciso satisfacer a tres ecuaciones y no contaríamos para ello más que con dos variables. El sistema sería superabundante y el movimiento imposible, a menos, sin embargo, que la función  $\varphi$  sea tal que asegure la compatibilidad de las ecuaciones.

Cuando así ocurra, deberá existir una relación que ligue a las seis relaciones de posición de un sistema de cuatro puntos cualesquiera del plano, y si esta condición se verifica, será ya posible el movimiento de todo sistema cualquiera que sea el número de sus puntos, porque cada punto nuevo bastará referirlo a dos de los puntos ya determinados, y siempre habrá una relación que asegure la igualdad de la posición relativa del recién venido con la que primitivamente tuviera con uno cualquiera de los puntos ya fijos que no hayan intervenido en la nueva fijación.

Para comprobar que esta condición queda también satisfecha por la función  $\varphi$  y determinar la relación de referencia, habrá que formar el sistema de las seis ecuaciones

$$1) \quad \begin{array}{ll} \varphi(u_1, u_2, v_1, v_2) = \varphi_{1,2} & \varphi(u_2, u_3, v_2, v_3) = \varphi_{2,3} \\ \varphi(u_1, u_3, v_1, v_3) = \varphi_{1,3} & \varphi(u_2, u_4, v_2, v_4) = \varphi_{2,4} \\ \varphi(u_1, u_4, v_1, v_4) = \varphi_{1,4} & \varphi(u_3, u_4, v_3, v_4) = \varphi_{3,4} \end{array}$$

y cuando eliminemos entre ellas cinco de las variables, nos quedará una ecuación resultante que deberá verificarse, cualesquiera que sean los valores de las otras tres variables que, como acabamos de ver, deberán permanecer arbitrarias. La ecuación será, pues, independiente de ellas y constituirá en definitiva la expresión que deberá quedar idénticamente satisfecha por las seis relaciones de posición de los cuatro puntos.

Si la función  $\varphi$  cumple también con esta condición, todavía será preciso que se verifiquen los postulados de la recta. Si ello es posible, la determinación de la recta por dos de sus puntos será ya cosa fácil. Consideremos, en efecto, de una parte, la ecuación de la circunferencia que tiene por centro uno de los puntos y cuyo radio corresponda a una relación de posición cualquiera, pero fija, y dé otra, todas las circunferencias que tienen el segundo punto por centro. De éstas habrá unas que corten a la circunferencia fija, y otras que les sean interiores o exteriores. Entre ambas categorías debe haber por lo menos una entre las circunferencias variables que tenga con la fija un solo punto común: este punto pertenecerá a la recta. Así para cada una de las circunferencias que tracemos como fija habrá por lo menos un

punto de la recta y la recta determinada por este procedimiento podrá ser considerada como tal, porque quedará determinada sin ningún género de ambigüedad por los puntos. Definida la recta, sobre ella se podrán medir las distancias y desarrollar luego toda la geometría.

Resulta en definitiva que todo el sistema geométrico depende exclusivamente de la función  $\varphi$  que se escoja para representar la relación de posición de dos puntos.

El sistema de coordenadas es, en realidad, indiferente: podrán variar con él la forma absoluta de rectas y círculos, las distancias efectivas de los puntos, la medida verdadera de los ángulos; pero si se conviene en mirar como iguales dos pares de puntos que tengan iguales relaciones de posición, si se juzga de la invariabilidad de las figuras por la permanencia de estas relaciones, las coincidencias y las discordancias, las comprobaciones que, en una palabra, se pueden pedir a la experiencia de los resultados teóricos resultarían prácticamente las mismas en todos los sistemas de coordenadas. Siempre se podría considerar un individuo ficticio y especialmente organizado para quienes esos supuestos y esas comprobaciones fueran la única verdad experimental. La forma de su sensibilidad, como diría Kant, estaría toda resumida en esa función  $\varphi$ .

Pero tampoco la geometría varía necesariamente porque la función  $\varphi$  varíe. Un mismo sistema geométrico puede, en efecto, referirse a sistemas de coordenadas distintos, sin que sus propiedades varíen, pero sí variará de un sistema a otro la expresión de la distancia y la de las distintas funciones de esa distancia que pudieran escogerse para relaciones de posición.

Una de las formas que puede tomar la función  $\varphi$  es, desde luego

$$\varphi = (u_1 - u_2)^2 + (v_1 - v_2)^2$$

Ella expresa en coordenadas cartesianas y rectangulares el cuadrado de la distancia de dos puntos. Adoptada para relación de posición, quedarían satisfechos todos los postulados de nuestra geometría, incluso el postulado de Euclides. Lo mismo ocurriría si adoptáramos, por ejemplo, el sistema polar como sistema de coordenadas y la función

$$\varphi = \rho_1^2 + \rho_2^2 - 2 \rho_1 \rho_2 \cos(\alpha_1 - \alpha_2)$$

como relación de posición. Con todas estas funciones y sus análogas no podríamos salir de la planimetría euclidiana; pero si del estudio de nuestro plano pasamos al de la superficie esférica, encontraremos en ella una variedad de dos dimensiones, donde quedan satisfechos los postulados del movimiento y de la continuidad y el postulado del círculo y donde los arcos de círculo máximo satisfacen, aunque sólo parcialmente, a los postulados de la recta. En cambio, el postulado de Euclides no se verifica.

Ahora bien, si esa superficie esférica se proyecta de cualquier modo sobre un plano, será siempre posible calcular la distancia o una función de la distancia de dos puntos de la esfera en función de las coordenadas planas de sus proyecciones, y si esta función, que evidentemente satisfará a los mismos postulados que la superficie esférica, se toma como relación de posición, de ella podríamos deducir toda la geometría de la esfera o geometría de Riemann.

Un caso bien sencillo es aquel en que la esfera se proyecta desde el centro sobre uno de sus planos tangentes. Escojamos para más comodidad un sistema polar que tenga como polo el punto de tangencia y calculemos el coseno de la distancia esférica de dos puntos.

