

REVISTA DE OBRAS PÚBLICAS

PUBLICACION TECNICA DEL CUERPO DE INGENIEROS DE CAMINOS, CANALES Y PUERTOS

DIRECTOR

D. MANUEL MALUQUER Y SALVADOR

COLABORADORES

LOS INGENIEROS DE CAMINOS, CANALES Y PUERTOS

SE PUBLICA LOS JUEVES

Dirección y Administración: Plaza de Oriente, 6, primero derecha.

OPERACIONES DE ORDEN SUPERIOR AL TERCER GRADO

(CONCLUSIÓN) (1)

Esta generalización no será la única posible, y aun podría introducirse en la expresión de $P_k(n)$ una función periódica arbitraria, cuya influencia desaparecería para los valores enteros de n ; pero es la generalización más sencilla, y es éste ya título suficiente para que se la escoja con preferencia, acabando así de precisar un problema que es, por su propia naturaleza, indeterminado.

Ocupémonos ahora del cálculo de los coeficientes B , que escribiremos en lo sucesivo bajo la forma $B(k)$, para que el índice k quede de manifiesto y puedan fácilmente distinguirse unos de otros. Esto supuesto, se tendrá desde luego

$$B(1) = 1$$

Para el cálculo de los B sucesivos aplicaremos las fórmulas 6) y 8). Así tendremos

$$\begin{aligned} P_2(n+1) - xP_2(n) &= 1 \\ P_2(n+1) &= B_1(2)x^{n+1} + B_2(2) \\ P_2(n) &= B_1(2)x^n + B_2(2) \end{aligned}$$

de donde

$$B_2(2) = -\frac{1}{x-1}$$

y como además

$$B_1(2) + B_2(2) = P_2(0) = 0$$

se tendrá también

$$B_1(2) = \frac{1}{x-1}$$

Para los $B(3)$ se partirá de las igualdades

$$\begin{aligned} P_3(n+1) - x^2P_3(n) &= 1 + 3xP_2(n) = \frac{3x^{n+1}}{x-1} - \frac{2x+1}{x-1} \\ P_3(n+1) &= B_1(3)x^{2(n+1)} + B_2(3)x^{n+1} + B_3(3) \\ P_3(n) &= B_1(3)x^{2n} + B_2(3)x^n + B_3(3) \end{aligned}$$

De las dos últimas se deduce

$$P_3(n+1) - x^2P_3(n) = (1-x)B_2(3)x^n + (1-x^2)B_3(3)$$

e identificando con la primera

$$B_2(3) = -\frac{3(x+1)}{(x-1)(x^2-1)} \quad B_3(3) = \frac{2x+1}{(x-1)(x^2-1)}$$

(1) Véanse los números 2317 y 2318.

