Evolución de la Matemática en la Edad Contemporánea

POR

DON J. REY PASTOR

(CONCLUSIÓN) (1)

No podemos—pues nos separa de nuestro objeto - detenernos en seguir paso á paso los progresos de las diversas teorías en manos de los matemáticos que vamos citando, los cuales llevan hasta sus últimas consecuencias la transformación iniciada en el primer tercio del siglo.

Pasemos ya, retrocediendo un poco, después de estas digresiones de índole local, á diseñar los caracteres de la última crisis total de la Matemática.

ARITMETIZACIÓN DEL ANÁLISIS.—Antes hemos insistido sobre la importancia que debe atribuirse á la introducción del rigor, iniciada por Abel y Cauchy; pero, aun después de esto, la Matemática continuaba siendo muy imperfecta. Todo el Análisis se funda sobre el concepto de número real, y esta noción, en aquella época, no difería apenas de la de Euclides, la cual necesita de la intuición espacial; el Análisis seguía, pues, sujeto á esta intuición, y el escollo de la continuidad subsistía en pie.

Llegar á construir el número irracional sin necesidad de las cantidades inconmensurables, es una de las conquistas más hermosas del último tercio del siglo, lograda simultáneamente por Dedekind, Cantor y Méray; pero es la noción de Dedekind, fundada en las cortaduras, la que ha prevalecido, y apenas se concibe hoy un tratado de funciones que no comience por ella. Después de Weierstrass, Cantor y Dini, la aritmetización del Análisis, es decir, su construcción lógica sobre el concepto de número, sin la noción de cantidad, es un hecho, y esta conquista ha pasado, desde hace tiempo, á la enseñanza. Weierstrass lleva esta aritmetización hasta las funciones de variable compleja, pero ha prevalecido hasta ahora la teoría de Riemann.

El infinito ha sido siempre pesadilla de los matemáticos, manzana de la discordia entre ellos y estimulante de nuevos progresos.

La aritmetización del Análisis aclaró algo este misterio del infinito matemático, reduciendo la noción de *infinito potencial* al siguiente hecho: después de todo número entero hay otro.

TEORÍA DE CONJUNTOS.—He aquí, pues, un progreso importante; pero la gloria de haber solucionado la pavorosa cuestión del *infinito actual* en términos satisfactorios para las necesidades de la Matemática de hoy es Cantor, y lo ha logrado creando una teoría revolucionaria que demolía multitud de prejuicios, siendo, naturalmente, acogida con franca hostilidad por filósofos y matemáticos; pero de tan elevado potencial y de tal necesidad, que en pocos años ha conquistado un puesto preferente en la Ciencia.

Todo libro moderno de Análisis comienza por exponer la teoría de *conjuntos* de Cantor. Dentro de algunos años, también, probablemente, los de Geometría.

Esta teoría de los conjuntos ha obtenido brillantes aplicaciones en el estudio de las funciones discontinuas, al cual ha aportado Baire tan bella contribución; en el de la integral de Lebesgue, etc. (2). Pero si nos limitamos al Cálculo infinitesimal clásico, todo él puede hoy construirse aritméticamente sin usar la palabra *infinito*. Abrase por cualquier página un libro moderno, y todas las demostraciones se reducen á este tipo: «Dado un número arbitrario ε, *por pequeño que sea*, existe un número δ, que cumple tal ó cual condición, dependiente de ε». Y aun puede suprimirse este aditamento, *por pequeño que sea*, pues incluído queda en la indeterminación de la palabra *arbitrario*. A la pequeñez indefinida sustituye, pues, la arbitrariedad.

Aquellos *infinitamente pequeños*, que por su insignificancia eran víctima propiciatoria en manos de los malos matemáticos, y cuya elasticidad sin límites permitía demostrarlo todo (1) (por algo se ha llamado *arma poderosa* al Cálculo infinitesimal), han sido ya desterrados. Hoy se habla sólo de *números finitos*; y si por brevedad se usan las locuciones *infinitamente pequeño* ó *grande*, siempre es posible su traducción en números finitos. Con ellos solos, y sin el cómodo recurso de la intuición, sólo se pueden demostrar las propiedades ciertas, es decir, no contradictorias con los axiomas fundamentales.