Sean  $a$  y  $b$  los radios vectores y  $\alpha$  y  $\beta$  los argumentos de las

proyecciones de los puntos considerados. El cuadrado de la distancia entre las proyecciones será según un conocido teorema

$$d^2 = a^2 + b^2 - 2 ab \cos(\alpha - \beta)$$

Pero si aplicamos el mismo teorema al triángulo formado por las dos proyecciones y por el centro de la esfera, el mismo cuadrado tendrá por expresión

$$d^2 = R^2 + a^2 + R^2 + b^2 - 2 \sqrt{(R^2 + a^2)(R^2 + b^2)} \cdot \cos \delta$$

en la que  $\delta$  representa la distancia esférica de los puntos y  $R$  el radio de la esfera.

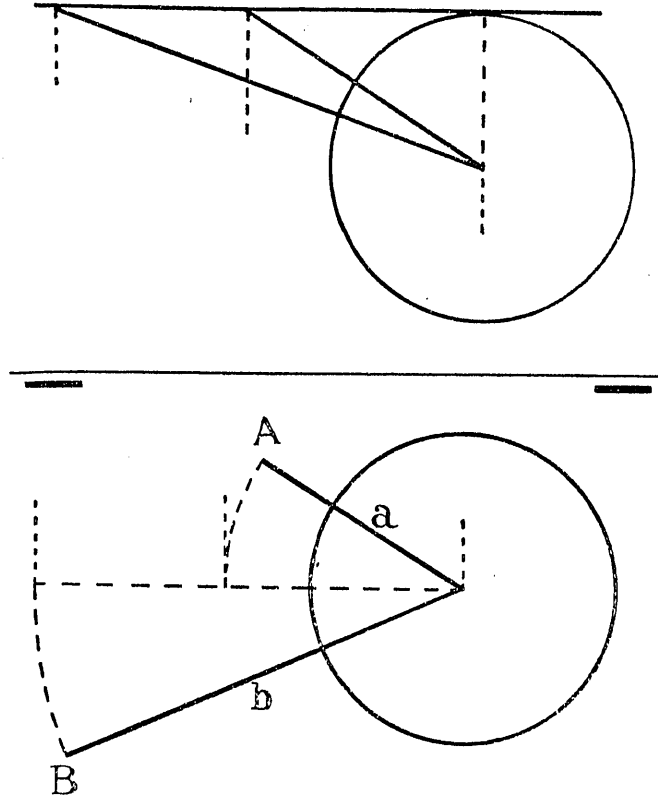


Fig. 1.<sup>a</sup>

Eliminando a  $d$  entre estas dos ecuaciones se tiene sin dificultad

$$\cos \delta = \frac{R^2 + ab \cos(\alpha - \beta)}{\sqrt{(R^2 + a^2)(R^2 + b^2)}}$$

que sería, como acabamos de ver, una relación de posición característica de la geometría esférica.

De ella se podrían deducir las ecuaciones de las líneas que en la proyección vendrán a representar a los arcos de círculo máximo. No necesitamos recurrir al cálculo para saber que estas líneas son rectas. En cambio, esta circunstancia, una vez conocida, nos asegura cuál hubiera de ser el resultado del desarrollo analítico que antes indicábamos. Podemos, pues, afirmar, desde luego, que llegaríamos a la ecuación de una recta, y esta observación tendrá aplicación muy pronto.

Hemos hecho también notar antes que sobre la superficie esférica son posibles todos los movimientos. La relación de posición que acabamos de encontrar deberá, pues, satisfacer las condiciones que este postulado hacía necesarias, así es que verificará idénticamente una cierta relación que por eliminación podrá deducirse de un cierto sistema de seis ecuaciones simultáneas análogo al sistema 1).

Otra observación conviene también hacer. Aunque la geometría definida por esa relación de posición es dentro de ciertos límites la misma geometría esférica ordinaria, difiere, sin embargo, de ella en un punto muy esencial. Sobre la superficie esférica

dos círculos máximos se cortan siempre en dos puntos diametralmente opuestos; sobre la proyección los círculos máximos transformados en rectas se cortan ya sólo en un punto. Se satisface, pues, ese postulado que sobre la esfera no se satisfacía, pero para acabar de satisfacer los postulados de la recta sería preciso que ésta fuera infinita y eso ya no se verifica. Aun los puntos del infinito del plano de proyección quedarían, en efecto, a distancia finita.

Para probarlo bastará hacer ver que si unimos el polo, que en nada se distingue de un punto cualquiera, con un punto del infinito, el punto medio de este segmento se encuentra a distancia finita. Hagamos la comprobación sobre el mismo eje polar y representemos por  $x$  el radio vector del punto medio. Aplicando la relación de posición tendríamos

$$\frac{R}{\sqrt{R^2+x^2}} = \frac{R^2 + \infty \cdot x}{\sqrt{(R^2 + \infty^2)(R^2+x^2)}} = \frac{x}{\sqrt{R^2+x^2}}$$

o bien

$$x = R$$

Tampoco la conexión de la superficie es la misma: un círculo máximo divide a la esfera en dos partes separadas e incomunicables, si no se corta el círculo; en la proyección la comunicación queda siempre abierta por el infinito, que, como acabamos de ver, no es infinito en nuestro caso. La conexión sería así análoga a la conexión del toro.

En resumen: la geometría representada no es exactamente la geometría esférica ordinaria, sino la segunda especie de geometría de Riemann, ya señalada por Klein, aunque la imagen por éste propuesta fuera la de una radiación de rectas, donde la recta vendría a representar un punto de la superficie. Nuestra representación, en cambio, es puntual y permite, por consiguiente, llegar a los mismos resultados con una menor deformación de los conceptos. Aun podría representarse la misma geometría, conservando hasta las magnitudes, exceptuando tan sólo las proximidades de una línea de corte, si tomamos como imagen un simple hemisferio y suponemos la identidad de los puntos diametralmente opuestos del círculo máximo límite.

En cambio, podríamos en la representación que nos ocupa conservar la conexión de la esfera y la propiedad de sus círculos máximos de cortarse en dos puntos, si supusiéramos al plano dotado de dos caras comunicables por el infinito y en la cara opuesta recogida la proyección del hemisferio cóncavo.

De cualquier modo que sea, la recta es aquí todavía limitada en longitud, aunque sin extremos, y si el postulado de Euclides no se verifica, tampoco tienen lugar por completo todas las hipótesis que independientemente del postulado sirven de base a nuestra geometría.