La identidad

$$B_1(3) + B_2(3) + B_3(3) = 0$$

permitirá calcular el coeficiente restante, que será

$$B_1(3) = \frac{x+2}{(x-1)(x^2-1)}$$

Empleando idénticos procedimientos se obtiene

$$\begin{aligned} B_1(4) &= \frac{x^5 + 5x^2 + 6x + 6}{(x-1)(x^2-1)(x^3-1)} \\ B_2(4) &= -\frac{6(x+2)(1+x+x^2)}{(x-1)(x^2-1)(x^3-1)} \\ B_3(4) &= \frac{(11x+7)(1+x+x^2)}{(x-1)(x^2-1)(x^3-1)} \\ B_4(4) &= -\frac{6x^5 + 5x^2 + 6x + 1}{(x-1)(x^2-1)(x^3-1)} \\ B_1(5) &= \frac{x^6 + 9x^5 + 24x^4 + 40x^3 + 46x^2 + 36x + 24}{(x-1)(x^2-1)(x^3-1)(x^4-1)} \\ B_2(5) &= -\frac{10(x^5 + 5x^2 + 6x + 6)(x^2 + x^2 + x + 1)}{(x-1)(x^2-1)(x^3-1)(x^4-1)} \\ B_3(5) &= \frac{5 \cdot 7x^4 + 26x^5 + 36x^2 + 29x + 10)(x^2 + 1)}{(x-1)(x^2-1)(x^3-1)(x^4-1)} \\ B_4(5) &= -\frac{5(10x^5 + 11x^2 + 12x + 3)(x^5 + x^2 + x + 1)}{(x-1)(x^2-1)(x^3-1)(x^4-1)} \\ B_5(5) &= \frac{24x^6 + 26x^5 + 46x^4 + 45x^3 + 24x^2 + 14x + 1}{(x-1)(x^2-1)(x^3-1)(x^4-1)} \\ B_1(6) &= \frac{\begin{aligned} & x^{10} + 14x^9 + 64x^8 + 160x^7 + 301x^6 + 416x^5 + 514x^4 \\ & + 480x^3 + 390x^2 + 240x + 120 \end{aligned}}{(x-1)(x^2-1)(x^3-1)(x^4-1)(x^5-1)} \\ B_2(6) &= -\frac{\begin{aligned} & 15(x^6 + 9x^5 + 24x^4 + 40x^3 + 46x^2 + 36x + 24)(x^4 \\ & + x^5 + x^2 + x + 1) \end{aligned}}{(x-1)(x^2-1)(x^3-1)(x^4-1)(x^5-1)} \\ B_3(6) &= \frac{\begin{aligned} & 5(x^5 + 5x^2 + 6x + 6)(17x + 13)(x^2 + 1)(x^4 + x^3 + x^2 \\ & + x + 1) \end{aligned}}{(x-1)(x^2-1)(x^3-1)(x^4-1)(x^5-1)} \\ B_4(6) &= -\frac{\begin{aligned} & 15(x+2)(x^2+1)(15x^5 + 19x^2 + 20x + 6)(x^4 + x^5 \\ & + x^2 + x + 1) \end{aligned}}{(x-1)(x^2-1)(x^3-1)(x^4-1)(x^5-1)} \\ B_5(6) &= \frac{\begin{aligned} & (274x^6 + 401x^5 + 661x^4 + 670x^3 + 424x^2 + 239x + 31) \\ & (x^4 + x^5 + x^2 + x + 1) \end{aligned}}{(x-1)(x^2-1)(x^3-1)(x^4-1)(x^5-1)} \\ B_6(6) &= -\frac{\begin{aligned} & 120x^{10} + 154x^9 + 330x^8 + 461x^7 + 511x^6 + 416x^5 \\ & + 374x^4 + 214x^3 + 89x^2 + 30x + 1 \end{aligned}}{(x-1)(x^2-1)(x^3-1)(x^4-1)(x^5-1)} \end{aligned}$$

Si se examinan atentamente estas expresiones se observa desde luego la ley sencilla a que los denominadores obedecen, y en

cuanto a los numeradores se comprueba que el de $B_k(k)$ es de grado $\frac{(k-1)(k-2)}{2}$, del signo de $(-1)^{k+1}$, y que la suma de los coeficientes de sus términos es igual a

$$\frac{(k-1)!}{(k-1)!(k-1)!} \cdot \frac{k!(k-1)!}{2^{k-1}}$$

Es fácil demostrar la generalidad de estas propiedades. Para ello partiremos de las relaciones ya conocidas 6) y 8). De la primera se deduce

$$6') \quad P_k(n+1) - x^{k-1} P_k(n) = 1 + \frac{x \Delta^2 0^k}{2!} P_2(n) + \\ + \frac{x^2 \Delta^3 0^k}{3!} P_3(n) + \dots + \frac{x^{k-2} \Delta^{k-1} 0^k}{(k-1)!} P_{k-1}(n)$$

y de la segunda

$$8') \quad P_k(n+1) - x^{k-1} P_k(n) = (1-x) B_2(k) x^{k-2} n + \\ + (1-x^2) B_3(k) x^{k-3} n + \dots + (1-x^{k-1}) B_k(k)$$

y si en el segundo miembro de la expresión 6') se substituyen los P por sus valores deducidos de la 8) y ordenamos con relación a x^n , tendremos, por identificación con la 8'),

$$(1-x) B_2(k) = \frac{\Delta^{k-1} 0^k}{(k-1)!} B_1(k-1) \\ (1-x^2) B_3(k) = \frac{\Delta^{k-1} 0^k}{(k-1)!} x B_2(k-1) + \frac{\Delta^{k-2} 0^k}{(k-2)!} B_1(k-2) \\ (1-x^3) B_4(k) = \frac{\Delta^{k-1} 0^k}{(k-1)!} x^2 B_3(k-1) + \frac{\Delta^{k-2} 0^k}{(k-2)!} x B_2(k-2) + \\ + \frac{\Delta^{k-3} 0^k}{(k-3)!} B_1(k-3) \\ \dots \\ (1-x^{k-1}) B_k(k) = \frac{\Delta^{k-1} 0^k}{(k-1)!} x^{k-2} B_{k-1}(k-1) + \\ + \frac{\Delta^{k-2} 0^k}{(k-2)!} x^{k-3} B_{k-2}(k-2) + \dots + 1$$