DEPURACIÓN DEL ANÁLISIS.—Este rigor absoluto del Análisis elimina definitivamente aquel resto de subjetivismo que aun existía en las demostraciones, y pronto se revela la superioridad del nuevo sistema en la derogación de muchos resultados falsos que se habían incorporado indebidamente á la Matemática. Es Riemann quien, por primera vez, revela la existencia de funciones continuas que no admiten derivada para infinitos valores de la variable, es decir, curvas continuas sin tangente en *infinitos* de sus puntos. Es Weierstrass, más tarde, quien da su ejemplo famoso de una curva sin tangente en *ningún* punto, y demuestra la inexactitud de multitud de teoremas de Cauchy (2). Demuestra Schwarz, al mismo tiempo, la inexactitud de la propiedad conmutativa de la derivación, por todos admitida. Prueba el mismo Schwarz que la definición corriente de área de una superficie como límite de un poliedro, es falsa. Da Pringsheim más tarde las condiciones necesarias y suficientes para la validez del desarrollo en serie de Taylor, mucho tiempo considerada como general, etc.

TEORÍA DE FUNCIONES.—Tal grado de perfección del Análisis actual no se habría conseguido si no hubieran alcanzado antes sus nociones fundamentales de *función*, *derivada*, *integral*....., todo el grado de amplitud que supieron darles Dirichlet y Riemann, el cual ha sido todavía sobrepujado por Lebesgue en nuestros días con la trascendental noción de integral que lleva su nombre. Rotas las trabas con que los algoritmos aritméticos restringían la generalidad de estos conceptos, el campo del Análisis se ensancha indefinidamente en derredor de esta definición amplísima: «una *función* es una correspondencia *cualquiera* entre dos ó varios conjuntos de números reales». Y es, precisamente, en esta idea nueva de Dirichlet, en esta introducción de la *arbitrariedad*, donde estriba todo el alcance de la actual teoría de funciones de variable real.

Riemann funda la teoría de las funciones de variable compleja sobre base igualmente amplia. Para él no es la función una combinación algorítmica más ó menos complicada—punto de vista de Cauchy—, sino «una correspondencia conforme *cualquiera* entre dos recintos planos»; y es, precisamente, en este famoso problema de hallar la correspondencia conforme que transforma uno en otro (por primera vez resuelto por Schwarz), donde nace la grandiosa teoría, siempre fecunda, de la *Representación conforme*.

(1) Véase el número anterior.

(2) Para otras aplicaciones, véase Hadamard, *Sur certaines applications possibles de la théorie des ensembles*. Congreso de Zurich, 1897.

(1) Así, por ejemplo, la pretendida demostración de Duhamel de que toda función continua es derivable; ó la de Cauchy que citamos después.

(2) Alguno de estos resultados falsos, como, por ejemplo, el teorema de Cauchy: «Una serie de funciones continuas es una función continua», fueron ya notados por Seidel (1847).

Imposible entrar en la exposición de las ideas fundamentales con que ésta se ha ido enriqueciendo en manos de Schwarz, Neumann, Cristoffel, Poincaré y Koebe, hasta llegar á la resolución del importante problema de la *uniformación de funciones ó de curvas analíticas*, lograda por estos dos últimos, simultáneamente, en 1907. Problema que ocupa una posición central en la moderna teoría de las *Funciones automorfas*, fundada por Klein y Poincaré, en la cual quedan incluídas, como capítulos especiales, las funciones trigonométricas y las doblemente periódicas, que hasta entonces habían casi monopolizado el campo de la Teoría general de funciones, la más monumental construcción matemática del siglo.

Superficie de Riemann.—Estos éxitos brillantes son debidos, en gran parte, á la concepción de Riemann del plano compuesto de varias hojas, idea sencillísima que es, quizás, la más fecundamente original del siglo XIX. Esta superficie de Riemann, sobre la cual se convierten en uniformes las funciones multiformes, es la base de toda la Teoría de las funciones algébricas; el *substratum* de la Geometría algébrica de Noether, con tan gran éxito cultivada actualmente por los geómetras italianos.

