

REVISTA DE OBRAS PÚBLICAS

PUBLICACION TECNICA DEL CUERPO DE INGENIEROS DE CAMINOS, CANALES Y PUERTOS

DIRECTOR

D. MANUEL MALUQUER Y SALVADOR

COLABORADORES

LOS INGENIEROS DE CAMINOS, CANALES Y PUERTOS

SE PUBLICA LOS JUEVES

Dirección y Administración: Plaza de Oriente, 6, primero derecha.

El postulado de Euclides y las geometrías no euclídeas.

Conferencias dadas ante la Sociedad española de Matemáticas en la Facultad de Ciencias de la Universidad Central, por D. Pedro M. González Quijano, ingeniero de Caminos.

I

Para desarrollar su teoría de las paralelas, Euclides se creyó obligado a aumentar el número de sus postulados con un postulado nuevo: el célebre postulado V, que enunció en esta forma:

«Si dos rectas de un plano forman con una tercera recta de este plano y del mismo lado de ella ángulos cuya suma sea inferior a dos rectos, las rectas se encontrarán de ese lado si se las prolonga suficientemente.»

Desde el principio debió parecer este enunciado demasiado complejo para ser considerado como evidente y no es extraño que se intentara deducirlo por vía de demostración de los primeros principios, cuya fecundidad lógica había sido ya probada con las 28 primeras proposiciones del libro I de los *Elementos*, independientemente todas de la verdad del nuevo postulado.

Tal vez el mismo Euclides no llegó a formularlo sino después del fracaso de algunos ensayos de demostración. Indicios de ello se ha querido ver en el lugar que el postulado ocupa en su obra, aunque este fundamento sea un poco débil, pues la actual redacción de los *Elementos* parece debida en parte a Theón de Alejandría, matemático del siglo IV de nuestra era, posterior a Euclides cerca de siete siglos.

Antes de esta fecha habían empezado, sin embargo, los intentos de demostración o los ensayos, por lo menos, de prescindir del postulado, dando distinto fundamento a la teoría de las paralelas. La atención debió fijarse, desde luego, en la definición misma de paralelas, definición negativa y, como tal, poco apta para poder deducir consecuencias de ella. Se trató de cambiarla y ya en una de las obras de Herón de Alejandría, que han llegado hasta nosotros, se vienen a definir las paralelas como rectas que equidistan en toda su longitud, aunque el pasaje sea considerado por algunos como una interpolación debida a Posidonio de Rodas, que es a quien Proclo atribuye la mencionada definición. De Herón o de Posidonio, entre los cuales media un siglo, próximamente, de distancia, la definición sería de todos modos un poco anterior al principio de nuestra era, y en ella puede verse el primer intento de que tengamos noticia positiva.

Admitida la nueva definición, que desde luego incluía a la antigua, pues es claro que rectas equidistantes no llegarán a encontrarse, es también consecuencia inmediata que desde un punto exterior a una recta no se le podrá trazar más que una sola paralela, forma moderna dada al postulado por Legendre, y desde luego suficiente para desarrollar ya la teoría sin nuevos llamamientos a la intuición.

Pero, si se reflexiona un poco, se comprenderá en seguida que la definición propuesta encerraba un nuevo postulado, quizás más intuitivo que el de Euclides, pero tampoco completamente evidente. Si se elevan, en efecto, dos perpendiculares a una recta y sobre ellas y del mismo lado se toman a partir de aquella longitudes iguales, determinaremos dos puntos que, a su vez, serán ya los necesarios y suficientes para determinar una recta, la cual, según la definición, deberá ser paralela a la primera. Se postula, pues, que todos los puntos de esta segunda recta se encuentran a igual distancia de la primera que los dos al principio fijados.

En realidad, el postulado implícito no necesita ser tan extenso. Bastaría con que uno solo de los puntos de la segunda recta distinto de los dos primeros distara igualmente que éstos de la recta primitiva, para que pudiera afirmarse lo mismo de todos los demás puntos de la segunda recta y para que la afirmación pudiera extender para otra equidistancia y para otra recta cualquiera del plano de modo análogo determinada.

No es difícil demostrarlo. Supongamos, en efecto, que tres puntos en línea recta, A' , B' y C' , distan igualmente de una recta dada, AC .

Desde el punto C y en dirección CB tomemos una longitud $CD = AB$. El punto D será, en general, distinto del B , y si por D levantamos una perpendicular a AC y tomamos sobre ella una longitud $DD' = CC'$, el punto D' pertenecerá también por simetría a la recta $A'B'C'$. Aplicando la misma construcción al sistema $A'BDD'$, encontraremos otro nuevo punto E' de la recta $A'C'$ que distará de AC tanto como A' , B' , C' y D' , y procediendo sucesivamente del mismo modo, llegaremos a determinar sobre la recta AC un punto L a la izquierda o a la derecha de B que diste de B menos que la mitad de AB , y desde el cual, levantando la perpendicular a AC se alcance la recta $A'C'$ con una longitud $LL' = AA'$.

Este punto L podrá en particular confundirse con B ; pero, en general, será distinto, y entonces podríamos aplicar al sistema $A'ABLL'$ idéntico procedimiento, que en esencia se reduce a la determinación del máximo común divisor de los segmentos AB

y AC . Esto supuesto, dos cosas pueden ocurrir: o estos dos segmentos son incommensurables, y entonces llegaremos sobre la recta AC a determinar dos puntos tan próximos como se quiera y desde los cuales se pueden levantar a AC perpendiculares que sean entre AC y $A'C'$ iguales a AA' , o los dos segmentos AB y AC son commensurables y entonces la operación tendrá un término y un límite la distancia entre los pies de perpendiculares determinados sobre AC .

En el segundo caso se podrá dividir la recta AC , y su prolongación en segmentos iguales a la distancia límite y las perpendiculares iguales a AA' , levantadas por los puntos de división, vendrán todas a terminar sobre la recta $A'C'$, que quedará tam-

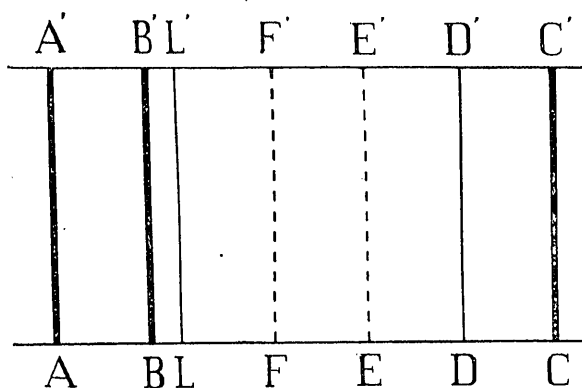


Fig. 1.ª

lo en evidencia empezaremos por hacer ver que en los cuadriláteros tales como $MNM'N'$ se verifica que $M'N' = MN$. En efecto; por el punto medio m de MM' tracemos la perpendicular mn a esta recta, que cortará en n a NN' . Doblemos el plano por mn . M' vendrá a caer sobre M y $M'N'$ sobre MN ; n permanecerá fijo, y como nN' es perpendicular a $M'N'$ y nN a MN , N y N' deberán también coincidir para que desde el punto n no se puedan bajar dos perpendiculares a una misma recta.

Probada la igualdad de los ángulos y la de los lados opuestos, el cuadrilátero $MNM'N'$ aparece ya con todos los caracteres de los rectángulos euclidianos: podrá ser dividido en dos rectángulos iguales por una cualquiera de sus medianas, y la reiteración de

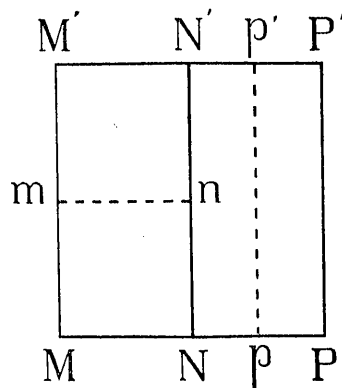


Fig. 2.ª

bién dividida en partes iguales. En el primer caso, como no hay distancia límite, las perpendiculares se podrán trazar tan próximas como se quiera, y admitida la continuidad quedará demostrado el teorema.

Para terminar la demostración en el segundo caso, consideremos tres perpendiculares consecutivas. Por hipótesis son rectos los ángulos en M , en N y en P , recta la línea $M'N'P'$ e iguales las longitudes MM' , NN' y PP' ; luego si doblamos la figura por NN' tendremos que el punto P' caerá sobre M' , lo que implica la igualdad de los ángulos M' y P' y la de los dos ángulos en N' : estos últimos serán por consiguiente rectos. Ahora, si en vez de doblar la figura transportamos $NN'P'P$ sobre $MM'N'N$, de modo que N caiga sobre M y P sobre N ; N' vendrá a M' y P' a N' , lo que hace ver que también son rectos los ángulos en M' y en P' .

Esto supuesto, será posible dividir cada uno de los cuadriláteros, tales como $NPN'P'$, en otros dos iguales entre sí y cuyos ángulos sean también rectos. Bastará para ello trazar la recta pp' perpendicular en el punto medio de NP .

En efecto, si doblamos el plano por la recta pp' , P vendrá a caer sobre N y P' sobre N' ; luego los ángulos en p' serán también iguales, y por consiguiente rectos.

La recta pp' será entonces igual a NN' y a PP' , porque de no ser así, si fuera, por ejemplo, menor, al transportar el cuadrilátero $pPp'P'$ sobre el $NpN'p'$, de modo que pP coincidiera con Np ; el punto P' caería por encima de p' y p' por debajo de N' ; las rectas $p'P'$ y $N'p'$ vendrían a cortarse en un punto, y desde ese punto se podrían trazar dos perpendiculares a NN' y a pp' . Ahora bien: los nuevos cuadriláteros se encontrarán en las mismas condiciones que los anteriores, y será, por consiguiente, posible, mediante divisiones sucesivas, acercarse indefinidamente a un punto cualquiera de las rectas MP o $M'P'$, bastando ya, como en el caso anterior, aplicar el principio de continuidad para que quede demostrado el teorema.

Bastará además que lo hayamos demostrado para la recta AC y para la distancia AA' , para que quede igualmente demostrado para toda otra recta y para toda otra distancia. Para poner-

estas divisiones permitirá constituir en su interior una red de malla tan cerrada como se quiera, formada por rectángulos iguales y semejantes al primitivo; red que podrá extenderse a todo el plano y que estará formada por dos sistemas de rectas ortogonales entre sí y tales que, cuando dos rectas son del mismo sistema, todos los puntos de una de ellas equidistan de la otra. Como además la red puede girar en el plano tomando una orientación cualquiera, se la podrá siempre colocar de modo que el teorema se verifique para un punto y para una recta arbitrarios.