Si hacemos en estas expresiones

$$B_i(h) = \frac{C_i h}{(x-1)(x^2-1)(x^3-1) \dots (x^{h-1}-1)}$$

quedarán en función de los numeradores de los B y se reducirán a

$$\frac{1-x}{x^k-1} C_2(h) = \frac{\Delta^{k-1} 0^k}{(k-1)!} C_1(k-1) \\ \frac{1-x^2}{x^k-1} C_3(h) = \frac{\Delta^{k-1} 0^k}{(k-1)!} x C_2(k-1) + \\ + \frac{\Delta^{k-2} 0^k}{(k-2)!} (x^{k-1}-1) C_1(k-2) \\ \frac{1-x^3}{x^k-1} C_4(h) = \frac{\Delta^{k-1} 0^k}{(k-1)!} x^2 C_3(k-1) + \\ + \frac{\Delta^{k-2} 0^k}{(k-2)!} (x^{k-1}-1) x C_2(k-2) + \\ + \frac{\Delta^{k-3} 0^k}{(k-3)!} (x^{k-1}-1) (x^{k-2}-2) C_1(k-3) \\ \dots$$

y si hacemos $x=1$ y representamos por S los valores que toman entonces los C , que serán precisamente las sumas de los respec-

tivos coeficientes, se tendrá, después de fáciles substituciones y reducciones,

$$S_2(k) = -\frac{k}{1} \cdot \frac{k(k-1)}{2} S_1(k-1)$$

$$S_3(k) = -\frac{k}{2} \cdot \frac{k(k-1)}{2} S_2(k-1)$$

$$\dots$$

$$S_k(k) = -\frac{k}{k-1} \cdot \frac{k(k-1)}{2} S_{k-1}(k-1)$$

y si los $S(k-1)$ cumplen las condiciones enunciadas, las cumplirán igualmente

$$S_2(k), S_3(k), \dots, S_k(k)$$

y también $S_1(k)$, que deberá, en definitiva, satisfacer a la identidad

$$S_1(k) + S_2(k) + S_3(k) + \dots + S_k(k) = 0$$

Cuando $x=1$, los coeficientes B que entran en la expresión de los P se hacen infinitos, por anularse sus denominadores; pero como la suma de todos los numeradores se anula también en este caso, el valor de P queda indeterminado. Para hacer desaparecer la indeterminación habrá que suprimir los factores comunes, ya por división directa o mediante un cierto número de derivaciones sucesivas de los dos términos del quebrado, hasta llegar a un denominador que no se anule para $x=1$.

Si consideramos, por ejemplo, el coeficiente

$$P_k(n) = B_1(k) x^{k-1} n + B_2(k) x^{k-2} n + B_3(k) x^{k-3} n + \\ + \dots + B_k(k),$$

como el denominador a los $B(k)$ es

$$(x-1)(x^2-1)(x^3-1) \dots (x^{k-1}-1) = \\ = (x-1)^{k-1} (x+1)(x^2+x+1) \dots (x^{k-2}+x^{k-3}+\dots+1)$$

el número de derivaciones deberá ser $k-1$, y cuando, después de efectuadas, se iguale x a la unidad, $P_k(n)$ quedará reducido a un polinomio de grado $k-1$ en n , que representaremos por $Q_k(n)$.