Representa Riemann (1826-66) la actual escuela de geómetras que ha dado justa fama á Gotinga, á la cual pertenecen Klein, Schawarz, Minkowski. Es Weiertrass (1815-97) el fundador de la famosa escuela de analistas de Berlín; basta citar, entre los más grandes, á Du Bois Reymond, Kummer, Kronecker, Fuchs, Frobenius, Schottky....;

***

Geometrías no euclidianas.—Examinemos ahora la renovación paralela de la Geometría. Ya en el primer tercio del siglo emprenden algunos geómetras la revisión de los elementos de Euclides; y fíjanse, sobre todo en la Proposición V (1), una de las pesadillas de los geómetras del siglo XVIII. Gauss, Lobatschefski y Bolyai aportan nuevos puntos de vista, abandonando el camino hasta entonces seguido; y, lejos de persistir en el vano intento de demostrar este postulado por medio de los restantes, prueban la posibilidad de una Geometría perfectamente construída prescindiendo de él; cerrando así la serie de tentativas para su demostración, como Abel acaba con los ensayos de resolución de las ecuaciones por medio de radicales.

Era, sin embargo, demasiado atrevida esta idea nueva de que el espacio intuitivo pueda ser distinto del espacio físico; y tanto los trabajos de Gauss, que no publicó «por temor á los clamores de los beocios», como las memorias de Lobatschefski y Bolyai, así como los trabajos de algunos precursores aislados—Sacheri, Lambert, Schweikart, Taurinus—permanecieron ignorados mucho tiempo. Hasta el año 1868, en que, ya publicada la Memoria fundamental de Riemann (2), divulgan y explican Helmholtz y Beltrami las nuevas ideas, no comienzan éstas á arraigar, y aun esto en lucha tenaz contra la oposición decidida de filósofos y matemáticos.

La idea original que aporta Beltrami contribuyendo mucho á la convicción de los intransigentes, que negaban todo significado real al sistema, considerándolo como manifestación morbosa de la Matemática, es esta: «Admitido el espacio euclídeo, la Geometría de las figuras trazadas sobre las superficies esféricas y pseudoesféricas (de curvatura constante negativa) coinciden con las geométricas elíptica é hiperbólica del plano no euclidiano».

Geometría de dimensiones.—El triunfo de las Geometrías no euclidianas fué como la señal de asalto á la fortaleza de la Geometría clásica, antes considerada como inexpugnable. Pero es preciso buscar el punto de partida de esta renovación radical, en la Memoria póstuma de Riemann, en la cual están contenidas en germen—en la oscura forma propia de este profundo genio—las ideas que han presidido esta transformación. Y es la más atrevida, la de construir una Geometría abstracta cuyo *espacio* sea una variedad de elementos cualesquiera (por ejemplo: un conjunto de números). Libre así de las trabas que nos impone nuestra visión del espacio sensible, y atribuyendo á esta variedad un grado cualquiera de indeterminación—idea que tiene como precursores á Gauss, Cayley y Grasmann—, sienta las bases de la actual Geometría de n dimensiones; la Ciencia que, según predijo Cant, había de ser la más alta Geometría que un entendimiento finito pudiera emprender.

Ya hemos advertido que esta Memoria de Riemann es el punto de partida de la renovación total de la Geometría clásica. Es Klein, más tarde, quien descubre el error de los que creían terminada la revisión de Euclides, cuando no habían hecho sino comenzarla. ¿Por qué fijarse en una sola de sus proposiciones fundamentales, habiendo tantas otras que merecen igual revisión crítica? «La llamada Geometría no euclidiana, no es sino un primer paso dado en una dirección mucho más general». Y, pasando de Euclides á Staudt, ahondando en los cimientos, descubre que el edificio de la Geometría proyectiva está construído en el aire, pues deja sin demostrar el Teorema fundamental (1).

Axiomática.—Pronto halla eco múltiple este llamamiento; y abiertos estos nuevos horizontes, comienzan los geómetras á investigar los fundamentos de la Geometría, sacando á luz los hechos y las relaciones admitidos como evidentes, ordenándolos y clasificándolos, demostrando algunos de ellos por medio de los restantes. Y sobre esta red de cimientos perfectamente conocida, se edifica la Geometría con método deductivo puro, es decir, sin acudir á la intuición.