No es, sin embargo, ya difícil alcanzar el resultado que buscamos. Si examinamos atentamente la relación de posición que acabamos de estudiar, veremos que en ella entra el radio de la esfera elevado al cuadrado y constituyendo, por lo tanto, términos esencialmente positivos; si cambiáramos  $R^2$  en  $-R^2$  la expresión que resultara no podría ya caracterizar una geometría esférica. ¿Cumple, sin embargo, las condiciones que exigimos a la relación de posición que ha de resolver nuestro problema? Tratemos de comprobarlo.

La expresión de que ahora se trata es de la forma

$$\frac{R^2 - ab \cos(\alpha - \beta)}{\sqrt{(R^2 - a^2)(R^2 - b^2)}}$$

Es fácil ver que satisface al postulado del movimiento. Cuantas operaciones se hicieran con la expresión característica de la

esfera para llegar a la identidad final, sería posible hacerlas con ésta.  $R^2$  en la una y  $-R^2$  en la otra son simples constantes; si encerramos la negativa con su signo dentro de un paréntesis en nada se diferenciará para los cálculos de la positiva; todas las desapariciones de variable tendrán lugar del mismo modo, y en definitiva la identidad a que se llegue no se diferenciará de la del caso anterior, sino por el cambio de  $R^2$  en  $-R^2$ .

Si tratáramos de calcular con la nueva expresión la ecuación de la recta, también llegaríamos por las mismas razones a una ecuación de la misma forma que la antes hallada, en la que tampoco habría más que cambiar  $R^2$  en  $-R^2$ . El cambio, como se ve, afecta sólo a los parámetros y no a las variables, de modo que si seguimos empleando el mismo sistema de coordenadas, así como en el caso anterior las rectas estaban representadas por rectas, también lo estarán en éste.

Los postulados de continuidad están implícitamente satisfechos por la continuidad de la función. En cuanto a los postulados del círculo puede haber alguna duda, porque la expresión dejará de tener sentido o, por lo menos, significación real, si uno solo de los factores de la cantidad subradical del denominador fuera negativo. Veremos en seguida cómo esta duda se desvanece.

Nos importa ya, por consiguiente, comprobar si la recta en la geometría caracterizada por esta función es finita o infinita. En virtud del postulado del movimiento, que envuelve la homogeneidad del plano, podremos escoger para ello una recta cualquiera, y escogeremos, por más sencilla, el eje polar. Consideremos dos puntos cuyos radios vectores sean  $a$  y  $b$ , y sea  $x$  el radio vector del punto medio. Se le determinará por la ecuación

$$\frac{R^2 - ax}{\sqrt{(R^2 - a^2)(R^2 - x^2)}} = \frac{R^2 - bx}{\sqrt{(R^2 - b^2)(R^2 - x^2)}}$$

de donde sin dificultad se deduce

$$x = \frac{R^2(\sqrt{R^2 - b^2} - \sqrt{R^2 - a^2})}{a\sqrt{R^2 - b^2} - b\sqrt{R^2 - a^2}}$$

Separando el caso singular en que  $a = b$ , y en el que la ecuación de partida no es suficiente para determinar el punto medio, que se confunde entonces con los extremos, la expresión de  $x$  tiene una significación perfectamente definida, en tanto que ni  $a$  ni  $b$  excedan de  $R$ ; pero si uno de ellos,  $a$ , por ejemplo, se hace igual a  $R$ , igual a  $R$  también se hace  $x$ , cualquiera que sea  $b$ . Es, precisamente, el carácter de los puntos del infinito.

Lo que hemos dicho del eje polar lo podríamos haber dicho igualmente de un radio vector cualquiera. Bastaría un simple cambio de coordenadas. Luego los puntos del infinito vendrán representados por los de la circunferencia trazada desde el polo como centro y con un radio igual a  $R$ . El círculo envuelto encerrará, pues, todo el plano finito, y las dudas que conservábamos respecto al postulado del círculo se desvanecen ya completamente, porque los puntos que podrían dar lugar a ellas se encuentran fuera del espacio real o, por lo menos, en una región prácticamente inalcanzable. Desde un punto como centro y con un radio cualquiera se podrá trazar siempre una circunferencia: la recta que une dos puntos reales se prolonga hasta el infinito, con el que tiene dos puntos comunes. Todos los postulados preliminares de la geometría de Euclides están satisfechos. ¿Lo está el de las paralelas? Evidentemente, no.

Si se traza una recta cualquiera, cortará en dos puntos,  $A$  y  $B$ , a la circunferencia, límite que comprende los puntos del infinito, un punto exterior  $C$  a la recta podrá unirse con  $A$  y con  $B$ ; tendremos así dos rectas,  $CA$  y  $CB$ , paralelas a  $AB$ , las

dos distintas, y encerrando en el ángulo que forman todas las rectas del plano que, pasando por *C*, no cortan a *AB*. Es el mismo punto de partida de Lobachewski, obtenido a partir de hipótesis en las que hemos cuidado de conservar escrupulosamente todos los postulados distintos del de las paralelas. La comprobación, pues, está hecha. El postulado de Euclides no se puede demostrar. Por lo menos, no se puede demostrar en el plano.

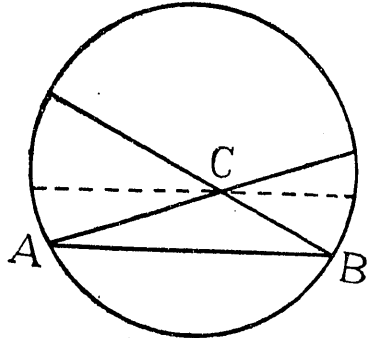


Fig. 2.ª

Del espacio hablaremos después. Pero antes nos detendremos en algunos resultados a que conduce la nueva geometría, y que podrán aclararnos algunas de las ilusiones padecidas por los demostradores del postulado. Recordemos que se ha pretendido definir las paralelas como rectas equidistantes: en el plano de Lobachewski, la línea equidistante de una recta no es ya otra recta. Vamos a verlo.