Este procedimiento resultaría penoso de aplicar cuando k fuera grande, y puede entonces ser preferible deducir los polinomios Q unos de otros, sin el intermedio de los coeficientes B . Bastará para ello hacer $x=1$ en la expresión de recurrencia 6'), con lo que se tendrá

$$9) \quad \Delta Q_k(n) = Q_1(n) + \frac{\Delta^2 0^k}{2!} Q_2(n) + \frac{\Delta^3 0^k}{3!} Q_3(n) + \\ + \dots + \frac{\Delta^{k-1} 0^k}{(k-1)!} Q_{k-1}(n)$$

Ahora bien, sabemos que $Q_k(n)$ es una función de n de grado $k-1$, y su diferencia será, por consiguiente, de grado $k-2$. Esta diferencia queda conocida, en virtud de la expresión 9), cuando conocemos todos los Q hasta Q_{k-1} , y como además se tiene

$$Q_k(0) = 0$$

$Q_k(n)$ quedará, en definitiva, completamente determinado.

Se obtiene así sucesivamente

$$Q_1(n) = 1$$

$$Q_2(n) = n$$

$$Q_3(n) = \frac{3n^2 - n}{2}$$

$$Q_4(n) = \frac{6n^3 - 5n^2 + n}{2!}$$

$$Q_5(n) = \frac{45n^4 - 65n^3 + 30n^2 - 4n}{3!}$$

$$Q_6(n) = \frac{540n^5 - 1155n^4 + 890n^3 - 273n^2 + 22n}{4!}$$

$$Q_7(n) = \frac{9450n^6 - 27405n^5 + 30625n^4 - 15645n^3 + 3185n^2 - 90n}{5!}$$

Las series que acabamos de determinar permiten, como hemos visto, definir funciones que satisfagan a la condición

$$a^{(a;n)} = (a; n+1),$$

siendo n un número cualquiera. Bastará, en efecto, formar la serie general

$$10) \quad (a; n) = r + x^n \sum_{k=1}^{\infty} \frac{r^{k-1}}{k!} P_k(n) (1-r)^k$$

Pero todavía esta expresión encierra el parámetro r , que puede tomar infinitos valores, tantos como raíces la ecuación

$$a^r = r$$

De estos valores, dos solos son reales, mientras lo sea a y esta base quede comprendida entre 1 y $\sqrt[n]{e}$. Para este valor límite de a los dos valores se confunden, y desaparecen para $a > \sqrt[n]{e}$, caso en el cual todas las raíces son imaginarias. Escogiendo, cuando exista, el menor de los dos valores reales, que es hacia el cual tiende en ese caso $(a; n)$, cuando n crece indefinidamente, el problema quedará ya completamente determinado. En el caso del valor único, la serie se reduce a

$$11) \quad (\sqrt[n]{e}; n) = e + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{Q_k(n) (1-e)^k}{k! e^{k-1}} =$$

$$= e \left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{Q_k(n)}{k!} \left(\frac{1}{e} - 1 \right)^k \right]$$

Cuando a es menor que 1, x es negativa y sus potencias no enteras imaginarias, como igualmente lo serán las superpotencias de a . Si $a > \sqrt[n]{e}$, desaparece el criterio de elección que nos ha servido para determinar a r , y será preciso definir las superpotencias por otras consideraciones.

Volvamos para ello a recordar la función $\phi(x, n)$, definida por las condiciones

$$\phi(x, 1) = a^x \quad \phi(x, n+1) = a^{\phi(x, n)}$$

Supongamos que se tenga

$$a \geq \sqrt[n]{e} \quad k > a \quad y \quad a^k > e,$$

y consideremos el valor de x definido por la ecuación

$$12) \quad \phi(k, n) = (x; n+1)$$

Este valor de x tiende hacia un límite determinado no inferior a a cuando n crece indefinidamente.

En efecto, se ve desde luego sin dificultad que x está siempre comprendido entre a y k , por cuanto se tiene evidentemente.

$$\phi(k, n) > \phi(a, n) = (a; n+1)$$

$$\phi(k, n) < (k; n+1)$$

Además, cuando n aumenta, x disminuye; porque si representásemos por x_n el valor de x que satisface a la ecuación 12) se tendrá

$$\phi(k, n+1) = a^{(x_n; n+1)} = (x_{n+1}; n+2) < (x_n; n+2)$$

El límite, pues, existe. Se ve fácilmente que x tiende a alcanzarlo con una gran rapidez. De la ecuación 12) se deduce sucesivamente tomando logaritmos

$$\phi(k, n-1) \log a = (x_n; n) \log x_n$$

$$\phi(k, n-2) \log a + \log \log a = (x_n; n-1) \log x_n + \log \log x_n$$

Si n es muy grande también lo será $\phi(k, n-2) \log a$, y deberá igualmente serlo $(x_n; n-1) \log x_n$, porque el término $\log \log x_n$ nunca podrá exceder del valor fijo $\log \log k$; y como se tiene evidentemente