En resumen, la definición de Herón o de Posidonio encierra también un postulado equivalente al de Euclides, al que no llegó a sustituir en la exposición tradicional de la ciencia.

El primer ensayo de demostración directa de este último postulado, por lo menos el más antiguo de que hoy tengamos conocimiento, remonta a Claudio Ptolomeo, el célebre astrónomo y matemático alejandrino del siglo II de nuestra era. No ha llegado hasta nosotros la obra original, y sólo tenemos la referencia de Proclo, que podría quizá no ser completamente fiel. Ptolomeo, se-

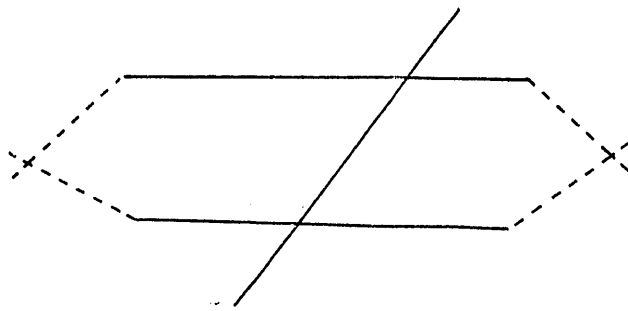


Fig. 3.ª

gún él, había empezado por demostrar que cuando la suma de los ángulos internos y del mismo lado de la secante vale dos rectos las rectas son paralelas. Si no lo fueran, viene a decir, se encontrarían hacia la derecha, por ejemplo; pero entonces, como la suma de los ángulos internos de la izquierda vale también dos rectos, también las rectas deberían encontrarse de ese lado y ten-

drían así dos puntos comunes, lo que estaría en contradicción con uno de los postulados anteriormente admitidos.

De una manera análoga demuestra el teorema recíproco que envolvería ya el postulado. Las rectas, dice, son tan paralelas hacia la derecha como hacia la izquierda. Si en una dirección la suma de los ángulos internos fuera, por ejemplo, menor que dos rectos, lo mismo debería ocurrir en la dirección opuesta, y los cuatro ángulos no podrían valer cuatro rectos contra lo demostrado.

En realidad ni una ni otra demostración son concluyentes, aunque el primer teorema sea cierto con independencia del postulado. Para que el primer razonamiento fuera admisible sería preciso haber demostrado antes que el paralelismo depende precisamente del valor absoluto de la suma de los ángulos internos o externos. La verdad del primer teorema de donde verdaderamente arranca es de que, cuando esa suma vale dos rectos en uno de los lados, no sólo vale dos rectos en el otro, sino que son los ángulos mismos los que son, respectivamente, iguales, de suerte que haciendo girar una parte de la figura alrededor del punto medio del segmento de secante comprendido entre las dos rectas, se la puede llevar a coincidir con la otra parte, y entonces sí será evidente que si las rectas se encontraran a la derecha se deberían encontrar también a la izquierda.

Para el recíproco la misma razón no podría ya alegarse *a priori*. Ciertamente es que si las rectas son paralelas, no podrán encontrarse según la definición admitida ni por la derecha ni por la izquierda, y en este sentido se podrá decir que son tan paralelas por un lado como por otro, pero del hecho de no encontrarse del

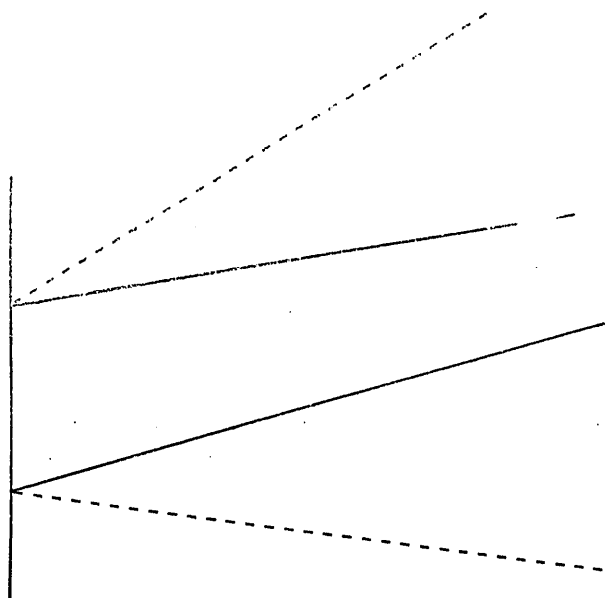


Fig. 4.^a

lado en que la suma de los ángulos sea menor que dos rectos no puede deducirse que del otro lado la suma haya de ser también menor, pues antes, por el contrario, es evidente que si para una cierta suma las rectas ya no se encuentran de uno de los lados, se podrán trazar de ese lado rectas que tampoco se encuentren y para las que la suma de los ángulos sea mayor.

La única conclusión que se puede, pues, deducir de la demostración de Ptolomeo es que si el paralelismo depende exclusivamente de la suma de los ángulos internos y del mismo lado de la secante, y esta suma es la misma para dos rectas paralelas cualesquiera, dicha suma tendrá que ser igual a dos rectos. Pero la afirmación de la hipótesis supone admitir otro postulado que en el fondo no difiere del de Euclides.

Durante la Edad Media son de notar los ensayos de Nassir ed Din, matemático persa del siglo XIII, que demuestran que aun

se mantenían vivas las preocupaciones que el mismo asunto inspirara a los geómetras griegos. Los trabajos de Nassir ed Din no profundizaban, sin embargo, mucho más en el conocimiento de la cuestión, pues partía de un triángulo cuyos ángulos sumaban dos rectos, circunstancia que envolvía precisamente la verdad del postulado, puesto que el correspondiente teorema no viene a demostrarse sino de pués de establecida la teoría de las paralelas.

En el siglo XVII, Giordano, que adoptaba para las paralelas la definición de Herón y de Posidonio, llegó por primera vez a demostrar el teorema de que bastaban tres puntos en línea recta equidistantes de una segunda recta para que lo fueran también todos los puntos de la primera, y pocos años después Wallis hizo igualmente observar que la realidad del postulado era equivalente a la posibilidad de un triángulo semejante a otro dado y de tamaño cualquiera.

El interés crece de punto en el siglo XVIII, y especialmente en el espacio de tiempo comprendido entre 1759 y 1800, período en el cual aparecen más obras sobre ese tema que en los veinte siglos anteriores.

Son de citar, en primer término, en el orden cronológico, los trabajos del jesuita italiano Saccheri. Levantando dos perpendiculares iguales en los extremos de una recta, y acabando de cerrar por otra recta la figura así formada, Saccheri forma un cuadrilátero birrectángulo, cuyos otros dos ángulos demuestra que han de ser iguales entre sí, planteándose en seguida las tres posibles hipótesis, a saber: que sean agudos, rectos u obtusos. Saccheri demuestra, además, que si una de estas tres hipótesis se verifica una vez tan sola, se verificará siempre, sea cualquiera la manera como se hagan variar los datos; pero pretende después establecer lógicamente el postulado demostrando el absurdo de las hipótesis primera y tercera, y aunque acierta al señalar la incompatibilidad de esta última con la infinitud de la recta, no da contra la primera sino la expresión de vagas repugnancias sin sólido fundamento. La identificación del postulado con la hipótesis del ángulo recto es, sin embargo, ya un paso importante.

Algo más profundamente penetró en la cuestión Lambert, en trabajo que no llegó a publicar por no haberle suficientemente satisfecho, y que salió a luz después de su muerte por los cuidados de Juan Bernoulli. Su punto de partida, no muy diferente del de Saccheri, es un cuadrilátero trirrectángulo, sobre cuyo cuarto ángulo pueden igualmente hacerse las tres hipótesis; pero aparte de los resultados obtenidos por su predecesor, Lambert, llega a notar que, al contrario de lo que ocurre en la hipótesis euclidiana, dentro de la cual no hay medida natural en el espacio y toda unidad ha de ser arbitraria, en las otras dos hipótesis, caben en este sentido unidades absolutas, es decir, definibles por sus relaciones con el plano a que pertenecen. Tampoco le pasa inadvertido que la hipótesis del ángulo obtuso tiene su realización sobre la superficie esférica; pero lo que es más notable, llega a emitir la sospecha, prematura para la época en que escribía, de que la del ángulo agudo podría verificarse sobre una esfera de radio imaginario.

Pero los trabajos que en esta vía alcanzaron más notoriedad fueron los de Legendre. Ya en la primera edición de sus *Elementos de Geometría* intentó una demostración directa del postulado, de la que, poco satisfecho después, hubo de prescindir en ediciones posteriores.

Trataba de demostrar que una perpendicular y una oblicua a una misma recta acaban por encontrarse, y al efecto razona del siguiente modo:

Sean BD la perpendicular y AC la oblicua y AE una nueva perpendicular a AB trazada por el punto A . Tomemos un punto F sobre AC , y bajemos desde él una perpendicular a AB . Esta

perpendicular deberá caer en el interior del ángulo CAB , porque si cayera fuera habría de cortar a AE en K y tendríamos desde este punto K dos perpendiculares a AB . La perpendicular verda-

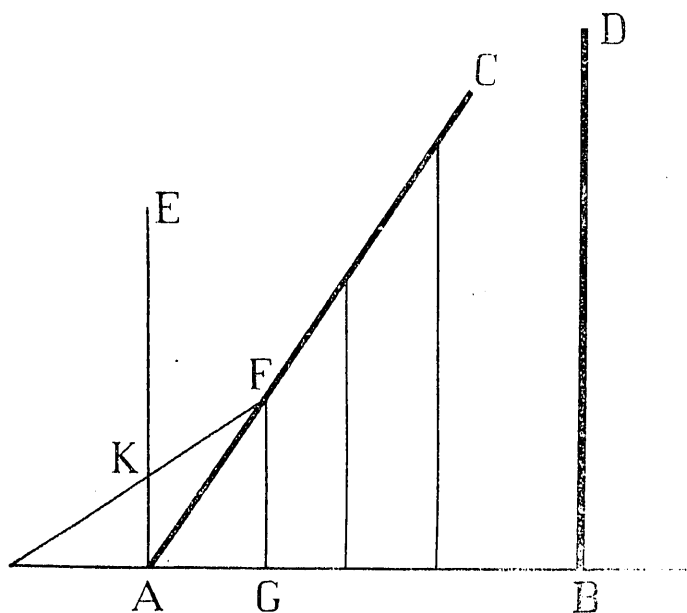


Fig. 5.ª

dera debe ser, pues, tal como FG y el punto G estará comprendido entre A y B . Si tomamos a la derecha de F otro punto sobre AC y desde él bajamos la perpendicular a AB , obtendremos, por las