Pasch es el primero que da un sistema completo de postulados suficientes para construir la geometría proyectiva; siguen multitud de geómetras, entre los cuales citaremos solamente á Veronese, Peano, Schur y, sobre todos ellos, Hilbert, cuyos preciosos estudios sobre la independencia y compatibilidad de los postulados tanto han perfeccionado y contribuído al triunfo de la nueva tendencia.

Hoy existen tantas Geometrías como combinaciones de postulados; y estos postulados son proposiciones arbitrarias sólo sujetas á las condiciones de independencia é incompatibilidad. La Geometría no euclidiana es, pues, una de tantas Geometrías. Como dice Enriques, «los axiomas han sido ya destronados, y roto el encantamiento de su investidura por derecho divino, es decir su fundamento en una evidencia ó necesidad del espíritu humano, se han convertido en simples postulados. Ya no son príncipes ó miembros de una aristocracia, sino funcionarios electivos de una República democrática, que pueden ser destituídos ó sustituídos por motivos de economía ó de simple renovación».

He aquí, pues, á grandes rasgos expuesta, la renovación de la Geometría en los últimos tiempos. Eliminar del Análisis la intuición espacial, es empresa difícil y audaz, cuyo éxito ha costado más de medio siglo; pero hay algo infinitamente más atrevido y asombroso: es eliminar la intuición geométrica de la Geometría misma, y este empeño de rigorizarla emulando la perfección del Análisis, está en vías de realización; para las Geometrías lineal y cuadrática es ya un hecho.

(1) Antes designada como Axioma XI por error de los recopiladores de Euclides.

(2) *Ueber die Hypothesen welche der Geometrie zu Grunde liegen*. Escrita en 1854, publicada en 1867.

(1) Laguna antes señalada por Weierstrass en sus cursos de la Universidad de Berlín.

No son las apuntadas las únicas ventajas de esta Geometría racional. Siendo en ella los *puntos* entes arbitrarios, sólo sujetos á cumplir las condiciones impuestas por el sistema de axiomas fundamentales, cada ley geométrica demostrada obtiene inmediatamente, no ya dos ó tres traducciones, como en la antigua ley de correlación, sino tantas correlaciones como interpretaciones concretas demos á los entes abstractos que en ella figuran. Cada teorema demostrado produce, pues, sin nuevo trabajo, una renta de infinitos teoremas.

Correspondencias geométricas.—Este cambio de unos elementos por otros que hace corresponder á una figura otra figura, es otra de las características de la Geometría actual. La idea de la *transformación geométrica* es muy antigua; pero hasta Poncelet nadie había reconocido su importancia, como ya antes hemos señalado; Plücker, más tarde, avanza un paso más, tomando la recta como elemento generador del espacio y creando la teoría de los complejos y congruencias; finalmente, en el último tercio de siglo alcanza la idea su más amplia generalidad hasta llegar al estado actual.

Cremona logra establecer y sistematizar la correspondencia birracional más general entre dos planos, creando la ya clásica teoría que lleva su nombre, en la cual han producido modernamente tan bellos trabajos Segre, Bertini, Enriques, Fano, Berzolari..... Clebsch estudia la correspondencia entre los puntos de un plano y las curvas de un sistema doblemente infinito, creando la *Teoría de los conexos;* funda, además, la teoría general de la representación plana de las superficies, etc. De las correspondencias múltiples se ocupan más tarde Paolis, uno de los paladines de la Geometría racional; Segre, el creador de la teoría de la *antiproyectividad;* Reye, fundador de la teoría de la *apolaridad*.....

La transformación de figuras, el cambio de unos elementos por otros, el estudio general de las correspondencias entre dos variedades, son, pues, recursos de utilidad bien probada, ya incorporados definitivamente á la Geometría.

Antes eran las figuras entes rígidos é inmóviles, desprovistos de vida; hoy la Geometría se ha hecho dinámica y las figuras se transforman unas en otras, revelando parentescos no sospechados entre ellas.