$$\phi(k, n-2) \log a = (x_{n-1}; n-1) \log x_{n-1}$$

se deducirá

$$(x_{n-1}; n-1) \log x_{n-1} - (x_n; n-1) \log x_n =$$

$$= \log \log x_n - \log \log a < \log \log k - \log \log a$$

Pero cuando n es grande, la función $(x; n-1) \log x$ es de un crecimiento rapidísimo, y tanto mayor cuanto más elevado sea n ; la diferencia $x_{n-1} - x_n$ será, pues, pequeñísima, y aun más las sucesivas, y el límite x será pronto sensiblemente alcanzado.

El límite x depende de k y crece con él. Para demostrarlo habrá que comparar los crecimientos de $\phi(k, n)$ y de $(x; n+1)$. Las derivadas de ambas funciones con relación, respectivamente, a k y a x , son

$$\phi'_k(k, n) = \phi(k, n) \phi(k, n-1) \phi(k, n-2) \dots \phi(k, 1) (\log a)^n$$

$$(x; n+1)'_x = (x; n+1) (x; n) (x; n-1) \dots (x; 2) (\log x)^n \left[1 + \frac{1}{x \log x} + \frac{1}{x(x; 2) (\log x)^2} + \frac{1}{x(x; 2)(x; 3) (\log x)^3} + \dots \right]$$

y si se supone a n suficientemente grande para que x difiera extraordinariamente poco de su límite, la derivada de k con relación a x será con una gran aproximación

$$\frac{dk}{dx} = \frac{(x; n+1)(x; n)(x; n-1) \dots (x; 2)}{\phi(k, n) \phi(k, n-1) \phi(k, n-2) \dots \phi(k, 1)} \left(\frac{\log x}{\log a} \right)^n \left[1 + \frac{1}{x \log x} + \frac{1}{x(x; 2) (\log x)^2} + \frac{1}{x(x; 2)(x; 3) (\log x)^3} + \dots \right]$$

En esta expresión, el último paréntesis es evidentemente mayor que la unidad y su valor depende principalmente de sus primeros términos, pues éstos acaban por decrecer rápidamente. Puede, pues, considerarse como una constante. $\frac{\log x}{\log a}$ es también mayor que la unidad, y lo mismo lo será su potencia n^a . En cambio, el primer factor del primer miembro es menor que la unidad, porque, según las notaciones ya admitidas, se tendrá

$$\phi(k, n) = (x_n; n+1) \quad \phi(k, n-1) = (x_{n-1}; n)$$

$$\phi(k, n-2) = (x_{n-2}; n-1)$$

y, por consiguiente, dicho factor se reducirá a

$$\frac{(x_n; n)(x_n; n-1)(x_n; n-2) \dots (x_n; 2)}{(x_{n-1}; n)(x_{n-2}; n-1)(x_{n-3}; n-2) \dots (x_1; 2)}$$

y ya hemos visto que x_n decrece cuando n aumenta.

En todos los casos, el producto

$$\frac{(x_n; n)(x_n; n-1)(x_n; n-2) \dots (x_n; 2)}{(x_{n-1}; n)(x_{n-2}; n-1)(x_{n-3}; n-2) \dots (x_1; 2)} \cdot \left(\frac{\log x}{\log a} \right)^n$$

es siempre positivo y deberá tender a un límite distinto de cero y de infinito, pues ni k ni x son constantes (la una con relación a la otra, como inmediatamente lo comprueban los cálculos concretos).

Supongamos conocida la función

$$k = \psi(x)$$

y definida para todos los valores de n la función $\phi(k, n)$.

Entonces, con una aproximación rayana de la exactitud para valores muy grandes de n , y con toda exactitud en el límite, se podrían definir las superpotencias de x por la ecuación

$$13) \quad (x; n) = \phi[\psi(x), n-1]$$

y definidas así para valores de n comprendidos en el intervalo $(N, N+1)$, en el que la aproximación es suficiente, quedarán definidas también para todos los valores inferiores de n por la aplicación reiterada de la condición.

$$13') \quad (x; n-1) = \frac{\log(x; n)}{\log x}$$

Todo queda, pues, reducido a definir completamente la función ϕ para un valor determinado de a . Ahora bien, para el valor

$$a = \sqrt[e]{e}$$

las series más atrás estudiadas son todavía aplicables y se tiene

$$14) \quad \phi(u, n) = e \left[1 + \sum_1^\infty \frac{Q_k(n)}{k!} \left(\frac{u}{e} - 1 \right)^k \right]$$

expresión de la que la 11) es sólo un caso particular, correspondiente a $u = 1$.