El lugar de los puntos equidistantes de dos puntos dados sigue, siendo la perpendicular levantada en su punto medio; este teorema es independiente de la teoría de las paralelas. Poniéndolo en ecuación, se tendrá

$$\frac{R^2 - a \rho \cos(\alpha - \theta)}{\sqrt{(R^2 - a^2)(R^2 - \rho^2)}} = \frac{R^2 - b \rho \cos(\beta - \theta)}{\sqrt{(R^2 - b^2)(R^2 - \rho^2)}}$$

y si para mayor sencillez tomamos los dos puntos sobre el eje polar, la ecuación se reducirá a

$$\frac{R^2 - a \rho \cos \theta}{\sqrt{R^2 - a^2}} = \frac{R^2 - b \rho \cos \theta}{\sqrt{R^2 - b^2}}$$

Resultaría de aquí que  $\rho \cos \theta$  es constante, o lo que es lo mismo, que la recta buscada es una perpendicular al eje polar. Las rectas perpendiculares al eje polar lo son, pues, también en el esquema representativo. Levantando, pues, perpendiculares al eje y tomando sobre ellas longitudes equivalentes, es decir, correspondientes a igual relación de posición, tendremos la línea buscada.

Para determinar la ecuación escogeremos el sistema cartesiano y rectangular que tiene por origen el polo y por eje de las *xx'* el eje polar.

Sean *x* e *y* las coordenadas de uno de los puntos. Será preciso (fig. 3.ª) hallar la relación de posición de los puntos (*x*, *y*) y (*x*, *o*). Aplicando la fórmula se obtiene

$$\frac{R^2 - x^2}{\sqrt{(R^2 - x^2)(R^2 - x^2 - y^2)}}$$

y esta expresión deberá ser constante. Hechas fáciles reducciones resultaría en definitiva para ecuación de la curva

$$y^2 + \lambda x^2 = \lambda R^2;$$

es la ecuación de una elipse tangente al círculo-límite o círculo del infinito. La línea que representa no puede ser nunca una recta, porque las rectas del plano son todas rectas en la representación.

Sobre esa elipse se alinearían en nuestro esquema los vértices de los triángulos de la figura de Legendre, que pretendía completar M. Carton. En ella quedaría inscrita la línea poligonal que se formaba uniéndolos por rectas. Para completar la figura tendríamos que trazar la recta *CD* perpendicular a *OP*. Ahora bien, por lejos que fuéramos a tomar los vértices en la recta *CD*, nunca podríamos ir más allá de *C*; si suponemos, por ejemplo, que la figura se prolongará por la izquierda, y desde el punto *C* no se podría llegar a alcanzar un punto de la elipse sin haberla cortado antes más que cuando ese punto no traspase el límite señalado de esta

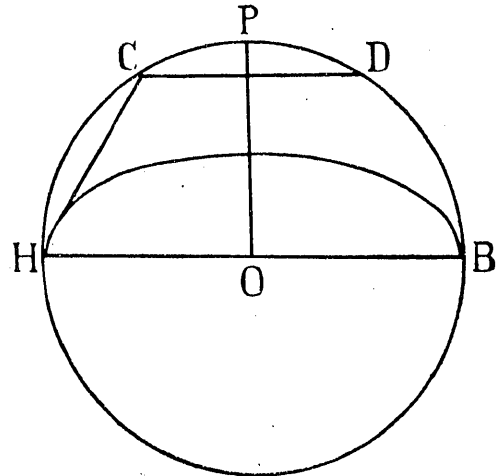


Fig. 3.ª

parte por la tangente a la elipse trazada por *C*. Si con los triángulos se traspasa ese límite, la elipse, y, por consiguiente, la línea poligonal, podrá ser ya cortada dos veces; los triángulos dejan de ser ya necesariamente exteriores unos a otros, y como ninguna garantía hay de que la conclusión contradictoria aparezca antes de llegar a ese límite, toda la pretendida fuerza de la demostración desaparece.

Hasta ahora no hemos definido las distancias ni los ángulos: respecto de las primeras no podemos comprobar todavía más que su igualdad; en cuanto a los segundos sólo sabemos trazar ángulos rectos. Empezaremos por estudiar cómo varía la distancia a lo largo del radio vector: supongamos un segmento que partiendo del polo termina en el punto de radio *a*: la relación de posición se reduce entonces a

$$\frac{R}{\sqrt{R^2 - a^2}}$$

Si se hace deslizar el segmento a lo largo del radio vector, la relación de posición deberá permanecer la misma; sus dos extremos deberán, pues, tener recorridos equivalentes, pero sobre la representación sus medidas serán distintas, y si el deslizamiento es infinitamente pequeño y llamamos *db* al recorrido del extremo inmediato al origen, se deberá tener

$$\frac{R^2 - (a + da) db}{\sqrt{(R^2 - db^2) [R^2 - (a + da)^2]}} = \frac{R}{\sqrt{R^2 - a^2}}$$

Reduciendo y despreciando infinitamente pequeños de orden superior, se tiene tras fáciles cálculos

$$da = \frac{R^2 - a^2}{R^2} db,$$

lo que nos dice que a medida que se avanza hacia el círculo límite, los recorridos esquemáticos deben ser cada vez más pequeños hasta anularse. Si, pues, consideramos a *da* como constante y suponemos que en las proximidades del polo, donde las proporcio-

nes se conservan, la representación lo es en verdadera magnitud, la diferencial de la longitud efectiva del radio vector será

$$d\rho = \frac{R^2 da}{R^2 - a^2}$$

Ahora bien, si calculáramos dentro del mismo orden de aproximación la relación de posición de los puntos del eje polar que corresponden a los radios vectores  $a$  y  $a + da$ , llegaríamos a

$$\frac{R^2 - a(a + da)}{\sqrt{|R^2 - (a + da)^2|} (R^2 - a^2)} = 1 + \frac{R^2 da^2}{2(R^2 - a^2)^2} = 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{d\rho}{R} \right)^2;$$

y si ahora quisiéramos averiguar la magnitud verdadera de un deslizamiento  $d\sigma$  normal al radio vector y correspondiente a un ángulo  $d\beta$  se tendrá

$$\frac{R^2 - a^2 \cos(d\beta)}{R^2 - a^2} = 1 + \frac{a^2 d\beta^2}{2(R^2 - a^2)} = 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{d\sigma}{R} \right)^2,$$

de donde

$$d\sigma = \frac{aRd\beta}{\sqrt{R^2 - a^2}},$$

y si se hiciera

$$ad\beta = da,$$

se vería que un mismo recorrido esquemático correspondía a distintos recorridos reales, según que tuviera lugar en el sentido del radio vector o en sentido normal al mismo. La relación entre ambos recorridos es precisamente igual a  $\frac{R}{\sqrt{R^2 - a^2}}$

