

duda alguna, la necesidad de que la reversión pactada se haga en cada caso por Compañías completas, mediante arreglos convencionales, y, por tanto, para hacer la reversión anticipada sólo habría que tales arreglos variasen más o menos en sus estipulaciones.

Pero para que el Estado se haga cargo de la explotación de las líneas actuales y de la construcción de las que faltan es indispensable la adopción de las reglas de criterio o de principio a que habría de ajustarse su gestión, así como la organización que sería preciso implantar para asegurar la eficacia y buenos resultados de la administración especial que habría de establecerse. En una palabra, habría que adoptar una política y una organización ferroviarias; sin ideales, sin criterios y sin organismos no es ni será posible hacer nada de provecho ni en esta cuestión ni en ninguna.

La política ferroviaria y su organización habrían de consistir:

a) En la reversión o incautación de las líneas por el Estado, respetándose íntegramente todos los intereses representativos del ahorro público.

Así, pues, en tesis general las obligaciones circulantes habrían de continuar vigentes y las acciones deberán ser objeto de convenios especiales para cada Compañía, teniendo en cuenta no sólo lo dispuesto en el pliego de condiciones respectivo, sino consideraciones de equidad y gratitud que la Nación viene obligada a guardar respecto de personas y entidades, a las que debe el más notable de los incrementos de la riqueza y de la comodidad públicas, sean cuales fueren sus errores y la fortuna o suerte adversa en que se hallen.

Diversas fórmulas pudieran indicarse para esta adquisición o expropiación de acciones, pero su examen y discusión caería fuera de los límites de este artículo. Otra condición esencial de la reversión sería que habría de ser en cada caso única por cada Compañía. b) En la construcción por el propio Estado de todas las líneas que aun faltan según los planes vigentes previamente sometidos a una depuración o rectificación lo más automática posible, a cuyo efecto sería obligatoria la prestación de auxilios por parte de las regiones o localidades interesadas, siendo la cuantía de estos auxilios uno de los factores a tener en cuenta para fijar, además, el orden de prelación de las diversas obras dentro de cada categoría de líneas, en cada región del territorio. c) La explotación de las líneas revertidas al Estado se haría conservando y refundiendo lo posible, como norma general, las actuales organizaciones de las grandes Compañías, sucintamente controladas por el Gobierno y supeditadas al mismo; y en cuanto a las líneas de las Compañías pequeñas, su explotación debiera ser agregada a las grandes redes con que comuniquen o entronquen. d) La construcción y explotación de las nuevas líneas no podrá hacerse directamente por el Estado, sino por el intermedio de Juntas u organismos en que estén representadas las fuerzas vivas del país, con autonomía y recursos fijados de una vez, con facultades para nombrar y separar sus funcionarios, y sujetas simplemente a la alta inspección del Gobierno. No tendrán cabida en estas Juntas representaciones exclusivamente políticas, ni estarán compuestas de funcionarios públicos.

Pretender seguir con el sistema de concesiones, con tener que sufrir constantemente las angustias de las Compañías de un lado, las quejas del público, de otro; resignarse a no poder completar jamás el *utillaje* ferroviario ni a construir un solo kilómetro más de ferrocarril, sería un verdadero atentado contra la economía nacional. Pero, por otra parte, creer que la reversión al Estado, la construcción y explotación de toda la red pueda realizarse con los elementos puramente burocráticos de que disponemos, y con

procedimientos de Gobierno tan profundamente arraigados en la rutina patria, fuera también el más funesto de los ensayos, y la más irrealizable de las utopías. Una vez que se cambie de rumbo ha de ser para hacer bien las cosas; y esto no podrá conseguirse más que rompiendo los moldes de 1844, ya caducos, sustituyéndolos por normas de buen sentido, de equidad, de espíritu práctico y llamando a la resolución de problemas tan complejos a todos los elementos sociales conscientes de las necesidades públicas, con la necesaria, debida y competente cooperación de los técnicos y funcionarios.

De sobra sabemos que en España todo lo que sea para salir de la rutina es predicar en el desierto; pero así y todo creemos que falta a sus deberes todo aquel que teniendo una opinión, por modestísima que sea, no contribuyera al esclarecimiento de cuestiones tan vitales para el país, y a que se forme el estado de opinión necesario para que se produzcan cambios radicales en la gestión de los negocios públicos.

Y al concluir debemos cumplir el deber de justicia de manifestar lo mucho que nos ha facilitado nuestro estudio la notable obra del Sr. Cambó sobre esta materia.

JOSÉ BORES Y ROMERO,
ingeniero de Caminos.