La misma serie y las consideraciones que preceden podrían también servir para extender la definición a los exponentes imaginarios, de los cuales no nos ocupamos con más detención en este trabajo.

Cuando a está comprendido entre 1 y $\sqrt[e]{e}$, la interpolación de los valores no enteros de x podría hacerse también sin necesidad de recurrir a las series, por procedimientos sobre los que se ha llamado anteriormente la atención, especialmente en algunas notas y trabajos de Lémery. Bajo estas hipótesis, sabemos ya que $(a; n)$ tiende hacia un límite fijo cuando n crece indefinidamente: representémosle por r .

Se podrá escribir

$$(a; n) = r - f(n),$$

siendo f una función que tiende hacia cero cuando n crece indefinidamente. Es fácil demostrar que esta función tiende a confundirse con una exponencial.

En efecto, para tres valores sucesivos de n se tendrá siempre la relación

$$\frac{(a; n+2) - (a; n+1)}{(a; n+1) - (a; n)} = a^w \log a$$

siendo w un número comprendido entre $(a; n)$ y $(a; n+1)$, y cuando n sea muy grande, este número se confundirá sensiblemente con r , y la relación con

$$rL = w$$

Aproximadamente, para n muy grande se podrá, pues, escribir

$$\begin{aligned} (a; n+2) - (a; n+1) &= w [(a; n+1) - (a; n)] \\ (a; n+3) - (a; n+2) &= w^2 [(a; n+1) - (a; n)] \\ \dots\dots\dots \\ (a; n+k) - (a; n+k-1) &= w^{k-1} [(a; n+1) - (a; n)] \end{aligned}$$

y sumando estas igualdades se tendrá

$$(a; n+k) = (a; n+1) + \frac{w(1-w^{k-1})}{1-w} [(a; n+1) - (a; n)]$$

o pasando al límite

$$\begin{aligned} r &= (a; n+1) + \frac{w}{1-w} [(a; n+1) - (a; n)] = \\ &= (a; n+1) + \frac{w^k}{1-w} [(a; n-k+2) - (a; n-k+1)] = \\ &= (a; n+1) + \frac{w^{n+1}}{1-w} \cdot \frac{(a; n-k+2) - (a; n-k+1)}{w^{n-k+1}} \end{aligned}$$

Poniendo n en vez de $n+1$ y escogiendo a k de modo que $n-k$ sea constante, esta relación se reduce a

$$15) \quad (a; n) = r - \frac{(a; n-k+1) - (a; n-k)}{(1-w)w^{n-k}} w^n$$

y es, por consiguiente, de la forma anunciada. Es lo que hacía también presumir la expresión 10), pues, para valores muy grandes de n la suma tenderá hacia el valor constante

$$\sum_1^\infty \frac{r^{k-1}}{k!} P_k(\infty) (1-r)^k$$

La fórmula 15) permite la interpolación entre dos valores consecutivos de n , interpolación que será tanto más aproximada cuanto mayor sea n , y una vez definida así en el intervalo $(n, n+1)$ la función $(a; n)$, se podrá definirla para los valores inferiores de n , por retrogradación logarítmica, como la expresada por la ecuación 13').

Cuando a sea menor que 1, consideraciones análogas podrían hacerse; pero entonces x se hace negativo y la interpolación deja de ser real, resultado en armonía con el que más atrás hemos encontrado. Es de observar igualmente que, en todos los casos interviene en las definiciones el número x , que es el logaritmo de r . Ahora bien, r puede tener infinitos valores, y, para cada uno de ellos, puede tener infinitos su logaritmo. Para a positivo y mayor que la unidad se puede definir, a pesar de todo, una función real que sobre las demás se destaca y que es, por esto, análoga a la función exponencial. Pero en un grado mayor de generalidad, la función $(a; x)$ podría ser considerada como una función doblemente infinitiforme, en lo que también se encuentra una analogía y una oposición con la función a^x , que se podría considerar, desde este punto de vista, como una función simplemente infinitiforme.