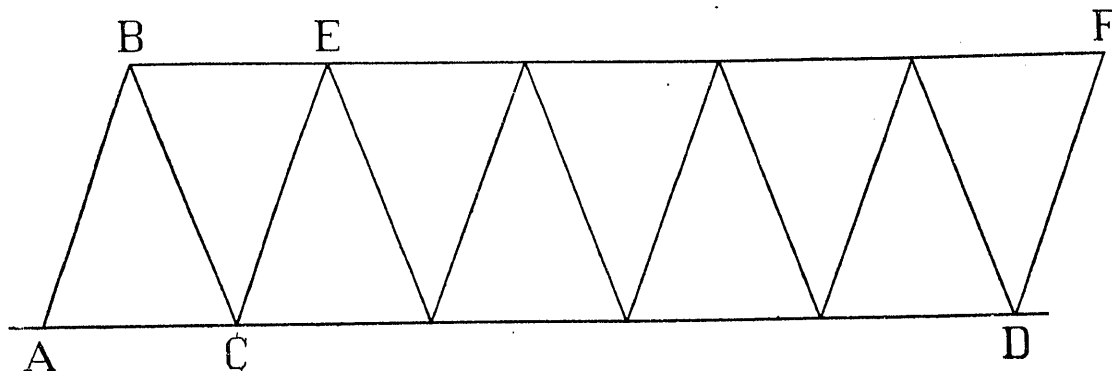


Fig. 6.ª

mismas razones, para pie de esta perpendicular un punto comprendido entre G y B , y continuando indefinidamente estas construcciones acabará por alcanzarse o excederse el punto B y la recta AC por cortar a la BD .

La insuficiencia de esta demostración salta, sin embargo, a la vista. Los puntos como el G podrían acercarse continuamente a B sin alcanzarlo, ni aun asintóticamente por velozmente que caminara el punto F sobre la recta AC . Si así no ocurre en nuestra geometría euclídea, es porque los recorridos de F y de G son proporcionales; pero esto no es más que una consecuencia de la teoría euclidiana de las paralelas.

Continuando sus investigaciones y reconociendo la identidad del postulado con el teorema relativo a la suma de los ángulos de un triángulo, Legendre se propuso demostrar directamente que esta suma era igual a dos rectos. Consiguió, desde luego, demostrar que no puede ser mayor; para ello, apoyándose sobre una recta AD , construyó una serie de triángulos iguales, cuyos vértices no coincidentes venían a ser enlazados por rectas, que venían a cerrar otra serie de triángulos iguales yuxtapuestos a los primeros. Esto supuesto, consideremos uno de los vértices C situados sobre la recta AD . En este vértice se reúnen tres ángulos cuya suma es precisamente igual a dos rectos. De estos ángulos, dos son los ángulos A y C del triángulo primitivo; el tercero,

pertenece a un triángulo de la otra serie. Si la suma de los ángulos de ABC valiera más de dos rectos, el ángulo en B de este triángulo sería mayor que el ángulo BCE , y como los dos triángulos ABC y BCE tienen dos lados, respectivamente, iguales, los terceros lados tendrán la misma relación de magnitud que sus ángulos opuestos y se tendrá, por consiguiente, que $AC > BE$. Si esto es así, por pequeña que fuera la diferencia sería posible multiplicarla por un factor suficiente para que la diferencia fuera mayor que el doble de AB , y entonces, se tendría que la línea recta AD sería mayor que la quebrada de los mismos extremos $ABE\dots FD$.

Que la suma de los ángulos no puede ser menor, creyó también demostrarlo, pero también aquí hubo de rectificar después, declarando no quedar satisfecho del rigor de su demostración. En el primer caso, sin embargo, conviene también hacer notar que se supone la recta ilimitada y sobre todo que es la más corta distancia entre dos de sus puntos por lejanos que se consideren entre sí. Estas hipótesis no se realizan sobre la superficie esférica, y por eso puede ocurrir sobre ella que la suma de los ángulos del triángulo valga más de dos rectos.

Legendre demostró también que si hay, por lo menos, un triángulo en el que la suma de los tres ángulos valga dos rectos, ocurrirá lo mismo con otro triángulo cualquiera. La demostración es sencilla si se recuerda lo dicho anteriormente, respecto a las paralelas equidistantes. Sea, en efecto, ABC el triángulo dado en el cual se verifica el clásico teorema, y sea A el mayor de sus ángulos: los otros dos ángulos serán agudos y la altura AD caerá

dentro del triángulo y le dividirá en otros dos. La suma de los ángulos de estos dos triángulos valdrá evidentemente cuatro rectos, y como la de ninguno de ellos puede exceder de dos, dos rec-

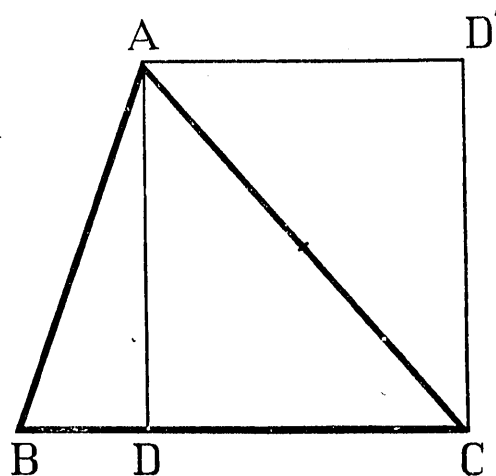


Fig. 7.ª

tos valdrá también la suma de los ángulos de cada triángulo. Bastaría con que esto ocurriera solamente en uno, en el de la derecha, por ejemplo. Si hacemos girar 180° este triángulo rectán-

gulo alrededor del punto medio de su hipotenusa, le haremos tomar la posición $AD'C$ y habremos determinado un cuadrilátero en el que los cuatro ángulos son rectos y los lados opuestos iguales. Será un rectángulo euclídeo que podrá ya servir de base para construir la red rectangular de que antes hacíamos uso para probar que todas las paralelas serían equidistantes, y en definitiva

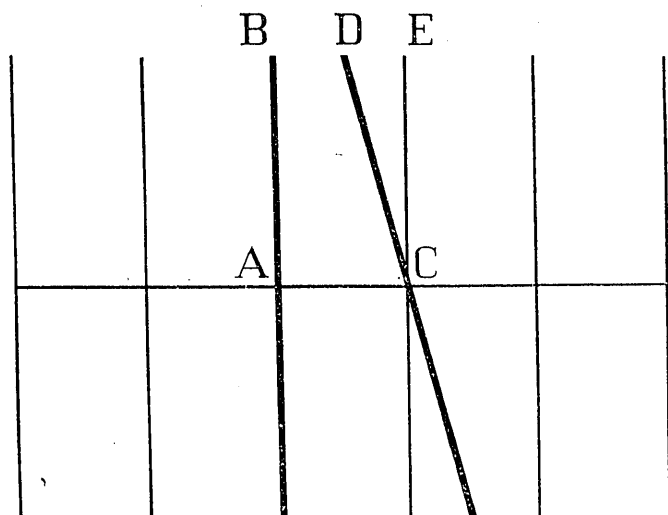


Fig. 8.ª

que el postulado era cierto, y cierto, por consiguiente, que la suma de los ángulos de un triángulo cualquiera vale dos rectos.

Se había, pues, conseguido reducir a un aparente mínimo el esfuerzo necesario para acabar la demostración que de tantas preocupaciones era objeto: bastaba encontrar un solo caso particu-

raba. En ella se quiso encontrar la clave del enigma que hubiera de explicar tan obstinada resistencia.

La más sugestiva de todas las demostraciones basadas sobre estos principios es la de Bertrand de Ginebra. Reducida a sus términos más sencillos puede presentarse del siguiente modo: Se trata de probar que una perpendicular y una oblicua a la misma recta acaban por encontrarse. Sean, por ejemplo, la perpendicular AB y la oblicua CD . Por el punto C tracemos la perpendicular CE y, dividiendo en uno y otro sentido la recta AC en longitudes iguales a este segmento, levantemos nuevas perpendiculares en los puntos de división. Tendremos así un número infinito de fajas iguales que cubren todo el plano.

Supongamos ahora que alrededor del punto C llevamos sucesivamente ángulos iguales al ángulo ECD . Por pequeño que sea este ángulo, agrupando un número finito de ellos llegaremos a alcanzar o a traspasar la recta inicial CE . Luego un ángulo cualquiera será siempre infinitamente mayor que una faja y no será posible, por consiguiente, que quede encerrado en ella. Si, pues, las rectas AB y CD se alejan evidentemente por la parte inferior, se encontrarán necesariamente por la superior.

Una consideración muy sencilla podría bastar, sin embargo, para recusar la validez lógica de la demostración. Supongamos, por ejemplo, una serie de puntos equidistantes, que se prolonga hacia el infinito por la derecha.

Consideremos sólo en primer término los que ocupan lugar de orden impar y señálemoslos con los números de la serie natural. Los lugares que quedan por señalar pueden ser también numerados uno sí y otro no, empleando igualmente los números de la