OPERACIONES DE ORDEN SUPERIOR AL TERCER GRADO ⁽¹⁾

Es la suma la más sencilla de las operaciones aritméticas. De ella se deduce la multiplicación, considerada originariamente como una suma de sumandos iguales, cuyo número no podría ser en tal caso más que entero, y generalizada más tarde para el caso de factores fraccionarios ó incommensurables. Partiendo de la multiplicación, se definen á su vez por un procedimiento análogo las potencias, y parecería natural, prosiguiendo la analogía, definir de un modo semejante otras operaciones de orden superior.

Ninguna dificultad ofrece esta definición mientras se opere con números enteros, pero, reducida á este solo caso, su interés disminuye considerablemente, porque quedarían sin definir las operaciones inversas, y aun los mismos números que se determinarían, creciendo con inusitada rapidez, acabarían pronto por hacerse inabordables, sin que pudieran representar ningún papel en las aplicaciones.

El problema verdaderamente interesante, y que no sabemos que haya sido hasta ahora resuelto por completo, consiste en definir estas operaciones para valores cualesquiera de sus números generadores, y es ese problema el que intentamos resolver en el presente trabajo.

La definición de la operación de cuarto orden efectuada sobre un número dado a se expresa por las igualdades siguientes:

$$a^a = (a; 2) \quad a^{(a; 2)} = (a; 3) \quad \dots \quad a^{(a; n)} = (a; n+1)$$

de las que se deduce

$$(a; 1) = a \quad (a; 0) = 1 \quad (a; -1) = 0 \quad (a; -2) = -\infty$$

En la expresión $(a; n)$ llamaremos base al número a y exponente á n . El resultado será la *superpotencia* de primer orden, ó simplemente *superpotencia*. Para exponentes negativos de valor absoluto mayor que 2 el resultado de la operación sería infinito ó imaginario.

Veamos ahora cómo varía la superpotencia para los distintos

(1) Trabajo presentado al Congreso de Bilbao de la Asociación Española para el Progreso de las Ciencias.

valores del exponente, que todavía, en virtud de la definición dada, deberá ser considerado como entero. Nos limitaremos al caso en que a sea real y positivo. Si a fuera nulo, se tendría alternativamente

$$(0; 2k) = 1 \quad (0; 2k+1) = 0$$

Quando a aumenta, permaneciendo inferior á la unidad, se tiene

$$\begin{array}{ll} (a; 2) > a & (a; 2) < 1 \\ (a; 3) < (a; 2) & (a; 3) > a \\ (a; 4) > (a; 3) & (a; 4) < (a; 3) \\ \dots\dots\dots \end{array}$$

de donde resultarán dos series: una decreciente,

$$1 \quad (a; 2) \quad (a; 4) \dots$$

que empieza por 1; otra creciente,

$$a \quad (a; 3) \quad (a; 5) \dots$$

que empieza por a , y tales que los términos de la segunda serie son todos inferiores á los términos de la primera. Será forzoso que estas dos series tengan cada una un límite ó ambas un límite común. Ahora bien, en cada una de estas series, si representamos por x uno de los términos, el término siguiente será a^x ; luego los límites, si existen, han de ser raíces de la ecuación

$$a^x - x = 0$$

Esta ecuación queda satisfecha por las raíces de la ecuación

$$a^x - x = 0;$$

pero esta última ecuación, cuando $a < 1$ no tiene más que una raíz real, y si ésta fuera el límite de una de las series, lo sería también de la otra, porque, llamando y á un término de la primera serie, el correspondiente de la segunda será a^y .

Para que haya dos límites será, pues, preciso que

$$a^x - x = 0$$

tenga tres raíces. Cuando estas tres raíces se confundan en una sola, la raíz lo será también de la ecuación resultante de derivar dos veces la anterior. Se tendrá, por consiguiente, después de suprimir factores comunes,

$$a^x \ln a + 1 = 0,$$

y como la misma raíz debe satisfacer también á la ecuación

$$a^x = x,$$

se tendrá, en definitiva,

$$x = -\frac{1}{\ln a}$$

Sustituyendo este valor en la anterior se deduce

$$\ln a = -e$$

ó bien

$$a = \frac{1}{e^e}$$

Quando a varía entre 0 y este último valor habrá, pues, dos límites, y á partir de éste uno sólo que empezará siendo, para

$$a = \frac{1}{e^e} = \frac{1}{15,154269} = 0,65988, \quad \left(\frac{1}{e^e}; \infty\right) = 0,367880$$

Para $a = 1$ todas las superpotencias son iguales á la unidad, y también su límite. Un límite subsiste todavía para los valores crecientes de a , mientras tenga raíces reales la ecuación

$$a^x = x$$

es decir hasta

$$a = \sqrt[e]{e}$$

para el cual valor el límite es e .