Para las disecciones intermedias, y siempre que se trate de recorridos infinitesimales alrededor del punto  $(a, \beta)$ , podrá aplicarse al plano de Lobachewski el teorema de Pitágoras y se podrá tomar, por consiguiente, para ecuación de una circunferencia infinitamente pequeña con su centro en aquel punto,

$$da^2 + a^2 \left( 1 - \frac{a^2}{R^2} \right) d\beta^2 = K$$

representando  $K$  una constante.

A su vez, si llamamos  $r$  al recorrido esquemático, se tendrá

$$da^2 + a^2 d\beta^2 = r^2$$

y restando de esta ecuación la anterior, se deduce

$$\frac{a^4}{R^2} d\beta^2 = r^2 - K$$

Pero si se adopta un sistema de ejes coordenados rectangulares en el que figure como eje de las  $x$  el radio vector, se tendría

$$ad\beta = y \quad r^2 = x^2 + y^2$$

y, en definitiva, la última de las expresiones se reducirá a

$$\left( 1 - \frac{a^2}{R^2} \right) y^2 + x^2 = K$$

ecuación de una elipse, en tanto que  $a < R$ . Para  $a = R$  la elipse se transforma en una parábola tangente al círculo límite.

Esta elipse, especie de indicatriz, tiene su eje menor en la dirección del radio vector, y puede servir para determinar el ángulo de dos rectas que se cortan en el punto  $(a, \beta)$ .

Para ello los puntos de intersección de las rectas con la elipse

se referirán al círculo del que la elipse puede considerarse deducida por proyección ortogonal, y uniendo el centro con los nuevos puntos, se tendrá ya el ángulo en verdadera magnitud. Los ángulos rectos corresponderán de ese modo a los ejes conjugados de la elipse.

Como la relación de los ejes de la elipse se anula en la circunferencia del círculo límite, resulta, aplicando la construcción

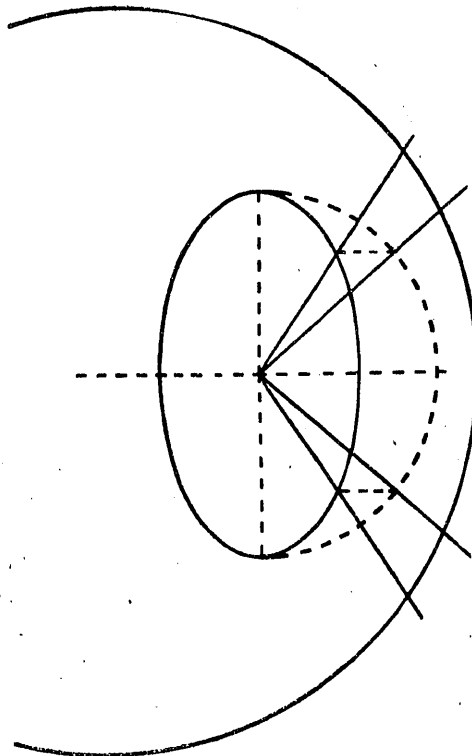


Fig. 4.<sup>a</sup>

indicada, que el ángulo formado por dos paralelas es cero. En cambio, es recto el ángulo de una recta cualquiera con la circunferencia límite. Los ángulos en el polo se proyectan en verdadera magnitud.

Las expresiones encontradas más atrás para los recorridos diferenciales en la dirección y normalmente al radio nos permiten también calcular las distancias verdaderas, como igualmente el desarrollo de la circunferencia, una vez que el radio sea conocido. Vimos, en efecto, que se tenía

$$d\rho = \frac{R^2 da}{R^2 - a^2}$$

e integrando entre cero y un radio esquemático cualquiera,  $a$ , se deducirá

$$\rho = \frac{R}{2} \int_0^a \left( \frac{1}{R+a} + \frac{1}{R-a} \right) da = \frac{R}{2} \log \frac{R+a}{R-a}$$

De aquí puede deducirse el valor de  $a$  en función de  $\rho$  y se llega sin dificultad a

$$a = R \frac{e^{\frac{\rho}{R}} - e^{-\frac{\rho}{R}}}{e^{\frac{\rho}{R}} + e^{-\frac{\rho}{R}}} = R \operatorname{th} \frac{\rho}{R}$$

Pero la relación de posición correspondiente a este caso es

$$\frac{R}{\sqrt{R^2 - a^2}}$$

y si se sustituye en ella el valor encontrado para  $a$ , se reduce a

$$\frac{e^{\frac{\rho}{R}} + e^{-\frac{\rho}{R}}}{2};$$

es, pues, el coseno hiperbólico de la distancia verdadera  $\rho$  medida con el parámetro  $R$  como unidad.

El recorrido diferencial normal al radio vector tenía por expresión

$$d\sigma = \frac{aRd\beta}{\sqrt{R^2 - a^2}}$$

La longitud de la circunferencia completa será, pues,

$$\frac{2\pi aR}{\sqrt{R^2 - a^2}} = \pi R \left( e^{\frac{\rho}{R}} + e^{-\frac{\rho}{R}} \right) = 2\pi R \operatorname{sh} \frac{\rho}{R}$$

Vemos, pues, que la circunferencia no crece proporcionalmente al radio, sino mucho más rápidamente.