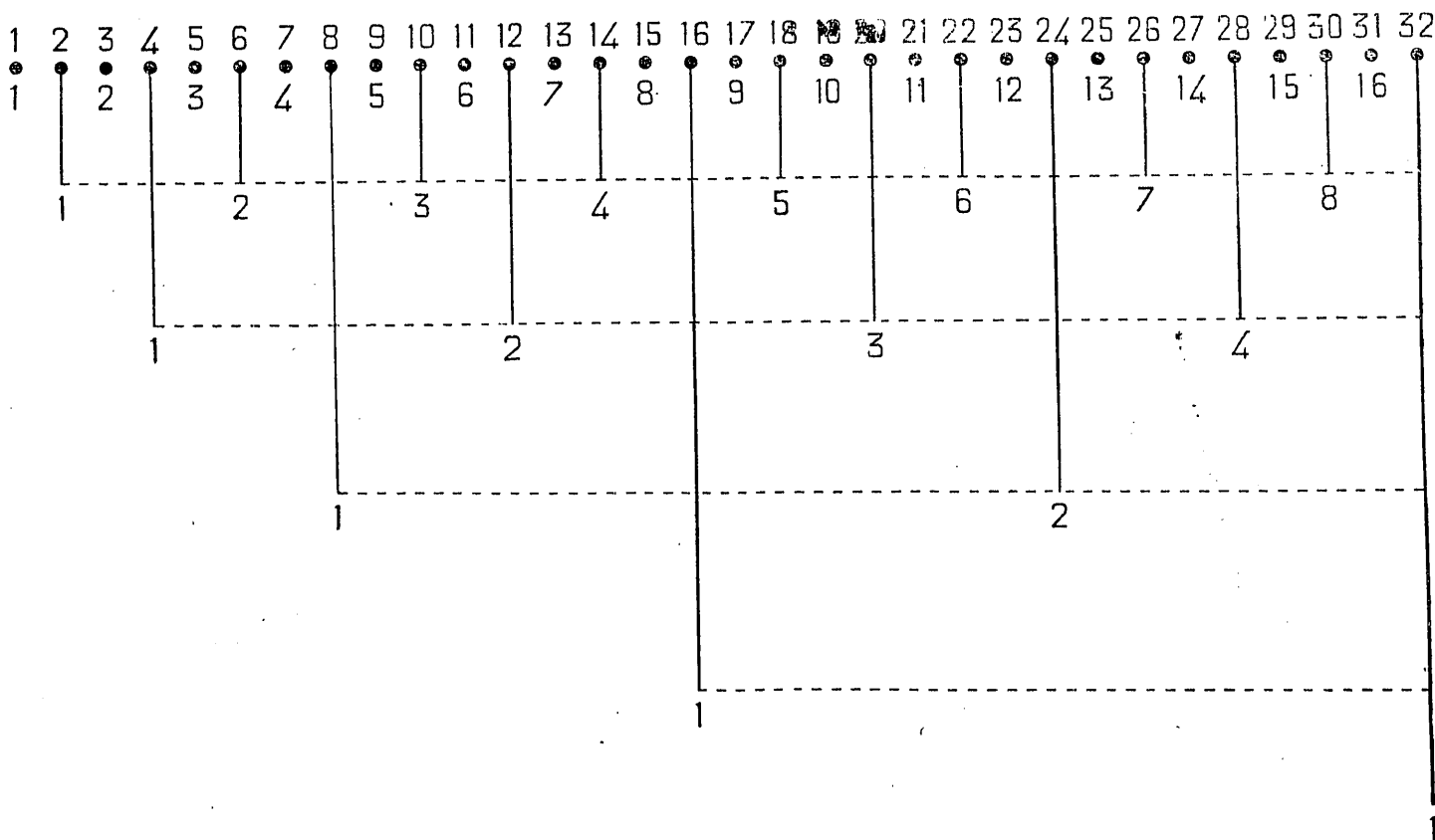


Fig. 9.ª

lísimo, pero en ese caso parecían refugiarse todas las dificultades que empeñados combates no habían hecho más que alejar de trinchera en trinchera.

En situación al parecer tan desesperada intentó recurrirse por algunos a un remedio heroico. Los brillantes triunfos del cálculo infinitesimal habían familiarizado con la idea del infinito, cuyos peligros no se conocían todavía bien, y cuya fecundidad se exage-

misma serie. Los lugares no señalados todavía pueden ser objeto nuevamente de igual numeración alternativa, y la operación podrá prolongarse indefinidamente, porque siempre quedará un número infinito de lugares por señalar.

Pero si de primera intención los hubiéramos por su orden numerado a todos, hubiéramos empleado los mismos números que en una sola de las series. Estas aparecen así igualmente numero-

sas entre sí y con la total, y, sin embargo, como son en número infinito deberán ser, razonando de modo análogo al de Bertrand, infinitamente pequeñas con relación a aquélla. Y es que hay una contradicción fundamental en pretender medir el infinito, porque medir es definir y no se puede definir lo que es por definición indefinible.

Ahora bien, si intentamos dar a la demostración de Bertrand una forma definida, en seguida observaremos que el plano total a que alude tiene distinta generación cuando se le supone formado de fajas y cuando se le supone dividido en ángulos. En el primer caso es una especie de rectángulo que se alarga y se ensancha sin medida, en el segundo es un círculo cuyo radio crece indefinidamente. Ambas concepciones son precisas para que en la una sean iguales las fajas o para que lo sean los ángulos en la otra. Sin llegar al límite la comparación no es posible y al límite sólo se llega por un salto en las tinieblas que pretende resolver, cerrando los ojos, esta especie de cuadratura del círculo.

Si consideramos, en efecto, una de las circunferencias finitas las fajas no son ya ni iguales ni infinitas en número, y el ángulo

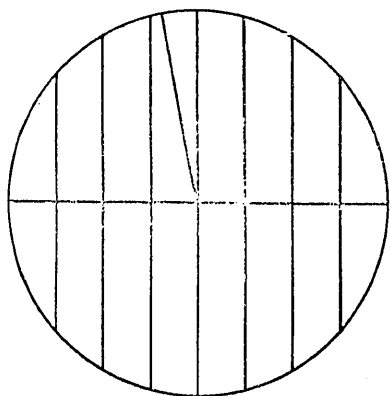


Fig. 10.

puede, sin contradicción, quedar contenido entre dos perpendiculares. Si todavía, y a pesar de esto, la demostración de Bertrand sigue haciendo mella en nuestro espíritu, es porque, más o menos, inconscientemente, admitimos que las perpendiculares se mantienen equidistantes entre sí y que las centrales acabarán por interceptar sobre la circunferencia arcos sensiblemente iguales a esa equidistancia, mientras que los ángulos, dividiendo siempre a la circunferencia en partes iguales, van separando sus lados cada vez, más sin límite alguno, y por eso cuando lo vemos comprendido todavía en la faja, nos vemos inclinados a exclamar: ¡Prolongad el radio si no es suficiente todavía! ¡Seguid, seguid prolongando! Al fin vencerá el infinito. No es otro infinito el que lucha contra él: es una cantidad finita, determinada, constante, y ésta al fin será traspasada.

Pero si supiéramos que las perpendiculares van también divergiendo, como sería el caso en la hipótesis del ángulo agudo de Saccheri o de Lambert, ya aquella fuerte convicción vacila; nuestras ideas se nublan de nuevo, las dos divergencias nos confunden y entra en nosotros la duda de si no podrá conservar y aun aumentar su ventaja la perpendicular que desde el principio tomó la delantera. Más tarde veremos como esto puede ocurrir; por de pronto nos limitamos a comprobar como la demostración de Bertrand se desvanece.

Al mismo orden de ideas responde una de las demostraciones propuestas por Schumacher a Gauss.

Consideremos un triángulo, venía a decir, y un círculo de radio infinito que tenga su centro en su interior o en sus proximidades. Prolonguemos los lados del triángulo hasta que corten a la circunferencia. La recta trazada desde uno de los vértices del

triángulo hasta un punto de la circunferencia puede ser considerada como un radio, porque no diferirá del radio verdadero de ese punto sino en una cantidad infinitamente pequeña en comparación con dicho radio y despreciable por consiguiente. Cada ángulo del triángulo tendrá, pues, por medida el arco comprendido entre sus lados, y como evidentemente los tres arcos cubren una semicircunferencia, la suma de los tres ángulos valdrá dos rectos.

No parece haber aquí un salto brusco al límite. Se siente que la hipótesis ha de ir realizándose a medida que el radio aumenta, cada vez con más precisión, pero si se examina atentamente el razonamiento, se verá que está implícito en él el supuesto de que

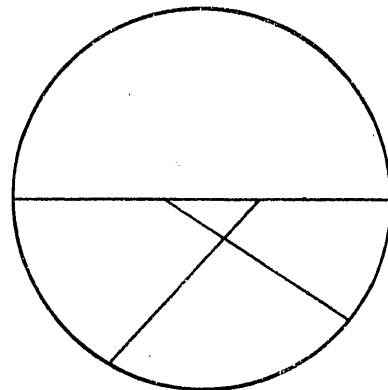


Fig. 11.

al crecer el radio y con él la circunferencia, la derivada de la circunferencia con relación al radio no crece indefinidamente, porque si creciera así, ya los segmentos finitos dejarían de ser despreciables, porque, al ser multiplicados por una cantidad infinita podrían hacerse comparables al radio y deber ya ser tomados en cuenta.

Esta demostración de Schumacher había sido sustituida por él a otra que en primer lugar había propuesto, y que en definitiva se reducía a comprobar que en un triángulo infinitamente pequeño la suma de los ángulos vale dos rectos. Si se pudiera demostrar que esa suma había de ser constante, con esa comprobación bastaba; pero de no ser así, es insuficiente hasta para dar el punto de apoyo que exige el teorema de Legendre, porque éste supone esencialmente que el triángulo haya de ser finito. Por otra parte, Lambert había ya demostrado que tanto en la hipótesis del ángulo agudo como en la del ángulo obtuso, el área del triángulo era proporcional a la diferencia entre dos rectos y la suma de sus ángulos; no era, pues, extraño que fuera igual a dos rectos la suma de los ángulos de un triángulo nulo.

El fracaso de tantas tentativas, acometidas por hombres de alta mentalidad, había acostumbrado a la idea de que la demostración pudiera ser imposible y de que el postulado no fuera consecuencia forzosa de los demás postulados y axiomas anteriores; pero aceptando la necesidad de algún nuevo principio, se quería encontrarlo tal que apareciera con un mayor grado de evidencia que el propuesto por Euclides. Carnot creía encontrarlo en la aceptación como evidente de la posibilidad de la semejanza geométrica. «La teoría de las paralelas—dice—se enlaza con una noción primera que me parece ser casi del mismo grado de claridad que la de la igualdad perfecta o de la superposición: es la noción de semejanza. Entiendo que se puede mirar como un principio de la mayor evidencia que lo que existe en grande, como una bola, una casa, un dibujo, se puede hacer en pequeño y recíprocamente.» Pero así expuesta la idea era un poco vaga; precisarla equivalía a dar como evidentes la proporcionalidad o la igualdad de los ángulos, y esto debía parecer un poco fuerte a los que negaban la evidencia al postulado de Euclides.

También en este camino nos ha dejado Legendre una de-

mostración ingeniosa del teorema de la suma de los ángulos del triángulo. Su explícito fundamento es el principio de homogeneidad. Un triángulo, viene a decir, queda completamente determinado cuando se conocen uno de sus lados y los dos ángulos adyacentes al mismo, luego el tercer ángulo se podrá conocer con completa exactitud en función de aquellos datos. Habrá, pues, una cierta relación que ligue a los tres ángulos y a un lado; pero si se toma como unidad de ángulos el ángulo recto, los ángulos estarán ya representados por números en la fórmula, mientras que el lado será una magnitud concreta, que para que la relación se verifique deberá desaparecer de la expresión, en la cual no entrarán, por consiguiente, ya más que los tres ángulos.