Si $a > \sqrt[e]{e}$, las superpotencias crecen indefinidamente y acabarán por crecer más deprisa que una potencia ordinaria cualquiera.

Estos resultados pueden hacerse intuitivos mediante la representación geométrica. Tracemos dos ejes rectangulares y dibujemos la exponencial definida por la ecuación

$$y = a^x$$

y la bisectriz de los ejes que corresponderá á

$$y = x.$$

Mientras a sea menor que la unidad, la exponencial será decreciente y cortará siempre á la bisectriz en el punto correspondiente á la abscisa definida por la ecuación

$$a^x = x;$$

pero podrán ocurrir dos casos, según que el valor del coeficiente angular de la tangente en el punto de intersección sea en valor absoluto mayor ó menor que la unidad. En ambos casos, las sucesivas superpotencias vendrán representadas por las abscisas y ordenadas de los vértices de un trazado poligonal de ángulos rec-

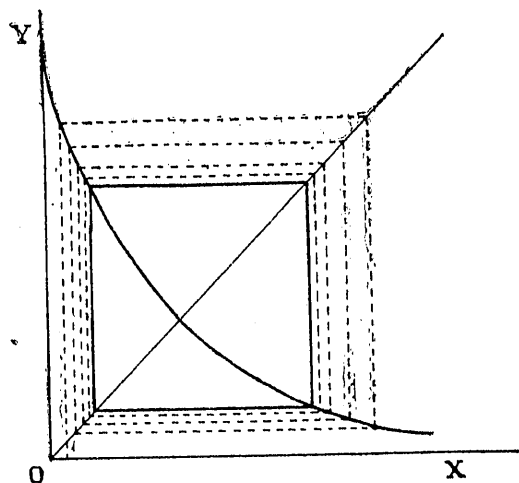


Fig.^a 1^a

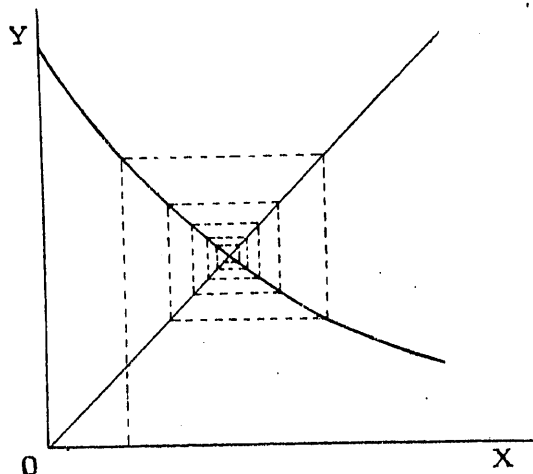
tos, cuyos lados tienden hacia posiciones fijas; pero mientras en el primero (fig. 1.^a) estas posiciones determinan un cuadrado, en el segundo (fig. 2.^a) el cuadrado se reduce á un punto.

Quando a es mayor que la unidad, y mientras su valor no alcanza el límite $\sqrt[e]{e}$, la exponencial corta á la bisectriz en dos puntos. Las superpotencias sucesivas vendrán representadas por las abscisas de los vértices de un trazado en escalera, que quedará forzosamente detenido ante el primer punto de intersección (figura 3.^a). Lo mismo ocurrirá en el caso límite en que los dos puntos coincidan y la curva sea tangente á la bisectriz; pero si

$$a > \sqrt[e]{e},$$

la exponencial no cortaría ya á dicha recta, y el trazado en escalera se prolongará sin límite (fig. 4.^a).

La definición dada hasta ahora para exponentes enteros de las superpotencias permite definir una operación inversa, aná-

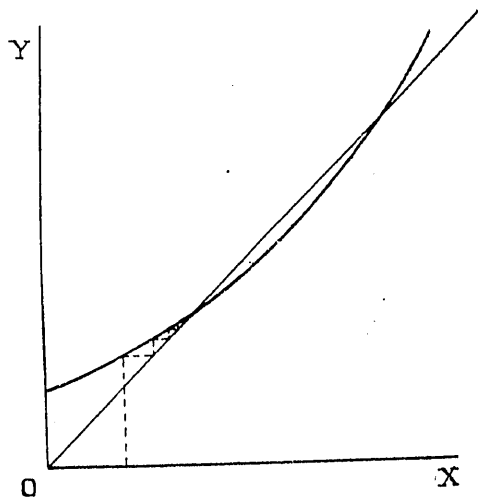
Fig^a 2^a

loga á las raíces. Es aquella operación en la que, dada la superpotencia y el exponente, se desea conocer la base: la anotaremos $(n | a)$ y se tendrá por definición

$$[(n | a); n] = a$$

Seguiremos llamando base al número a é índice al número n , y al resultado de esta operación le llamaremos por analogía *sub-raíz*.