También crece, y con una gran rapidez, el cuarto lado de un cuadrilátero birrectángulo e isósceles, cuya base permanece fija y

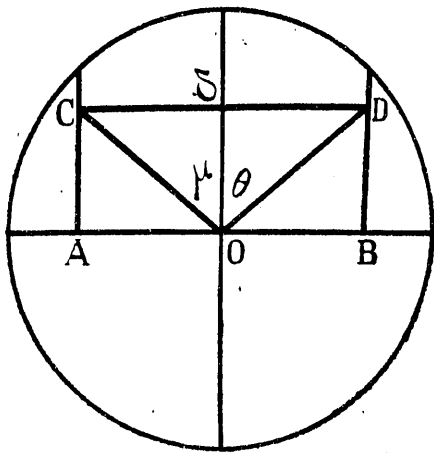


Fig. 5.<sup>a</sup>

cuya altura crece indefinidamente. Para comprobarlo consideremos el cuadrilátero esquemático  $ABCD$  simétrico con relación al diámetro vertical, y en el que haremos

$$AB = 2a \quad OC = OD = r \quad \text{y} \quad \widehat{COD} = 2\theta;$$

representaremos, además, por  $\mu$  la longitud real de la mediana y por  $\delta$  la del lado  $CD$ .

Recordando que la relación de posición es precisamente el coseno hiperbólico de  $\delta$  con relación a  $R$ , se podrá escribir

$$\operatorname{ch} \frac{\delta}{R} = \frac{R^2 - r^2 \cos 2\theta}{R^2 - r^2} = \frac{R^2 - r^2 \cos^2 \theta + a^2}{R^2 - r^2 \cos^2 \theta - a^2};$$

pero como en virtud de otra fórmula encontrada más atrás se tiene

$$r \cos \theta = R \operatorname{th} \frac{\mu}{R},$$

llegaremos en seguida, después de fáciles reducciones, a

$$\operatorname{ch} \frac{\delta}{R} = \frac{R^2 + a^2 \operatorname{ch}^2 \frac{\mu}{R}}{R^2 - a^2 \operatorname{ch}^2 \frac{\mu}{R}}.$$

Esta ecuación nos dice que  $\delta$  crece indefinidamente con  $\mu$  y que se hace infinito para

$$\operatorname{ch} \frac{\mu}{R} = \frac{R}{a}.$$

Traspasado este valor de  $\mu$ , el coseno hiperbólico de  $\frac{\delta}{R}$  se hace negativo y  $\delta$  imaginario: el cuadrilátero no puede ya cerrarse; necesitaría para ello lados laterales más que infinitos.

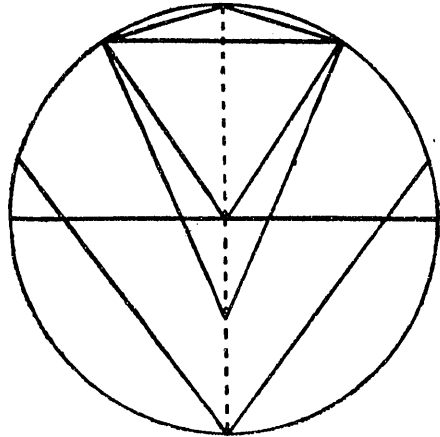


Fig. 6.<sup>a</sup>

Y así se comprende cuántas hipótesis inadvertidas y arbitrarias se encierran implícitamente en la demostración de Bertrand de Ginebra que citábamos en la conferencia anterior. Si se considera, en efecto, una faja formada por dos perpendiculares al eje polar, y a lo largo de la perpendicular al mismo eje que divide esta faja en dos partes congruentes se hace deslizar el vértice de un ángulo cuya bisectriz se confunda con la misma recta, es posible, hasta con un ángulo nulo, llegar a traspasar los límites de la faja, y en cambio pueden quedar encerrados en ella ángulos cada vez mayores que pueden alcanzar los  $180^\circ$  y hasta acercarse indefinidamente a los  $360^\circ$ .

Otra de las curiosas consecuencias de la hipótesis fundamental de Lobachevski es la variedad de círculos a que conduce. En nuestra geometría euclídea tres puntos que no están en línea recta determinan una circunferencia: si están en línea recta, la recta que los une puede considerarse como límite de un círculo cuyo radio aumenta indefinidamente. Es una consecuencia de que las perpendiculares que han de determinar el centro sólo pueden o cortarse o ser paralelas.

En el plano de Lobachevski la misma construcción es aplicable, porque no depende del postulado, pero en él los pares de rectas se dividen en dos categorías: secantes y no secantes separadas por el caso límite del paralelismo. Si, pues, las perpendiculares se cortan, tendremos un círculo ordinario; si no se cortan, la línea que determinen los tres puntos no se podrá ya llamar círculo sino por extensión, ni se podrá generalizar el concepto sino mediante definiciones previas.

El caso límite de las perpendiculares paralelas es el que se presta a una definición más sencilla. Cuando el radio crece sin medida, la circunferencia se aproxima a una forma límite que no es ya recta, sino que constituye una línea que recibió de Lobachevski el nombre de *horiciclo*. Es fácil determinar su ecuación: la de los círculos que tienen por centro un punto del eje polar de radio vector  $a$  es

$$\frac{R^2 - a\rho \cos \theta}{\sqrt{R^2 - \rho^2}} = C$$

representando por  $C$  una constante que dependerá del radio del círculo.

Mientras  $a$  sea menor que  $R$  el centro del círculo corresponderá a un punto real; pero si  $a = R$ , el centro se aleja al infinito, y dividiendo ambos miembros de la ecuación por  $R$ , se llegará a

$$\frac{R - \rho \cos \theta}{\sqrt{R^2 - \rho^2}} = K$$

siendo  $K$  una nueva constante y representando esta ecuación los horiciclos que tienen por radio al eje polar.

Es fácil ver que tanto una como otra ecuación representan elipses, uno de cuyos ejes coincide con el eje polar; en el primer

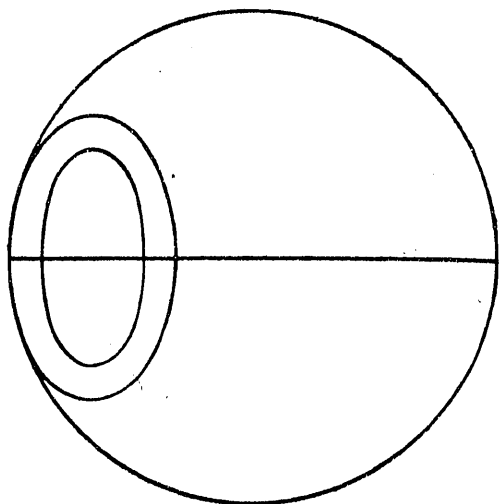


Fig. 7.ª

caso la elipse es interior al círculo límite; en el segundo es tangente.