Siguese de aquí que cuando dos ángulos sean conocidos, el tercero lo estará también, y ya esto basta para demostrar el teorema, en primer lugar, para el caso del triángulo rectángulo. Si desde el vértice *A* del ángulo recto bajamos, en efecto, una perpendicular sobre la hipotenusa, se tendrá que el ángulo *CAD* será

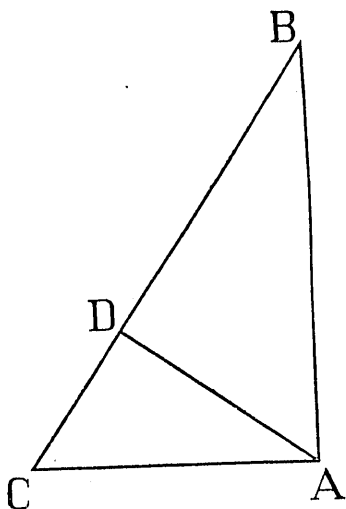


Fig. 12.

igual al ángulo en *B*, y el ángulo *DAB* al ángulo en *C*; luego los dos ángulos agudos de un triángulo rectángulo suman un recto. Si suponemos después un triángulo cualquiera se podrá dividir en dos triángulos rectángulos por una perpendicular trazada sobre el lado mayor desde el vértice del mayor de sus ángulos y la demostración se terminará ya sin ninguna dificultad.

Si tratáramos de resumir el ambiente mental que todos estos ensayos revelaban, observaríamos, desde luego, que en todos ellos late el supuesto de que el espacio, realidad sustantiva o sistema de relaciones, constituía una cosa necesaria cuyas leyes ni dependían de nuestro arbitrio ni aun de la soberana omnipotencia de Dios. Eran dictados de una razón eterna a la que ninguna inteligencia se podía sustraer, una vez que le hubieran sido reveladas por la intuición.

Partiendo de esta concepción, no cabía sino que el postulado de Euclides fuera una proposición verdadera o falsa, pero nunca una hipótesis lógicamente indiferente. Al procurar demostrarlo, no se dudaba de su exactitud; se intentaba solamente reducirlo a los demás axiomas y definiciones, en los que se suponía que estaban encerrados todos los elementos de nuestra intuición. Por eso vemos a Saccheri, a Lambert y al mismo Legendre llegar a resultados que debían haberlos ya conducido, sin grandes esfuerzos, como veremos luego, a la solución del enigma y retroceder, sin embargo, como espantados, tratando de convencerse a sí mismos con fútiles razones de las preocupaciones de su pensamiento, cegados sus ojos por la claridad intensa que de repente se alumbraba en su camino. ¡Extraña fuerza de la costumbre! ¡Influencia enorme del sentir común, en el que más o menos consciente-

mente descansa la mayor parte de nuestras creencias, fuertemente adheridas a su apoyo como aplastadas bajo la enorme pesadumbre de los propios y ajenos prejuicios!

Para dentro de ese ambiente rechazar por completo el postulado de Euclides y fundar un nuevo sistema geométrico se necesitaban alientos de genio, pero también una voluntad de gigante. Gauss, con toda su enorme autoridad, temblaba. El caso es curioso y elocuente. Desde sus primeros años, Gauss se preocupaba de encontrar un sólido fundamento a la ciencia geométrica, y estas preocupaciones las comunicaba a su camarada de estudios Wolfgang Bolyai, también interesado en la misma cuestión, y padre que fué del otro célebre matemático que con Lobachefski comparte la gloria de haber dado vida a la nueva geometría. Gauss y Bolyai eran próximamente de la misma edad. Bolyai tenía sólo dos años más. Una fuerte amistad ligó toda su vida a estos dos hombres que habían llegado a conocerse y a intimar en la edad en que nacen los más puros y desinteresados afectos.

En 1799 contaba Gauss veintidós años de edad y escribía a su amigo contestando a otra carta suya:

«Siento mucho no haber aprovechado nuestra anterior proximidad para conocer mejor tus trabajos sobre los primeros fundamentos de la geometría; me hubiera ciertamente ahorrado mucho trabajo inútil y estaría más sosegado que puede estarlo el que como yo tanto ambiciona en esa materia. También yo llevo mis trabajos bastante adelantados (dado el poco tiempo que me dejan libre mis heterogéneas ocupaciones); sólo que el camino por mí seguido me conduce, más bien, que al objeto que se desea y que tú aseguras haber alcanzado, al contrario, es decir, al de hacer dudosa la verdad de la geometría. He llegado en este punto a una situación tal que lo que la mayor parte de las gentes tienen por demostración válida a mis ojos se reduce a nada; por ejemplo, si se pudiera demostrar que es posible un triángulo rectilíneo cuya área sea mayor que una superficie dada cualquiera, podría, a mi vez, demostrar completa y rigurosamente toda la geometría. Los más considerarán tal cosa como un axioma, yo no; porque es muy posible que por lejos que se supusieran entre sí en el espacio los tres vértices del triángulo, el área quedara, sin embargo, siempre por debajo de una determinada cantidad. Teoremas como este tengo muchos; pero en ninguno encuentro nada satisfactorio. Haz que tu trabajo sea pronto conocido; no recogerás por él ciertamente las gracias del gran público (al cual también pertenece alguno que es tenido por hábil matemático), pues cada vez me persuado más de que el número de los verdaderos geómetras es excesivamente pequeño y de que la mayor parte de las dificultades de tales trabajos no pueden juzgarse ni aun comprenderse; pero de seguro recibirás las gracias de todos aquellos cuyo juicio pueda ser efectivamente estimable.»

Ya en esa carta se observan suficientes indicios de que Gauss estaba en el camino de la verdad, y al mismo tiempo un vago recelo del efecto que sus trabajos pudieran producir en el público, aún matemático. Su juicio se afirmó con el tiempo, y también sus desconfianzas. En 1817 escribía a Olbers diciéndole: «Cada vez se afirma más mi convencimiento de que la necesidad de nuestra geometría no puede ser demostrada ni por entendimientos humanos ni para el entendimiento humano. Quizás pueda serlo en otra vida, con otra percepción de la esencia del espacio que actualmente es inaccesible para nosotros. Hasta entonces no debía ser considerada la geometría como la aritmética ciencia pura, y *a priori*, sino ser colocada en el mismo rango que la mecánica.....» Y al año siguiente contestando a Gerling, que le había consultado, le decía: «Me alegro de que tengáis el valor de expresaros como si reconocierais la posibilidad de que nuestra teoría de las paralelas y toda nuestra geometría fuera falsa; pero

las avispas, obligadas a salir de su avispero, os volarán a la cara».

Tenía ya Gauss en esta fecha cuarenta y un años, era ya suficiente y favorablemente conocido en el mundo científico y no osaba todavía publicar por entero sus pensamientos, a los que sólo hacía algunas alusiones en el seno de la intimidad. En el mismo estado de espíritu le encontramos once años más tarde. En 1829 escribe al célebre astrónomo Bessel:

«Mi convencimiento de que no podemos fundar completamente *a priori* la geometría se ha hecho, si cabe, aún más fuerte. No llegaré, sin embargo, todavía en mucho tiempo a publicar del todo mis muy extensas investigaciones sobre la materia, y quizás esto no sea en mis días, porque temo el griterío de los beocios si expresara por completo mi opinión.»

De 1831 es su correspondencia con Schumacher a propósito de las demostraciones por éste propuestas para el teorema relativo a la suma de los ángulos de un triángulo. En ella se encuentra ya la denominación de geometría no euclídea y la cita de determinados resultados que demuestran su pleno conocimiento del asunto. En una de esas cartas se expresa de este modo:

«Desde hace algunas semanas he comenzado a poner por escrito algunos resultados de mis propias meditaciones sobre esta materia, que remontan en parte a cuarenta años y de las que no había nunca redactado nada, lo que me ha forzado tres o cuatro veces a volver a empezar todo el trabajo en mi cabeza. No querría, sin embargo, que todo esto pereciera conmigo.»

No parece, sin embargo, que se apresurara mucho por realizar este propósito, y en todo caso no publicó nada antes de 1846, en que ya le eran conocidos los trabajos de Lobachefski, según se desprende de carta de aquella fecha escrita a Schumacher, recomendándoselos. En ella le dice:

«Usted sabe que desde hace cincuenta y cuatro años comparto las mismas convicciones, sin hablar aquí de ciertos desarrollos que han recibido después mis ideas sobre este asunto. No he encontrado, pues, en la obra de Lobachefski ningún hecho nuevo para mí; pero la exposición es completamente diferente de la que yo había proyectado, y el autor ha tratado la materia de mano maestra y con verdadero espíritu geométrico.»

Cinco años después, Wolfgang Bolyai, dando cuenta del juicio que a Gauss habían merecido los trabajos de su hijo, decía:

«..... de Gotinga escribió el matemático gigante que desde las elevadas cimas abraza con su mirada desde los astros hasta los profundos abismos, que está encantado por ver hecho lo que él había emprendido para dejarlo entre sus papeles.»

De este modo Gauss hubo de renunciar a la gloria de sus descubrimientos y a la publicación de unos trabajos que le preocuparon durante toda su vida, por el temor, quizás excesivo, al severo y desconsiderado juicio de sus contemporáneos, contentándose con dar su completa adhesión a los escritos de investigadores más audaces, cuyas obras tal vez hubieran encontrado atención más propicia y difusión más rápida si él se hubiera atrevido a tomarlas públicamente bajo su patrocinio. Hasta tal punto consideraba hostil la opinión de los centros de mayor cultura matemática de la época contra un tan trascendental cambio de valores de los conceptos geométricos. La revolución que suponía la nueva geometría en el mundo del pensamiento era, en efecto, sólo comparable al descubrimiento de América en lo geográfico o al sistema heliocéntrico en la concepción del Universo.

Al fin la luz asomó por Oriente. En aquella Rusia casi bárbara, y en los lejanos confines de la Transilvania, dos hombres estudiosos y geniales, sin conocerse mutuamente ni comunicarse su pensamiento, llegaban a conclusiones idénticas, las mismas que habían surgido poco antes en el poderoso cerebro de Gauss: el uno era el ruso Nicolás Lobachefski; el otro el húngaro Juan

Bolyai. Ambos seguían desde sus retiros el movimiento de la ciencia de Occidente; pero protegidos quizás por la distancia del influjo demasiado aplastante de la autoridad y del medio, pudieron dar rienda suelta a su inteligencia sin verla constreñida ni por barreras arbitrarias ni por preceptos de dudosa legitimidad.