Si a es positivo y mayor que la unidad y $n > 0$, es evidente que la expresión tiene un solo valor real y positivo, pues ya he-

Fig^a 3^a

mos visto que en estas condiciones $(x; n)$ es creciente con x y siempre igual á 1, para $x = 1$.

Si a es positivo, pero menor que la unidad, el problema podrá tener varias soluciones (reales) ó no tener ninguna. Supongamos, por ejemplo, el caso en que $n = 2$. El problema se reduce á hallar las raíces reales de la ecuación

$$x^x = a;$$

pero la derivada de x^x es

$$x^x (1 + \ln x)$$

y de $x = 0$ á $x = 1$, el segundo factor pasa de negativo á positivo y se anula para $x = \frac{1}{e}$.

La función primitiva, que es menor que 1 en todo el intervalo, empieza, pues, decreciendo, acaba aumentando y pasa por un mínimo igual á $\frac{1}{e \sqrt{e}}$. Si el valor de a es superior á este número, habrá dos raíces; si igual á él, una sola, y si inferior á él, ninguna.

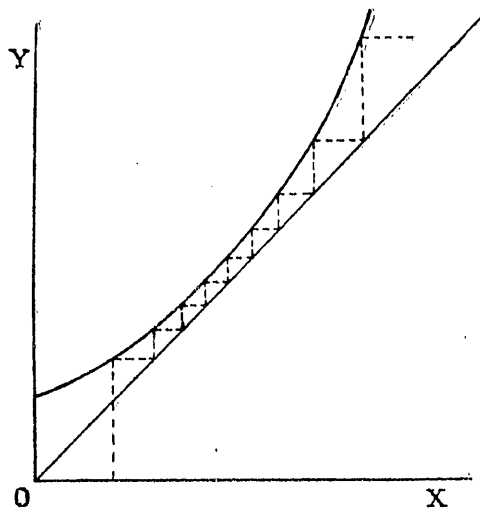
Si el índice es 3, la derivada será

$$\frac{(x; 3) (x; 2)}{x} [1 + 3 \ln x + x (\ln x)^2],$$

que es constantemente positiva en el intervalo $(0, 1)$.

En efecto, la derivada del paréntesis es

$$1 + 3 \ln x + (\ln x)^2,$$

Fig^a 4^a

que igualada á 0 daría dos sistemas de valores para x y $\ln x$, á saber:

$$\begin{array}{ll} \ln x = -2,618034 & x = 0,072946 \\ \ln x = -0,381962 & x = 0,682521 \end{array}$$

Estos valores corresponderán á un máximo y á un mínimo del primer paréntesis, que son, respectivamente,

$$1,309002 \quad \text{y} \quad 0,838879,$$

ambos, como se ve, positivos.

La función es, pues, siempre creciente, y como para $x = 0$ es igual á 0, se ve que la ecuación

$$x^x = a,$$

para a positivo y menor que 1, tiene siempre una raíz real y positiva y una sola.

Lo mismo se hubiera podido probar más directamente. Se tiene en efecto

$$1 + \ln x + x (\ln x)^2 = 1 + (1 + \ln x) \ln x,$$

y como x es, por hipótesis, menor que 1, $\ln x$ será negativo: si su valor absoluto es mayor que la unidad, $\ln x$ y $1 + \ln x$ serán ambos negativos y su producto positivo; pero cuando $|\ln x| < 1$, el producto será negativo, y como sus factores serán menores que la unidad, él lo será también: la derivada será, pues, positiva en los dos casos.

En general, cuando la superpotencia es de exponente impar, la función $(x; n)$ es creciente en el intervalo $(0, 1)$, coincidiendo con estos mismos valores en los extremos del intervalo; pero cuando n es par, se tiene

$$(0; n) = (1; n) = 1,$$

y la función pasa por un mínimo, que se determina igualando a cero la derivada. En particular, para la superpotencia cuarta, prescindiendo del factor positivo $\frac{(x; 4)(x; 3)}{x}$, la expresión que habría que igualar a cero sería

$$1 + (x; 2) \log x \cdot [1 + x \log x + x (\log x)^2] = 0,$$

para lo cual se obtiene

$$\log x = -1,292114 \quad x = 0,274689 \quad (x; 4) = 0,593237$$

Se vería fácilmente que esta raíz es única.

Veamos ahora cómo varía la subraíz con el índice. Cuando la base sea mayor que la unidad, la subraíz será menor que la base, y tanto menor cuanto mayor sea el índice. Si la base es igual ó mayor que e , la subraíz tiene por límite, cuando el índice n crece indefinidamente, a $\sqrt[n]{e}$; si la base a es menor que e , el límite será $\sqrt[n]{a}$.