De una manera en un todo análoga a como se han definido las operaciones del cuarto orden podrían definirse también operaciones de orden superior. La que primero habría que considerar es la de quinto orden, que definiremos para exponentes enteros por las condiciones

$$(a; 1; 5) = a \quad (a; n+1; 5) = [a; (a; n)]$$

Limitándonos a valores de a mayores que la unidad, como hemos visto ya que se tiene

$$(a; -2) = -\infty \quad y \quad (a; -1) = 0$$

es claro que la ecuación

$$16) \quad (a; x) = x$$

tiene, en todo caso, por lo menos, una raíz real, que será el valor límite hacia el que tiende $(a; x; 5)$ para $x = -\infty$.

Al acercarse al límite, la función $(a; x; 5)$ de x tiende a degenerar en exponencial, y esta circunstancia permite desde luego la interpretación de los valores no enteros de x , por los mismos procedimientos empleados para las superpotencias ya definidas.

La ecuación 16), según el valor de a , puede tener, además de la raíz comprobada, otras dos raíces reales que pueden confundirse en una o llegar a desaparecer. El valor preciso de a para el cual las dos raíces se confunden corresponderá al máximo de la

expresión $(x | x)$, y es fácil ver que es mayor que $\sqrt[e]{e}$. Representaremos a este último por e_1 y al máximo de referencia por e_2 .

Cuando la ecuación 16) tiene una o dos raíces reales, además de la raíz negativa siempre existente, $(a; x; 5)$, que hemos visto ya que tiene siempre un límite inferior para $x = -\infty$, tendrá igualmente un límite superior para $x = \infty$, que será igual a la menor de las dos raíces positivas. Si las raíces positivas no existen no hay tampoco límite superior para la función, que crece sin límite y con un crecimiento enormemente superior al de $(a; x)$.

Definida la función directa, las funciones inversas no ofrecen ninguna dificultad de definición. Nos limitaremos solamente a

escoger como notación, para la correlativa de la raíz, el símbolo $(n |^5 a)$, del que haremos uso más adelante, y el cual deberá satisfacer a la condición

$$[(n |^5 a); n; 5] = a$$

Si del quinto pasamos al sexto orden, las condiciones de interpretación para los valores no enteros del exponente se presentan de un modo análogo a como en las operaciones de cuarto orden, pues también en este nuevo caso podrá ocurrir que la ecuación

$$(a; x; 5) = x$$

carezca de raíces reales si a es suficientemente grande. El valor límite para que así no ocurra vendrá también dado aquí por el máximo de la expresión $(x |^5 a)$, al cual designaremos por e_3 y será mayor que e_2 . Para valores superiores de a habrá, pues, que emplear para la interpretación de los exponentes no enteros un método análogo al seguido para el cuarto orden, tomando como base para la generalización la función

$$(e_3; x; 6)$$

que se podrá definir completamente.

En las operaciones de órdenes superiores se presentarán alternativamente las condiciones del quinto o del cuarto orden, según que sea impar o par el orden respectivo. En cada uno de ellos se presentará un valor crítico para la existencia de raíces reales positivas y todos ellos permitirían formar la serie indefinida

$$e_1, e_2, e_3, e_4, \dots$$

que será constantemente creciente y tendrá un límite igual o inferior a 2.

Definidas todas estas operaciones, cabría introducir la continuidad en el sistema, interpretando los valores no enteros de k en la expresión $(x; x; k)$, con lo que quedaría definida de un modo general una operación de tres generadores, entre los cuales el más influyente en el crecimiento para valores suficientemente grandes de a y de x sería el k .

Definida esta nueva operación, cabría formar la función $(a; b; x)$, que podría servir de punto de partida a nuevas iteraciones y dar así la base para la definición de una operación de cuatro generadores; y repitiendo el procedimiento, se tendría, en suma, una serie indefinida de generadores, por decirlo así, jerarquizados, que, aunque desempeñando funciones de naturaleza distinta, se encontrarán en el fondo en condiciones análogas, para los efectos de la deducción de nuevas operaciones, a los elementos de una escala exponencial.