Lobachefski publicó sus primeros trabajos en el *Correo de Kazan* en 1829, y más tarde, y con más extensión en las Memorias de la Universidad de dicho punto, en los años de 1836 a 1838. Él mismo reconoce que no llegó a interesar a sus compatriotas, y tal vez buscando público más numeroso e inteligente publicó un opúsculo en alemán en 1840 con el resumen de sus investigaciones, que continuó hasta poco antes de su muerte, ocurrida en 1856.

Lobachefski prescinde del postulado y da una definición positiva de las paralelas; la paralela es para él el límite de la posición de una recta que, pasando por un punto, corta a otra recta en un punto que se aleja sobre ella indefinidamente. Esto supuesto, el punto móvil puede alejarse por la derecha o por la izquierda, y ninguna razón hay *a priori* para que en uno y otro caso se llegue a la misma posición límite de la secante. Habrá, pues, en general dos paralelas a una recta, las cuales formarán entre sí un ángulo entre cuyos lados estarán comprendidas todas las demás rectas que no llegan a cortar a la recta fija. Tomando este punto de partida, Lobachefski le desarrolla con todas sus consecuencias sin llegar a ninguna contradicción, y afirma que no habrán de encontrarse.

Los trabajos de Juan Bolyai no se publicaron hasta 1832 como apéndice al segundo tomo de una obra de su padre. Aunque coincide sustancialmente en los puntos de vista con Lobachefski, su labor publicada no es tan extensa, y como además su publicación fué posterior, se suele atribuir a Lobachefski el principal mérito del descubrimiento.

Casi olvidados habían quedado estos trabajos cuando Riemann, en su Memoria sobre las hipótesis que sirven de base a la geometría leída en 1854 en la Sociedad filosófica de Gotinga, volvió a llamar la atención sobre el tema añadiendo puntos de vista nuevos. «La observación nos enseña —dice— con una gran certeza que el espacio real es no infinito, sino ilimitado». Y de aquí deduce la posibilidad de una nueva geometría distinta de la de Euclides y de la de Lobachefski, y análoga en un todo a la geometría esférica con la que se confundiría para la geometría plana y de la que sería una generalización extendida al espacio de tres o más dimensiones. En la geometría de Riemann no hay paralelas, dos rectas se encuentran siempre y la suma de los ángulos de un triángulo es mayor que dos rectos.

La Memoria de Riemann no se publicó hasta 1867.

En 1866 se había publicado en Francia la primera traducción del folleto alemán de Lobachefski debida a los cuidados de Houël, el sabio profesor de la Facultad de Burdeos, que en 1868 presentó también al público francés el trabajo de Bolyai. Este había sido en la misma fecha dado en italiano por Battaglini, y la publicación de todos estos trabajos consigue renovar el interés por el asunto. De este mismo año de 1868 es una Memoria de Beltrami, publicada también en el *Giornale di Matematiche*, de Battaglini, en la cual vienen a confirmarse los resultados obtenidos por Lobachefski y por Bolyai, dándoles una interpretación, por lo menos, parcial dentro de la misma geometría euclídea.

«En estos últimos tiempos —empieza diciendo Beltrami— el público matemático ha comenzado a ocuparse de algunos nuevos conceptos, los cuales parecen destinados, caso de que prevalezcan, a cambiar profundamente toda la urdimbre de la geometría clásica». Reconoce en seguida que no son de fecha reciente, y, después de recordar la plena adhesión de Gauss a las nuevas doctri-

nas, trata de justificar su propio trabajo en estos términos: «Cuando tales tentativas se presentan como fruto de investigaciones concienzudas, y de convicciones sinceras, cuando ellas encuentran el patrocinio de una autoridad imponente y hasta aquí indisputada, el deber de los hombres de ciencia es discutir las con ánimo sereno, manteniéndose igualmente lejanos del entusiasmo y del desprecio».

Parecía no querer entregarse al primero para prevenirse contra el segundo.

El punto de partida de Beltrami eran las analogías evidentes, ya notadas de antiguo por los geómetras entre la geometría de la esfera y la geometría plana, y que si no iban más lejos era porque en la esfera se presentaban casos excepcionales en que el arco de círculo máximo no quedaba determinado por dos de sus puntos. Razonando por analogía, Beltrami se había preguntado si no sería posible construir alguna superficie en la que sustituyéndose las rectas por geodésicas vinieran a realizarse los mismos teoremas de la geometría de Lobachefski. Se explica que estas aproximaciones no se hubieran ocurrido antes, porque el concepto de superficies flexibles y aplicables una sobre otra apenas si había llegado a ser familiar entre los matemáticos, y sospecha que la representación que persigue pueda encontrarla sobre las superficies de curvatura constante negativa. La Memoria está destinada a comprobar la hipótesis, la cual queda confirmada hasta donde es posible.

Con la Memoria de Beltrami quedaban disipadas las últimas dudas que hubieran podido quedar sobre la coherencia lógica de la nueva geometría. Mientras las conclusiones se habían acumulado a partir de postulados imaginarios sin representación sensible, la ausencia de contradicción no satisfacía por completo al espíritu, porque siempre podía quedar el temor de encontrarla más adelante. Ahora ya la geometría de Lobachefski, en su parte plana por lo menos, era referida a la misma geometría de Euclides. Si ésta era, pues, verdadera, también debía serlo aquélla; la contradicción no encontrada no podía presentarse jamás.

Hasta la publicación de las traducciones antes citadas la cuestión en Francia y en Bélgica se encontraba en el mismo estado de adelanto en que la dejó Legendre. Algunas tentativas se habían hecho para completar su trabajo, pero en todas ellas no se aspira a otra cosa que a demostrar el postulado en cuya necesidad lógica se sigue creyendo. Pueden citarse los nombres de Lamarle, de Gergonne, de Tilly. Este último, que más tarde había de contribuir al progreso de las nuevas teorías, intentaba todavía en 1860 demostrar el teorema relativo a la suma de los ángulos de un triángulo razonando como si esta suma ya, según Legendre, no mayor que dos rectos, tuviera un límite mínimo desconocido *a priori*, pero diferente de cero. Con razón había podido decir Huetel en el prólogo de su traducción del trabajo de Lobachefski: «A pesar del gran valor de estas investigaciones, ellas no han atraído hasta aquí la atención de ningún geómetra».

La vulgarización intentada por Huetel no produjo tampoco efectos demasiado inmediatos; los ensayos de demostración siguieron presentándose y aún forzaban las puertas de la Academia de Ciencias de París: un ejemplo altamente significativo nos lo va a probar. Presentóse a la Academia en 1869 una de estas pretendidas demostraciones imaginada por M. Carton. La nota titulada «Nuevo medio para disipar la dificultad de la teoría de las paralelas» se presentó según los *Comptes Rendus* en la sesión de 5 de julio y fué enviada por la docta Corporación a la Sección de Geometría. Tocó a Bertrand ser ponente del informe, no al Bertrand de Ginebra de que antes hablábamos y que había muerto ya, sino al célebre matemático y académico cuyas obras consultamos todavía y algunas de las cuales nos han iniciado en los métodos de la Ciencia.

Bertrand dió lectura a su informe en la sesión de 20 de diciembre y, entre finas ironías y alabanzas un tanto desdeñosas, expresa en la parte preliminar de su trabajo el juicio que le merece la geometría de Lobachefski. Dejémosle la palabra.

«Ningún geómetra desde Euclides ha concebido dudas serias sobre el valor de la suma de los ángulos de un triángulo; un postulado es necesario para probar que es igual a dos ángulos rectos; pero la evidencia de este postulado permite a los espíritus de buena fe aceptarlo como un axioma, y los dialécticos ansiosos de disputar, no de instruirse, son los únicos que pueden recusar su evidencia».

»Hemos de confesar que nunca nos ha parecido muy necesario el reducirlos al silencio; la geometría conservaría, en efecto, aun después de este éxito, dificultades mucho más insolubles; la pretensión de hacer reposar la ciencia sobre el razonamiento solo, sin hacer intervenir en él el sentido íntimo relativo a las ideas de espacio, parece absolutamente quimérica; la evidencia, hágase lo que se haga, debe ser invocada; es solamente sobre ella sobre la que pueden reposar las ideas primeras de línea recta y de plano. Un ser organizado de otro modo que nosotros, y privado de este sentido común que se invoca a veces sin decirlo explícitamente, podría poseer las facultades de razonamiento más desarrolladas, sin llegar a ser capaz de estudiar la geometría de Euclides, donde la lógica le mostraría claramente lagunas que la clara visión de los primeros principios no podría colmar para él.

»La demostración del postulado de Euclides no bastaría, pues, para cambiar el carácter lógico y el grado de certeza de los estudios geométricos. ¿Es preciso deducir de aquí que carezca de interés y que toda tentativa hecha en este sentido deba ser sistemáticamente rechazada? No podríamos pensar así; el problema tantas veces abordado ha adquirido, por el recuerdo mismo de tantos esfuerzos infructuosos, el interés que se concede a una dificultad incontestable. Investigaciones muy singulares, y de una naturaleza muy especial en la historia de la ciencia matemática, han venido, desde hace medio siglo, a aumentar todavía este interés.

»Un geómetra ingenioso, Lobachefski, de Kazan, ha osado preguntarse qué llegaría a ser la geometría si, siendo inexacto el postulado de Euclides, la suma de los ángulos de un triángulo difiriera de dos rectos. Espíritu potente y sagaz, profundamente instruido en la más elevada ciencia, Lobachefski, por una serie de razonamientos sólidamente ligados a sus premisas, ha obtenido extraños resultados, constituyendo una geometría nueva, a la que su audacia no ha osado dar otro nombre que el de *geometría imaginaria*. El ilustre Gauss ha aumentado singularmente su importancia declarándola construída de mano maestra, y conforme en sus rasgos principales con resultados que ya él poseía desde antiguo.

»Fortificadas con tal testimonio, las aserciones de Lobachefski han sido a menudo reproducidos; se ha sustituido al prudente nombre de «geometría imaginaria» la denominación más audaz de *geometría no euclídea*, y sin tener sin duda ningún discípulo seriamente convencido, Lobachefski ha arrastrado a más de un admirador a proseguir después de él esta caprichosa orgía de lógica.»

Bertrand pasa en seguida a examinar la Memoria de Carton, y después de indicar los axiomas de donde parte, añade: «Admitido esto, como hay que hacerlo hasta cuando no se acepte la evidencia del postulado de Euclides, M. Carton se esfuerza por demostrar este postulado con el mismo rigor que las demás proposiciones de la geometría elemental, y nos parece que lo ha conseguido.»