Cuando la base es menor que la unidad, hemos visto que las subraíces reales de índice impar existen siempre; no así las de índice par, que á veces faltan y, cuando no, dan valores dobles. Para valores elevados del índice la subraíz, sin embargo, existe siempre y el límite común es también en los dos casos $\sqrt[n]{a}$.

Otra operación inversa de las superpotencias, análoga á la extracción de logaritmos, cabría estudiar, dando por conocidas la superpotencia y la base y proponiendo determinar el exponente; pero, con las definiciones adoptadas hasta aquí, esta operación no tendría sentido ni sería practicable más que cuando este exponente pudiera ser entero, lo que sólo ocurriría en el menor número de casos. Para los demás, sólo se podrían dar dos números enteros, uno por defecto y otro por exceso, que vinieran á corresponder al problema, á la manera de los cocientes enteros en las divisiones inexactas. Para otra cosa, sería preciso definir previamente la superpotencia para exponentes fraccionarios é inconmensurables, y éste es el punto del que vamos á pasar á ocuparnos.

Cuando se trata de resolver el mismo problema para las potencias ordinarias, se empieza por interpretar los exponentes fraccionarios y, por un paso al límite, se extienden los resultados para un exponente real cualquiera, estableciendo la continuidad de la función exponencial, que sirve después de punto de partida para definirla en el dominio de los exponentes imaginarios.

Los procedimientos son análogos á los empleados para la definición general de la multiplicación, y el objetivo es fácilmente alcanzado en uno y otro caso, porque tanto la suma como la multiplicación son operaciones conmutativas y asociativas, en las que todos los números que intervienen desempeñan igual papel. Si además son iguales, no habrá ya medio alguno de distinguirlos individualmente, y cabrá hablar con plena propiedad, y no en sentido puramente descriptivo, del número de los sumandos ó de los factores: la interpretación de los multiplicadores ó de los exponentes fraccionarios no ofrecerá ya dificultad ninguna y dependerá tan sólo de la posibilidad de la división ó de las raíces.

Cuando se trata de las superpotencias, el caso no es ya el mismo, porque los elementos de la escala exponencial son todos diferentes por su función, aunque sean iguales por su valor numé-

rico, y no hay ninguna razón que justifique el investigar el valor de los exponentes fraccionarios, como intermedio para una generalización más amplia, sino que debe ser atacada desde luego y resuelta, si es posible, la cuestión de la continuidad del exponente.

Lo primero que ocurre, para resolverla, y es, en efecto, una primera condición, es buscar una función continua del exponente, $f(x)$, que para los valores enteros de éste coincida con los valores ya definidos de las superpotencias correspondientes; pero esta sola consideración no determina el problema, porque una vez conocida una de esas funciones, será posible encontrar infinitas que cumplan igual condición, y esto, aun respetando, no sólo la continuidad de la función, sino también la de todas sus derivadas.

Una segunda condición que deberá imponerse á esa función continua es la de satisfacer á la ecuación

$$f(x+1) = a^{f(x)},$$

satisfecha por definición por todas las superpotencias de exponente entero.

Esta segunda condición podría realizarse si lográramos resolver un problema más general. Consideremos, en efecto, la función $\phi(x, n)$ continua con relación á x y definida para los valores enteros de n por las igualdades

$$\phi(x, 1) = a^x \quad \phi(x, n+1) = a^{\phi(x, n)}$$

Se tendría inmediatamente

$$\phi(1, n) = (a; n)$$

y la interpretación de los exponentes no enteros de la superpotencia quedaría reducida á la de los mismos valores de la variable n en la función ϕ .

Ahora bien, sea r una raíz de la ecuación

$$a^r = r$$

Es claro que esta raíz satisfará también á la ecuación

$$1) \quad \phi(r, n) = r$$

cualquiera que sea el valor de n , y entonces podremos escribir, aplicando la fórmula de Taylor,

$$2) \quad \phi(x, n) = r + \sum_{k=1}^{k=\infty} A_k(n) (x-r)^k$$

Para $n=1$, los coeficientes A_k son conocidos. Se tiene, en efecto,

$$A_k(1) = \frac{r^k}{k!} = A_k,$$

representando, para abreviar, por l el logaritmo neperiano de a .