Habríamos vuelto así, en cierto modo, a la situación inicial, y el proceso de definición y de generalización puede empezar de nuevo, sin que tenga fin ni límite esta continua posibilidad de nuevos algoritmos.

¿Hasta qué punto será útil esta investigación? En matemáticas no hay, en realidad, investigación inútil. Podría, no obstante, ocurrir que se llegara a funciones de tan extraordinario crecimiento que pudieran considerarse prácticamente infinitas, cuanto que se transpasarán determinados estrechos límites, o a tales complicaciones de cálculo que las definiciones, valederas y expresables en teoría, opusieran dificultades insuperables a ser realizadas. Queda, sin embargo, al parecer, todavía extenso campo abierto a la exploración e interesantes verdades que cosechar en los dominios más próximos.

PEDRO M. GONZÁLEZ QUIJANO.

EL PROBLEMA DE LOS ASPIRANTES

LA SOLUCIÓN ÚNICA

Nadie osará desconocer en nuestro Cuerpo la realidad del problema que le plantea la existencia de un crecido número, cada vez mayor, de ingenieros, que al terminar sus estudios ven cerradas, por un plazo de tiempo indefinido, las puertas de su ingreso en el servicio activo del Estado, con la plenitud de funciones y representación que a los cargos de plantilla corresponde.

El problema no es sólo real para los aspirantes, lo es para el Cuerpo todo, y problema grave; pues viene a determinar, dentro de nuestra colectividad, ¿cabría negarlo?, la existencia de dos clases con diferenciación, no diré oposición, de derechos e intereses, y recuerda, por tanto, aunque sea de lejos, el conflicto que en el mundo del trabajo se llama cuestión social; sin su virulencia, desde luego, pues ni las circunstancias económicas son las mismas, ni mucho menos las culturales ni las morales.

Desde luego el caso del aspirante no es similar al del super-numerario, pues éste renuncia voluntariamente a un puesto, a un derecho, y el primero se ve forzado a ello por imperio de las circunstancias, y limitado, como si dijéramos, a peregrinar por el desierto en camino a la tierra de promisión. No se trata sólo de la pérdida de la posición económica que el escalafón proporcionaría, que ello sólo sería suficiente; es que, aun cuando este aspecto de la cuestión quede descartado, como frecuentemente ocurre, por ocupar el aspirante lugares, en ocasiones brillantes, en el libre ejercicio de la profesión, todavía entonces subsiste el hecho de que no sirve a la Administración pública porque no puede ejercitar un derecho en cierta medida reconocido, y toda renuncia forzosa al ejercicio de un derecho lleva consigo algo de doloroso en el sacrificio que supone.

Consecuencia que de ello se deriva, que el estado psíquico del aspirante no es el mismo que el del ingeniero que tiene su puesto en el escalafón ni puede serlo; que, por lo tanto, aparecen las dos clases; y por ende, el grave peligro de que la unidad moral del Cuerpo se quebrante, sin que sea prudente, porque la posibilidad de la existencia de tal peligro desagrada, desconocerlo y no resolverlo.

He aquí por qué decíamos que el problema existe y con gravedad para el Cuerpo entero, pues difícilmente cabe imaginar uno mayor que una crisis interna que ponga en trance apurado su unidad moral.

Y aun profundizando más, es asunto que en general interesa al país, pues no le es indiferente que sistemáticamente se vea privado en uno de los ramos más importantes de la Administración, del concurso de la juventud con sus aptitudes y características especiales; le es perjudicial que ciertos progresos de la ciencia y de la técnica que pueden y deben seguirse mejor en la enseñanza de la Escuela, vayan a fecundizar preferentemente las obras de iniciativa privada; y puede serle extraordinariamente nocivo el que, como con frase gráfica decía nuestro ilustradísimo González Quijano en su conferencia «La Administración del Estado en relación con las obras públicas», se opere andando los años para la provisión de las vacantes del Cuerpo la selección al revés, por haber sido absorbidas con anterioridad, gran parte, si no todas, de las mejores capacidades.

Debe, por tanto, procurarse resolver esta cuestión de una manera rápida, pues que cada año se agrava, y de una manera completa y definitiva. Paliativos hay muchísimos; el doble turno para el ingreso, ya en la forma casi ilusoria que establece el Real decreto de 29 de septiembre de 1919, ya en la efectiva que regulaba el