Se ve desde luego por el mismo informe que su autor no era

una inteligencia vulgar; encuéntrase en él observaciones atinadísimas, y hasta podríamos decir que verdaderos presentimientos de toda la labor lógica que ha variado en estos últimos años el alcance y el concepto de los primeros principios de la ciencia. Bertrand podía llevar sin desprestigio la voz de la Academia, pero su posición no era la conveniente y sólo alcanzaba perspectivas engañosas.

Para percibir la verdad le hubiera quizás bastado un simple giro de su espíritu. Por eso prescinde de detalles que la distancia esfuma y llega a caer sin pensarlo en verdaderas contradicciones, porque no se puede admitir la completa solidez de los razonamientos de Lobachefski si es posible, y mucho menos existiendo ya, una demostración del postulado como esa demostración de Carton que considera aceptable.

Y es que también a Bertrand le sofoca el ambiente reflejado en esas claridades de su sentido íntimo que le hacen oponer a las orgías de lógica de Lobachefski los desenfrenados derroches del sentido común, que no siempre es sinónimo de buen sentido. Y así se comprende que no habían sido extremados aquellos temores de Gauss, cuando medio siglo más tarde, todavía en plena Academia, se negaba trascendencia a la teoría de Lobachefski, y esto por un matemático de nota que muy pocos años después había de ocupar el cargo de secretario perpetuo.

Pero veamos cuál es la demostración que dejó satisfecho a Bertrand. Por ser Bertrand quien es merece que le hagamos ese honor. Trata de demostrar que la suma de los ángulos de un triángulo vale dos rectos. Redúcese a lo siguiente:

Sobre la misma figura que sirvió a Legendre para hacer ver que dicha suma no podía exceder de ese límite se traza desde el vértice *A* del triángulo primitivo la correspondiente altura, y desde un punto de esa altura exterior al triángulo se traza a la mis-

mos bajo estos supuestos de calcular la suma de los ángulos del exágono *BADD'A'Y*. Si tomamos el ángulo recto como unidad de ángulos, la suma de los del triángulo primitivo será, según el teorema de Legendre, $2 - \alpha$, siendo α positivo o nulo, nunca negativo. Como hay n de estos triángulos en el interior del exágono, la suma de todos sus ángulos será igual a $2n - n\alpha$; la de los $3n - 4$ triángulos restantes será $6n - 8 - \alpha$, siendo también α nulo o positivo; los de todos los triángulos

$$8n - 8 - n\alpha - \alpha$$

Para dejar sólo los ángulos del exágono habrá que restar todos aquellos, cuyos vértices se encuentran en el interior de sus lados o de su superficie; pero esto es cosa fácil porque se agrupan en cada nudo, formando sumas de dos o de cuatro rectos. Hechas las correspondientes deducciones, resulta para la suma buscada

$$8 - n\alpha - \alpha;$$

pero en esta expresión, por pequeño que sea α , se podrá hacer crecer tanto a n , que el valor expresado se haga negativo, lo que es manifiestamente absurdo.

Ciertamente, que si la figura tuviera la forma y disposición dibujada, y que es la misma de la de la Memoria original, la conclusión sería irreproachable; pero se olvida demostrar que los triángulos trazados hayan de ser, como se supone, exteriores unos a otros. Al trazar la *KX* perpendicular a *KA*, se ha conseguido que *KX* y *BY* no se encuentren; pero ¿quién asegura que las rectas *AD* no han de volver a encontrar en ningún caso a la línea *AA'*? Sería evidente que no si esa línea fuera una recta; deja de serlo si es una línea poligonal, como habrá que suponer antes de haber demostrado lo contrario.

Ya hemos de ver que así ocurre para el caso de la geometría

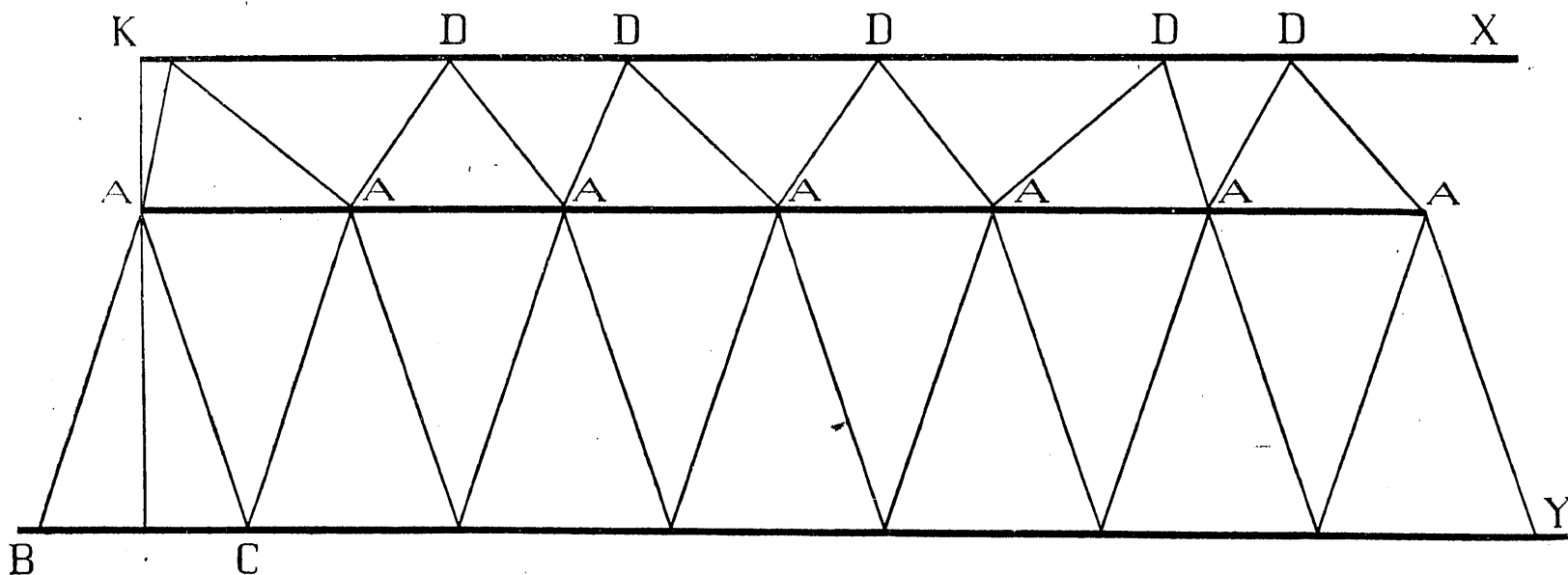


Fig. 13.

ma una perpendicular que no podrá cortar, por consiguiente, a la base común de la serie de triángulos iguales. Sobre la recta *KX* tomemos una serie de puntos cualesquiera y unámoslos por su orden a los vértices de la serie *A*. Tendremos así dos series engranadas de triángulos iguales y otras dos series de triángulos cuya forma no tiene que preocuparnos, sino solamente su número. En realidad, tampoco nos importa que los triángulos que tienen un solo vértice sobre *BY* sean iguales. Podemos prescindir, por consiguiente, de esta circunstancia y limitarnos también a contarlos.

Si, pues, la serie de los triángulos iguales al primitivo son n , nos basta con saber que todos los demás son $3n - 4$. Trate-

no euclídea; por lo pronto comprobemos como Bertrand se entrega sin defensa ante un razonamiento que tiene mucha analogía con un conocido sofisma, con el cual llega a demostrarse que un ángulo recto es igual a un ángulo obtuso. Y es que las ofuscaciones de su espíritu hacían reverdecen en Bertrand las ingenuas ilusiones de Legendre. También él pugnaba por convencerse, él que en otras materias tan certeramente puso los sofismas al descubierto.

El medio, sin embargo, era cada vez menos hostil a las nuevas ideas, aunque no pudieran disiparse en un momento los recelos y los prejuicios. En 1871 publica Fiye Sainte-Marie sus *Estudios analíticos sobre la teoría de las paralelas*. Declara en la introduc-

ción, que después de varios ensayos infructuosos había acabado por plantearse la cuestión de si se podía o no demostrar el postulado de Euclides, apoyándose únicamente sobre los demás axiomas de la geometría, y trata de resolverla empleando métodos analíticos aplicados a un sistema especial de coordenadas que, para la geometría plana, recuerda algunos de los recursos empleados por Beltrami para sus representaciones de la hipótesis de Lobachefski. Flyc Sainte-Marie no parece, sin embargo, conocer el trabajo del matemático italiano. Cita, sí, a Lobachefski y a

paso estaba dado. En 1880 publica Tilly su *Ensayo sobre los principios fundamentales de la geometría y de la mecánica*, y en 1892 su *Ensayo de geometría analítica general*, en los que se sistematizan desde nuevos puntos de vista los resultados adquiridos, y se demuestra dentro de determinadas hipótesis de continuidad que los sistemas geométricos elíptico o de Riemann, parabólico o de Euclides, e hiperbólico o de Lobachefski, son los únicos posibles. Como consecuencia de ello, Tilly afirma también la imposibilidad de demostrar el postulado, y consecuente con esta afirmación

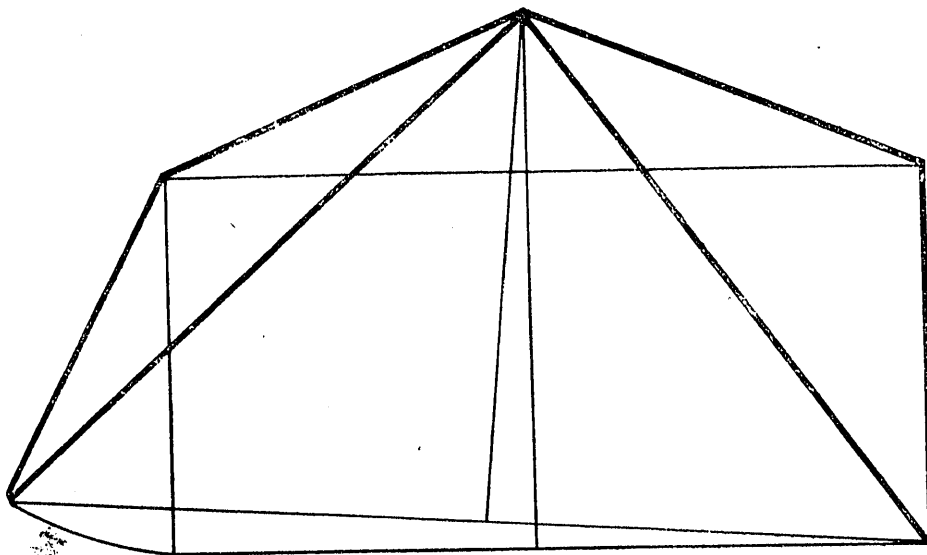


Fig. 14.