La forma de la serie de la igualdad 2) y la propiedad expresada por la 1) permiten calcular los sucesivos coeficientes $A_k(n)$, mediante fórmulas de recurrencia que vamos á determinar. La aplicación reiterada de la definición de la función ϕ conduce á las igualdades

$$\phi[\phi(x, 1), 1] = \phi(x, 2) \quad \phi[\phi(x, 2), 1] = \phi(x, 3) \quad \dots \dots \dots \phi[\phi(x, n-1), 1] = \phi(x, n)$$

de donde se deduce inmediatamente

$$\phi(x, n+1) = \phi[\phi(x, n), 1] = \phi[\phi(x, 1), n]$$

y si se desarrollan los miembros extremos de estas igualdades se tendrá

$$r_1 + A_1(n+1)(x-r) + A_2(n+1)(x-r)^2 + A_3(n+1)(x-r)^3 + \dots =$$

$$= r_1 + A_1(n)[A_1(x-r) + A_2(x-r)^2 + A_3(x-r)^3 + \dots] +$$

$$+ A_2(n)[A_1(x-r) + A_2(x-r)^2 + A_3(x-r)^3 + \dots]^2 +$$

$$+ A_3(n)[A_1(x-r) + A_2(x-r)^2 + A_3(x-r)^3 + \dots]^3 +$$

$$+ \dots$$

é igualando los coeficientes que afectan en los dos términos á las mismas potencias de $x - r$, se llega á la expresión general

$$3) \quad A_k(n+1) = \sum_{h=0}^{k-h} \frac{(k-h)!}{i!j!l! \dots} A_1^i A_2^j A_3^l \dots \times A_{k-h}(n)$$

en la que los números $i, j, l, \dots$ deben cumplir con las condiciones

$$i + j + l + \dots = k - h$$

$$i + 2j + 3l + \dots = h$$

La expresión 3) nos da el valor de $A_k(n+1)$ en función lineal de los $A(n)$ de índice no superior á k ; pero todavía aparece en forma que convendrá simplificar. La significación ya conocida de los coeficientes $A_1, A_2, A_3, \dots$ permite escribir

$$3') \quad A_k(n+1) =$$

$$= \sum_{h=0}^{k-h} \frac{r^{k-h} l^h}{k!} A_{k-h}(n) \sum \frac{(k-h)! k!}{i!j!l! \dots 1!^i 2!^j 3!^l \dots}$$

y si hace para abreviar

$$A_k(n) = \frac{r^n l^{n+k-1}}{k!} P_k(n)$$

se tendrá para el cálculo de los P

$$4) \quad P_k(n+1) =$$

$$= \sum (rl)^{k-h-1} P_{k-h}(n) \sum \frac{k!}{i!j!l! \dots 1!^i 2!^j 3!^l \dots}$$

Vamos á demostrar que

$$5) \quad \sum \frac{k!}{i!j!l! \dots 1!^i 2!^j 3!^l \dots} = \frac{\Delta^{k-h} 0^k}{(k-h)!}$$

siempre bajo las condiciones expresadas por las igualdades 3'). La proposición es cierta para $k-h=1$; porque los miembros se reducen entonces evidentemente á la unidad. Para demostrarla, en general, consideremos el desarrollo de

$$(w_1 + w_2 + w_3 + \dots + w_n)^k$$

En este desarrollo habrá términos que sólo contengan como factor uno de los w , términos con dos factores diferentes, términos con tres factores, etc. Con los términos que contienen s factores diferentes formemos un grupo, y representemos por $e_1, e_2, e_3, \dots, e_s$ los exponentes de los factores de uno de esos términos; el coeficiente del término será

$$\frac{k!}{e_1! e_2! e_3! \dots e_s!}$$

Si los exponentes son todos distintos, por ellos podrán distinguirse los factores, y el número de términos que podrán formarse, y á los que se aplicaría igual coeficiente, será

$$n(n-1)(n-2) \dots (n-s+1).$$

Cuando haya exponentes iguales, el coeficiente del término tendrá la misma expresión; pero el número de términos de igual coeficiente será

$$\frac{n(n-1)(n-2) \dots (n-s+1)}{q_1! q_2! \dots q_s!}$$

siendo $q_1, q_2, \dots, q_s$ los números de exponentes iguales que deberán cumplir con la condición

$$q_1 + q_2 + q_3 + \dots + q_s = s$$

Igualmente deberá tenerse

$$q_1 e_1 + q_2 e_2 + q_3 e_3 + \dots + q_s e_s = h$$

pudiendo algunos q ó algunos e anularse, con tal de que queden satisfechas tanto esta condición como la anterior. En esta hipótesis, el coeficiente común podrá escribirse, en todos los casos

$$\frac{k!}{e_1!^{q_1} e_2!^{q_2} \dots e_s!^{q_s}}$$

y el número de términos de igual coeficiente será

$$\frac{n(n-1)(n-2) \dots (n-s+1)}{q_1! q_2! \dots q_s!}$$

Si, pues, manteniendo la separación de los grupos, se hace

$$w_1 = w_2 = w_3 = \dots = w_n = 1,$$

la suma de cada grupo quedará reducida á la de los coeficientes de sus términos, y se tendrá