Haciendo  $\theta = 0$ , se ve además que el horiciclo esquemático corta al eje polar en el punto correspondiente a

$$\rho = R \frac{1 - K^2}{1 + K^2}$$

el radio vector del centro será

$$\rho = \frac{R}{1 + K^2}$$

y los dos semiejes

$$\alpha = \frac{RK^2}{1 + K^2} \quad \text{y} \quad \beta = \frac{KR}{\sqrt{1 + K^2}}$$

Cuando  $a > R$ , la ecuación

$$\frac{R^2 - a \rho \cos \theta}{\sqrt{R^2 - \rho^2}} = C$$

quedará satisfecha cualquiera que sea  $C$  para

$$\rho = R \quad R - a \cos \theta = 0$$

y si  $C$  se anulara, la ecuación se convertiría en

$$R^2 - a \rho \cos \theta = 0.$$

Esta última ecuación es la de una recta perpendicular al eje y que es precisamente la polar con respecto al círculo límite del punto del eje cuyo radio es  $a$ ; la primera representa, en general, una elipse doblemente tangente al círculo límite, al cual toca en los puntos donde le corta la dicha polar.

Toda esta familia de líneas correspondiente a los distintos valores del parámetro  $C$  es normal a un cierto sistema de rectas divergentes; estas líneas pueden ser consideradas por esta razón como círculos que tienen por centro común un cierto punto ideal correspondiente al punto esquemático  $(a, 0)$  exterior al círculo límite. Caso particular de estas líneas es la recta polar de  $(a, 0)$ . Consecuencia de esta teoría es también que todas las normales a una recta vienen a pasar por su polo y que dos rectas que no se

cortan tienen siempre una normal común, que será su mínima distancia y que se determinará sin dificultad uniendo los polos de las dos rectas o trazando la polar de su punto ideal de intersección.

También cabría estudiar en el plano de Lobachefski las secciones cónicas, que vendrían definidas como en nuestra geometría por el exágono de Pascal, sólo que aquí las formas son más numerosas, porque a la variedad de la forma esquemática se añaden las complicaciones que resultan de las intersecciones con el

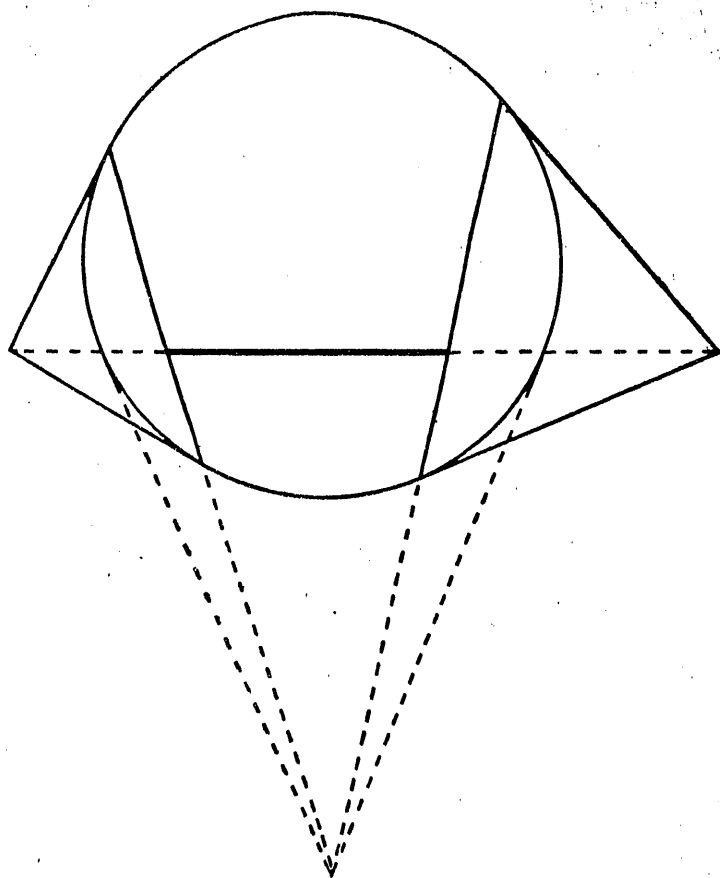


Fig. 8.ª

círculo límite. No habrá, pues, más que señalar el punto que nos llevaría demasiado lejos en caso de un desarrollo detallado.

El estudio de las áreas es también interesante. Nos ocuparemos brevemente del área del círculo y de la de los polígonos. El área del círculo se deduce inmediatamente de la expresión

$$\int_0^{\rho} \pi R \left( e^{\frac{\rho}{R}} - e^{-\frac{\rho}{R}} \right) d\rho = \pi R^2 \left( e^{\frac{\rho}{2R}} - e^{-\frac{\rho}{2R}} \right) = 4 \pi R^2 \operatorname{sh}^2 \frac{\rho}{2R}$$

Como el área del círculo queda dividida en partes iguales por ángulos en el centro iguales, la superficie de un sector infinitesimal vendrá expresada por

$$\pi R^2 \left( e^{\frac{\rho}{2R}} - e^{-\frac{\rho}{2R}} \right)^2 \frac{d\theta}{2\pi} = \frac{R^2}{2} \left( e^{\frac{\rho}{2R}} - e^{-\frac{\rho}{2R}} \right)^2 d\theta$$

y esta expresión puede servirnos para determinar el área de un triángulo rectángulo, que para mayor sencillez supondremos situado de modo que el vértice de uno de sus ángulos agudos venga a estar en el origen, con lo cual este ángulo y el ángulo recto se proyectarán en verdadera magnitud.