Bolyai, cuyos procedimientos eran puramente geométricos, y llega, en suma, a sus mismas consecuencias, sin que resulte, en definitiva, de su estudio ningún resultado completamente nuevo. La conclusión de su trabajo es que el postulado no puede ser una consecuencia de los otros axiomas, pero, contradicción extraña, cuando tal es su afirmación categórica, compara a cada paso la geometría *imaginaria* con la geometría *verdadera*, y por sí pudiera caber alguna duda sobre el sentido en que empleaba estas palabras, una nota puesta al fin del capítulo IV no deje sobre ello la menor duda. He la aquí:

«Aunque los recursos del razonamiento sean impotentes para establecer con todo rigor la teoría de las paralelas, la exactitud de esta teoría no es, sin embargo, objeto de ninguna duda. Así es que tenemos la certeza de que la oblicua encuentra a la perpendicular, sin que este principio resulte de la ley de necesidad.

«¿Es de la experiencia de donde deducimos una tal certeza? Si así fuera no podría ser completa; porque la imperfección de nuestros sentidos no nos permite abrazar en nuestras observaciones una extensión indefinida del espacio, ni medir con una precisión perfecta ningún elemento de una figura cualquiera que sea, de pequeñas o de grandes dimensiones.

«¿Es simplemente el sentido común el que nos hace ver claramente que la oblicua encuentra a la perpendicular? ¿Pero se puede atribuir a este sentido común el poder de hacer evidente un principio cuya negación no puede conducir a ningún absurdo comprobado?

«¿No es más natural buscar fuera de nosotros, fuera de nuestras facultades, la potencia que nos revela una tal verdad, y reconocer así una causa primera, eterna e inmutable como la verdad misma que ella nos revela?»

«Y no es verdad, podríamos preguntar nosotros, que así razonarían los que no podían demostrar de mejor modo los movimientos celestiales?

El tiempo, sin embargo, no pasa en balde y ya el primer

añade: «Hay, pues, que abandonar semejantes tentativas y reconocer a la geometría usual su verdadero carácter, que es constituir el más sencillo de los sistemas de geometría teóricamente posibles, al mismo tiempo que está de acuerdo con todos los resultados de la experiencia».

De entonces acá los grandes matemáticos franceses no han vacilado ya en la aceptación de estas verdades; conocida es la frase de Poincaré; la geometría euclídea es simplemente la más cómoda. ¿No habría en él, sin embargo, algún resabio del antiguo ambiente, al afirmar que lo continuaría siendo siempre? En todo caso la apreciación deja a salvo las esencias y nunca podría ser obstáculo serio a las aplicaciones que naturalmente presentara el porvenir.

Si en Alemania la evolución parece haber sido al fin un poco más rápida, tampoco lo fué mucho en sus principios. El folleto de Lobachefski tampoco allí logró gran acogida en los primeros momentos; la Memoria de Riemann no fué publicada hasta 1867 y casi coincidiendo en fecha con ella publicó Baltzer la segunda edición de sus *Elementos de Matemáticas*, donde por primera vez aparecieron los rudimentos de estas ideas en un libro destinado a la enseñanza. Desde 1873 Klein se esforzó por perfeccionar la teoría y su exposición, relacionándola con la determinación métrica de Cayley, y poniendo en claro determinados puntos. De él es la observación que permite distinguir en la geometría de Riemann la geometría propiamente esférica y la que conserva el postulado de que dos rectas se cortan en un punto.

Con estos trabajos el ciclo de grandes descubrimientos que la crítica del postulado reservaba, puede considerarse que se ha cerrado; pero los óptimos frutos recogidos han invitado a extender esa crítica a los demás postulados y axiomas, y han estimulado la producción de trabajos de muy distinta índole, que han dado vida a nuevas y aun más extrañas geometrías, como las geometrías no arquimedianas de Hilbert y de Veronese, las cuales salen ya fuera del objeto de estas conferencias.

La opinión ya unánime de los matemáticos verdaderamente

competentes no excluye alguna nota discordante, dada más por incomprensión del asunto que por dudas fundadas ni fundamentales. Todavía se ven de vez en cuando nuevos intentos de demostración del postulado o de alguno de los teoremas que le son equivalentes, cayendo los autores en idénticas ilusiones y en las mismas peticiones de principio que aguardaban necesariamente a los primeros exploradores del nuevo mundo geométrico. Hoy, que su acceso no ofrece ya peligros y que sus caminos son conocidos, deben desaparecer todos los recelos que antes dificultaban la navegación por el mar tenebroso y todo invita a probar la aventura, sabiendo que en la playa opuesta esperan hermosos horizontes.

Por eso es de alabar que el tema haya sido de los escogidos por la Sociedad Matemática para ser vulgarizado. En la conferencia próxima entraremos ya en el fondo del mismo y procuraremos desarrollarlo con el rigor lógico que su naturaleza exige; pero haciendo uso de los procedimientos más elementales para que hasta donde sea posible pueda resultar ésta una labor de verdadera vulgarización.

(Continuará.)

REVISIÓN DE PRECIOS DE CAMINOS VECINALES

REAL ORDEN

Ilmo. Sr.: Cuando las disposiciones dictadas para las obras públicas en general se pretenden aplicar a las de caminos vecinales (que revisten un carácter especial por sus relaciones complejas con otras entidades y por la escasa cuantía de sus presupuestos) se complican los problemas más sencillos, y para evitarlo hay que simplificar y facilitar su tramitación en lo posible; esto se hizo para el pliego general de condiciones para su ejecución, en el formulario para la redacción de proyectos, en el sistema de contratación, etc., y esto es lo que demanda también la revisión de precios, aunque es pre forzado lo estatuido en los Reales decretos básicos de esta materia.

El procedimiento general aplicado a caminos vecinales exige un lapso de tiempo mayor que en las demás obras públicas, y el espíritu que informó a los Reales decretos en que se reconoció el derecho de revisión es que el resarcimiento de gastos se haga lo más rápidamente posible para que los contratistas no se vean forzados a la paralización de sus trabajos, hecho que por su repercusión en la economía nacional se trató de evitar.

Una de las mayores dificultades con que se tropieza es la aplicación, según la interpretación que se le dé, del art. 4.º del Real decreto de la Presidencia del Consejo de Ministros, fecha 26 de agosto de 1918, pues al exigir la descomposición de los precios de contrata en todos los elementos necesarios para hacer visible la influencia de las variaciones de coste de las partes constitutivas de cada unidad, la que es mucho más global en caminos vecinales que en las demás obras públicas, se encuentran los ingenieros encargados de las obras con que una misma unidad tiene en distintas de éstas precios diferentes, y estando evidentemente constituidas por los mismos elementos en cantidad y calidad, resulta imposible racionalmente llegar a descomposiciones lógicas, puesto que en muchos casos hay insuficiencia de datos en el proyecto, redactado generalmente por otro ingeniero, y el que tiene que formular la revisión desconoce las razones que motivaron las diferencias.

En el procedimiento de contratación que la Administración sigue no cabe duda de que los precios en que se hacen las adjudicaciones están ajustados a los costes reales del momento de la contratación, puesto que la libre competencia es un depurador,

y, por lo tanto, sobre esos costes netos totales hay que basar la revisión de precios, puesto que todos sus elementos están sujetos a la subida de costes.

Mas para determinarse cuál es la cantidad abonable por revisión basta determinar un coeficiente que pueda aplicarse al precio contratado, sin necesidad de entrar en una minuciosidad trabajosa, que daría más apariencias de exactitud que realidades, y ese coeficiente puede determinarse para cada período de revisión, sin que sea preciso operar para deducirlo con las cifras de cada proyecto, bastando con que se fije tomando como base cantidades que sean proporcionales.

Ahora bien, si suponemos formulado un cuadro de precios teórico, que sería el núm. 3, en el que se lleve la descomposición al último límite, sin que figuren importes, sino solamente cuantías de elementos de trabajo, esto es, tiempo, materiales, herramientas, etc., las variaciones que para los precios de este cuadro resulten aplicando los costes en cada época de dichos elementos, en lugar de las obras que se revisan, serán evidentemente proporcionales a las variaciones que para los mismos tiempos hayan podido tener los precios efectivos del contrato.

En esta forma, sin perder nada en cuanto a la exactitud racionalmente pretendible en el asunto, se evita muchísimo trabajo, pues se suprime la formación del cuadro núm. 3 para cada obra, que es la parte más difícil de la revisión y se ahorra también gran número de operaciones numéricas.

La redacción de dicho cuadro núm. 3 debe obedecer a un criterio uniforme y contrastado por la práctica y al efecto debe encargarse su redacción a un ingeniero-jefe de Caminos, Canales y Puertos de reconocida competencia y práctica en el servicio de construcción de obras que incluya todos los tipos de unidades de precio adoptados en caminos vecinales.

Aparte del punto importante de la simplificación de procedimientos para la revisión de precios en caminos vecinales, conviene aclarar en lo que respecta a este servicio, para que no haya lugar a dudas, que abarca también a las obras de dichas vías construidas directamente por los Ayuntamientos, los cuales en realidad sustituyen al contratista en dicha función.

En vista de las consideraciones anteriores S. M. el Rey (que Dios guarde) se ha servido disponer:

1.º Las obras de caminos vecinales cuyos precios son revisables son lo mismo las adjudicadas en pública subasta que las que se construyen directamente por los Ayuntamientos.

2.º Para las revisiones de precios en las obras de caminos vecinales se seguirá el procedimiento siguiente:

a) Se formará un cuadro de precios núm. 3 en el que figuren, para todas las unidades de obra que se usan en caminos vecinales, los coeficientes numéricos que determinen la influencia de cada elemento en el precio global.

b) Formado este cuadro y aprobado por la Dirección general de Obras públicas, previo informe del Consejo de Obras públicas, para la debida aplicación de dicho cuadro se adoptará con carácter general a las obras de caminos vecinales.

c) Para revisar en un período de tiempo los precios de una obra de caminos vecinales se aplicarán al cuadro núm. 3 los costes que tuvieran sus elementos, en el lugar de la obra, en la fecha de contratación del proyecto y después en el período a que se aplique la revisión, pero disminuyendo estos últimos en la décima parte del valor que cada elemento tenía al tiempo de contratarse la obra. Seguidamente se obtendrá la diferencia entre ambos resultados, que se expresará en tanto por unidad del primero. Los precios de los elementos de cada período se fijarán contradictoriamente, como previene el art. 6.º del Real decreto de 26 de agosto de 1918.