$$n^k = n + n(n-1) \sum_{k-h=2} \frac{k!}{i!j!l! \dots 1!^i 2!^j 3!^l \dots} +$$

$$+ n(n-1)(n-2) \sum_{k-h=3} \frac{k!}{i!j!l! \dots 1!^i 2!^j 3!^l \dots} +$$

$$+ \dots +$$

$$+ n! \sum_{k-h=n} \frac{k!}{i!j!l! \dots 1!^i 2!^j 3!^l \dots}$$

Pero como, además, se tiene, según la fórmula de Newton,

$$n^k = n + \frac{n(n-1)}{2!} \Delta^2 0^k + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} \Delta^3 0^k + \dots + \Delta^n 0^k$$

se deducirá que, si la identidad 5) tiene lugar para todos los valores de $k-h$ desde 1 hasta $n-1$, tendrá también lugar para

$$k-h=n,$$

y como se la ha comprobado por cierta para $n=1$, cierta será para todo valor.

Esto supuesto, si se hace, para abreviar,

$$rl = w,$$

la expresión 4) podrá escribirse

$$6) \quad P_k(n+1) = P_1(n) + \frac{w \Delta^2 0^k}{2!} P_2(n) + \frac{w^2 \Delta^3 0^k}{3!} P_3(n) +$$

$$+ \dots + w^{k-1} P_k(n)$$

Esta expresión, en la que los polinomios $P_k(n+1)$ se obtienen en función de los de índice igual ó inferior, pero correspondientes todos al mismo exponente n , puede servir para determinar otra, en la que aquellos polinomios se obtienen en función de los del mismo índice, pero de exponente inferior. Se tiene, en efecto,

$$P_1(n) = P_1(n-1) = P_1(n-2) = \dots = 1$$

y en virtud de la identidad 6),

$$P_2(n+1) = P_1(n) + w P_2(n)$$

$$P_2(n) = P_1(n-1) + w P_2(n+1)$$

y si restamos estas dos igualdades se tendrá

$$P_2(n+1) - (1+w) P_2(n) + w P_2(n-1) = 0$$

De la misma manera, podríamos escribir

$$\begin{aligned} P_3(n+1) &= P_1(n) + 3xP_2(n) + x^3P_3(n) \\ P_3(n) &= P_1(n-1) + 3xP_2(n-1) + x^3P_3(n-1) \\ P_3(n-1) &= P_1(n-2) + 3xP_2(n-2) + x^3P_3(n-2) \end{aligned}$$

y si después de multiplicar la segunda de estas igualdades por $-(1+x)$ y la última por x , las sumamos, los términos en P_1 y P_2 desaparecerán, en virtud de las relaciones anteriores, y se tendrá en definitiva

$$P_3(n+1) - (1+x+x^2)P_3(n) + x(1+x+x^2)P_3(n-1) - x^3P_3(n-2) = 0$$

Por el mismo procedimiento obtendríamos sucesivamente nuevas relaciones de la misma forma, que quedará completamente determinada al ser conocidos los polinomios en x que multiplican á los polinomios P . Ahora bien, en las relaciones ya determinadas se comprueba inmediatamente que estos polinomios son los mismos que multiplican á las distintas potencias de X en los productos

$$\begin{aligned} X-1 \\ (X-1)(X-x) \\ (X-1)(X-x)(X-x^2), \end{aligned}$$

de donde parece deducirse que los de la expresión de P_k han de ser los mismos que los del producto

$$7) \quad (X-1)(X-x)(X-x^2) \dots (X-x^{k-1})$$

Y en efecto, es fácil demostrar que, siendo esto cierto hasta un cierto valor de k , lo será también para el valor $k+1$.

Formaremos al efecto las identidades

$$\begin{aligned} P_{k+1}(n+1) &= P_1(n) + \frac{x\Delta^2 0^{k+1}}{2} P_2(n) + \\ &+ \frac{x^3\Delta^3 0^{k+1}}{3!} P_3(n) + \dots + x^k P_{k+1}(n) \\ P_{k+1}(n) &= P_1(n-1) + \frac{x\Delta^2 0^{k+1}}{2} P_2(n-1) + \\ &+ \frac{x^3\Delta^3 0^{k+1}}{3!} P_3(n-1) + \dots + x^k P_{k+1}(n-1) \\ P_{k+1}(n-1) &= P_1(n-2) + \frac{x\Delta^2 0^{k+1}}{2} P_2(n-2) + \\ &+ \frac{x^3\Delta^3 0^{k+1}}{3!} P_3(n-2) + \dots + x^k P_{k+1}(n-2) \\ &\dots \dots \dots \\ P_{k+1}(n-k+1) &= P_1(n-k) + \frac{x\Delta^2 0^{k+1}}{2} P_2(n-k) + \\ &+ \frac{x^3\Delta^3 0^{k+1}}{3!} P_3(n-k) + \dots + x^k P_{k+1}(n-k) \end{aligned}$$

se las multiplicará, respectivamente, por los coeficientes del desarrollo, según las potencias decrecientes de X del producto 7), y sumándolas en seguida, desaparecerán todos los P , menos los P_{k+1} .