En estas condiciones el área buscada será

$$\begin{aligned} & \frac{R^2}{2} \int_0^C \left( e^{\frac{\rho}{2R}} - e^{-\frac{\rho}{2R}} \right)^2 d\theta = \\ & = \frac{R^2}{2} \int_0^C \left( \sqrt{\frac{R+r}{R-r}} - \sqrt{\frac{R-r}{R+r}} \right)^2 d\theta = \\ & = R^2 \int_0^C \left( \frac{R}{\sqrt{R^2 - r^2}} - 1 \right) d\theta = \\ & = R^2 \int_0^C \left( \frac{R \cos \theta}{\sqrt{R^2 - b^2 - R^2 \sin^2 \theta}} - 1 \right) d\theta = \\ & = R^2 \left( \text{arc sen } \frac{R \text{ sen } C}{\sqrt{R^2 - b^2}} - C \right) \end{aligned}$$

Esta expresión se puede simplificar considerablemente si tomamos en cuenta algunas fórmulas de la trigonometría lobachéfskiana, que vamos rápidamente a reseñar. Los resultados ya conocidos permiten escribir

$$b = R \text{ th } \beta \quad a = R \text{ th } \alpha$$

llamando  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $\gamma$  a las longitudes reales de los lados del triángulo, referidas a  $R$  como unidad, de donde

$$\cos C = \frac{b}{a} = \frac{\text{th } \beta}{\text{th } \alpha}$$

Aplicando la misma fórmula al ángulo verdadero en  $B$ , se tendrá

$$\cos B = \frac{\text{th } \gamma}{\text{th } \alpha}$$

Pero sabemos calcular el coseno hiperbólico del lado  $c$  ó  $\gamma$ , el cual es

$$\begin{aligned} \text{ch } \gamma &= \frac{R^2 - ab \cos C}{\sqrt{(R^2 - a^2)(R^2 - b^2)}} = \frac{\sqrt{R^2 - b^2}}{\sqrt{R^2 - a^2}} = \\ &= \frac{\sqrt{1 - \text{th}^2 \beta}}{\sqrt{1 - \text{th}^2 \alpha}} = \frac{\text{ch } \alpha}{\text{ch } \beta} \end{aligned}$$

y poniendo en función de él a la tangente, tendremos en definitiva

$$\begin{aligned} \cos B &= \frac{\sqrt{\text{ch}^2 \alpha - \text{ch}^2 \beta}}{\text{sh } \alpha} = \frac{\sqrt{\frac{R^2}{R^2 - a^2} - \frac{R^2}{R^2 - b^2}}}{\frac{R}{R^2 - a^2}} = \\ &= \frac{\sqrt{R^2(a^2 - b^2)}}{a^2(R^2 - b^2)} = \frac{R \text{ sen } C}{\sqrt{R^2 - b^2}} \end{aligned}$$

Vemos, pues, que el arco que figura en la fórmula del área del triángulo es precisamente el complemento del ángulo  $B$ , y que, por lo tanto, la medida del área será

$$R^2 \left( \frac{\pi}{2} - B - C \right)$$

Si consideramos ahora un triángulo cualquiera se le podría dividir en dos triángulos rectángulos, y tendríamos entonces para expresión del área total

$$R^2 (\pi - A - B - C),$$

por donde se ve que el área de un triángulo, por grandes que sean sus lados, no podrá nunca exceder, ni aun siquiera alcanzar, el valor fijo  $\pi R^2$ ; esta sería la superficie de la parte de plano comprendida entre tres rectas paralelas dos a dos. Demuéstrase así la razón de las dudas que ya asaltaban a Gauss en 1799.

Si se examinan las fórmulas trigonométricas encontradas, se verá que son las mismas que las de la trigonometría esférica, sin más que cambiar para los lados del triángulo las funciones circulares en funciones hiperbólicas. Las áreas de los demás polígonos se reducen a la del triángulo en la forma acostumbrada, y siempre resultará que son proporcionales a la diferencia existente entre la suma de sus ángulos y la del polígono euclidiano de igual número de lados.

En la representación del plano de Lobachéfski que hasta ahora hemos adoptado las rectas siguen siendo rectas, y esto permite hacer intuitivos ciertos resultados pero no se conservan los ángulos, y esto hace necesario un mayor esfuerzo mental para comprender otros. Es fácil deducir de ella misma una representación conforme en que esta última propiedad queda satisfecha, aunque a cambio de perder la primera.

La conservación de los ángulos supone que la escala es la misma en todas las direcciones alrededor de un punto, o lo que es igual, que los círculos infinitesimales están representados por círculos. Ya hemos visto que esta condición no se satisfacía en nuestro esquema, donde en cada punto podía considerarse una cierta elipse, especie de indicatriz que nos servía para referir los ángulos a su verdadera magnitud. Estas elipses estaban orientadas con relación al radio vector del punto, de tal suerte que su eje menor estaba dirigido en la dirección de dicho radio. Ahora bien, si sometiéramos en cada punto al radio vector a la dilatación conveniente para que las elipses se conviertan en círculos, habríamos resuelto el problema de encontrar una representación conforme de nuestro plano no euclideo.

Vamos a calcular esta dilatación y para ello representaremos por  $a$  el radio vector del esquema y por  $r$  el que correspondería para los mismos puntos en la representación que buscamos. La relación que habría entre las escalas de las dos circunferencias trazadas desde el polo con esos dos radios vectores, y que representarían la misma circunferencia del plano de Lobachéfski, es evidentemente la de los radios; pero si pasamos en el mismo plano a una circunferencia infinitamente próxima, el incremento de  $a$  está en una escala más pequeña que la de la circunferencia con él trazada, y para referirlo a la misma escala habrá que multiplicarlo por

$$\frac{R}{\sqrt{R^2 - a^2}}$$

El incremento correspondiente de  $r$  debe estar a la misma escala que su circunferencia correspondiente, luego en definitiva se podrá establecer la proporción

$$\frac{a}{r} = \frac{R da}{\sqrt{R^2 - a^2} dr}$$

equivalente a la ecuación diferencial

$$\frac{da}{a \sqrt{R^2 - a^2}} = \frac{dr}{r}$$

en la que las variables aparecen separadas y se deja, por lo tanto, integrar sin dificultad.

Obtiénese así

$$\frac{r}{2R} = \frac{\sqrt{R+a} - \sqrt{R-a}}{\sqrt{R+a} + \sqrt{R-a}}$$

y se ve que la nueva representación encierra también el plano de Lobachéfski en un círculo de radio doble que el primitivo.

(Continuará.)