Grupos de transformaciones.—Del estudio de las transformaciones geométricas á la introducción del concepto de *grupo* de Geometría, no hay más que un paso. Antes hemos recabado para Galois el honor de haber revelado, por primera vez, el poder organizador y clasificador de la teoría de grupos; los grupos por él utilizados eran finitos, entre sustituciones de n objetos, pero la generalización de esta noción tan fecunda no podía tardar.

Generalizar el concepto de grupo hasta darle su más amplia extensión; investigar las propiedades de los más generales grupos de transformaciones geométricas, venciendo considerables dificultades, y poner esta teoría en la cumbre de la Matemática, fundiendo sus teorías en una superior unidad, es la obra admirable de Lie y de Klein. El primero se ocupa de los grupos continuos, creando una grandiosa teoría que sistematiza las ecuaciones diferenciales, como Galois las algébricas. El segundo investiga, en especial, los discontinuos, haciendo de ellos preciosas aplicaciones al Algebra, y en su famoso programa de Erlangen utiliza la teoría de los grupos continuos como principio unificador de toda la Geometría.

Esta obra fundamental de Klein pone término á la antigua lucha entre geómetras analíticos y sintéticos; poco importa ya el método de obtención de las verdades; ni siquiera interesa la naturaleza de los elementos que compongan el espacio estudiado; lo único esencial, lo característico para cada rama geométrica es el *grupo* que le sirve de base. Y desde este elevado punto de vista se hacen visibles las conexiones antes ocultas entre la Geometría métrica y la proyectiva y el Análisis situs, la Geometría esférica de Lie y la Teoría de las transformaciones de contacto, y se ve como algunas se contienen en otras, y aparecen las lagunas que quedan entre ellas y las direcciones en que puede ensancharse el campo geométrico.

En una palabra: con los materiales dispersos de las numerosas *Geometrías* nacidas en el siglo XIX, se construye la *Geometría*; y su definición sorprenderá y desorientará á los profanos: «Es el estudio de las propiedades de una variedad continua de elementos dados, las cuales son invariantes respecto de un grupo de transformaciones definido en ella».

Unidad de la Matemática.—Vemos, pues, cómo el carácter de abstracción y, por tanto, de generalidad, poco á poco adquirido por la Geometría, ha ido acortando su antes enorme distancia del Análisis hasta conducir á la fusión de ambos. Su objeto, desde superior punto de vista considerado, es el mismo, á saber: el estudio del *continuo*. Geometría y Análisis, no son ya dos ciencias independientes, ni siquiera dos ramas distintas; son simplemente dos métodos diferentes aplicados á este objeto común; y entre ellos hay tal paralelismo, que, á veces, la diferencia estriba solamente en el lenguaje.

Las nociones de función, de curva, de correspondencia, son equivalentes; equivalentes son también las ecuaciones diferenciales y las variedades de escamas; idéntica es la esencia de la teoría de sustituciones lineales complejas y la de los movimientos no euclidianos; la teoría de las redes de Minkowski no es sino la traducción geométrica de la teoría aritmética de las formas.

Y si á esta elegante «Geometría de los números» agregamos las aplicaciones hechas por Klein de la Geometría afine á la Aritmética superior, y los estudios de Painlevé sobre las curvas algébricas de coeficientes racionales, vemos realizada al fin la profecía de Klein, quien anunciaba hace un cuarto de siglo que «con el tiempo, no sería suficiente la fusión de la Geometría con la Teoría de las funciones; sino que, como tercera aliada, entraría la teoría de los números» (1).

Sobre las disciplinas dispersas, que al comenzar el siglo XIX, recibían el nombre genérico de *Matemáticas*, ha surgido el edificio único que hoy llamamos *la Matemática*. Ahondando en sus fundamentos hemos encontrado una base única: la Teoría abstracta de los conjuntos; sobre ella se alza majestuoso el espléndido monumento, cuyo núcleo es la idea de función; lo corona la Teoría de grupos, que sistematiza y unifica las más variadas teorías.

Conjuntos, *Funciones* y *Grupos*; este es el esquema de la actual Matemática. *Abstracción* y *unidad;* he aquí sus características.

(1) Segre, *La Geometria d' oggidi e i suoi legami coll' Analisi.* Cong. Heidelberg, 1904.