Llevando, por último, todos los términos al primer miembro, resultará, después de reducir, que los coeficientes de los P_{k+1} son precisamente los del desarrollo de

$$(X-1)(X-x)(X-x^2)(X-x^3) \dots (X-x^k)$$

La propiedad demostrada prueba que para los valores enteros de n se podrá escribir

$$8) \quad P_k(n) = B_1 x^{(k-1)n} + B_2 x^{(k-2)n} + B_3 x^{(k-3)n} + \dots + B_k$$

siendo ya los B funciones de x independientes de n , lo que permite ya generalizar la fórmula para valores de n cualesquiera.

PEDRO M. GONZÁLEZ QUIJANO.

(Se continuará.)

Tramitación de los expedientes de concesiones de aguas.

La revista *Madrid Científico* recoge en uno de sus últimos números un artículo publicado en otra revista técnica por D. José García Benítez titulado «¿Ateneístas o congresistas?», en la cual, se combate la tendencia que pudiera tener el actual Congreso de Ingeniería, de tratar en él cuestiones exclusivamente técnicas más propias de una Academia de Ciencias o de un Ateneo, opinando deben tratarse cuestiones más prácticas. Estoy completamente de acuerdo con todo el contenido del artículo del Sr. García Benítez, y no hubiera tenido ningún inconveniente en suscribirlo, y aunque la objeción que hace *Madrid Científico* de que si se lleva al límite esta segunda tendencia, es discutible si le cuadra mejor al Congreso el carácter de Tribunal de Cuentas o Academia legislativa, está muy en su lugar, puesto que todas las exageraciones son peligrosas, no cabe duda que extremo por extremo estos caracteres serían más adecuados. Los ejemplos de los que pudieran ser temas del presente Congreso los considero muy oportunos y muy bien concebidos, y lamento que la deficiencia de mis conocimientos y aptitudes no me permitieran recoger siquiera uno de ellos por completo, pero ya que esto me es imposible, al menos he de hablar algo sobre alguno en el cual puedo aportar más datos que en ningún otro, por tener alguna experiencia y haber estado más tiempo en contacto con el asunto; este es el relativo a la legislación sobre concesiones hidráulicas y voy a exponer a continuación algunas anomalías que tengo observadas y hasta me atrevería en algún punto a proponer algunas soluciones racionales.

* *

Mucho se ha hablado de algún tiempo a esta parte de la eficacia de la legislación actual en materia de aguas al aplicarse a los grandes aprovechamientos hidroeléctricos, en cuya magnitud e importancia no pudo pensarse en los tiempos en que ésta se hizo; sobre tal cuestión se han publicado artículos en muchas revistas, se han redactado proyectos de leyes y de una manera u otra han dejado oír su pública opinión ingenieros competentes en la materia y algunos políticos de altura, y casi todos coinciden en tributar un aplauso a la ley de 1879, al amparo de la cual, no obstante su fecha, se han construido todos los actuales saltos de agua hoy en explotación y se han otorgado concesiones que sirven de base para la construcción futura de otros muchos, pero que es necesario modificarla en algunos puntos o más bien los preceptos oficiales que sustituyen a su reglamento, en el sentido de adaptarlos a las necesidades y tendencias actuales. Una de las necesidades que más se han señalado es la relativa a la declaración de utilidad pública de estos aprovechamientos, que a pesar de vislumbrarse en algún artículo de la ley y poderse atener a la definición que para esta declaración se hace en la ley de Expropiación forzosa, hacía falta una disposición oficial que claramente y sin ningún género de dudas las comprendiera dentro de este concepto.

Así las cosas, vino la ley de 2 de marzo de 1917 llamada «de protección a las industrias nacionales», y en ella, por iniciativa de un ingeniero, diputado a Cortes, se incluyó la declaración de utilidad pública de todos los saltos de agua mayores de 1.000 caballos, con derecho a la expropiación forzosa de los terrenos ocupados por el embalse de la presa y casa de máquinas, así como de otros aprovechamientos cuya potencia sea menor de la quinta