

REVISTA DE OBRAS PÚBLICAS

PUBLICACION TECNICA DEL CUERPO DE INGENIEROS DE CAMINOS, CANALES Y PUERTOS

DIRECTOR

D. MANUEL MALUQUER Y SALVADOR

COLABORADORES

LOS INGENIEROS DE CAMINOS, CANALES Y PUERTOS

SE PUBLICA LOS JUEVES

Dirección y Administración: Plaza de Oriente, 6, primero derecha.

CONCEPTO Y ALCANCE DEL CÁLCULO DE PROBABILIDADES

POR

D. PEDRO M. GONZÁLEZ QUIJANO

Ingeniero de Caminos, Canales y Puertos (1).

En el prólogo de su libro *Le Hasard*, publicado hace unos dos años, cuenta Emilio Borel que, interrogado pocos meses antes por sus trabajos científicos, tuvo la imprudencia de responder que estaba terminando un libro sobre el azar; inmediatamente su interlocutor le preguntó con cierta ironía qué iba a decir de nuevo sobre tan *magnífico asunto*, y cuando se apresuró a contestarle que no era su propósito dar a conocer ninguna receta para ganar a la ruleta, ni ningún talismán capaz de asegurar la felicidad ó de alejar las desgracias, llegó al colmo la extrañeza de su amigo, el cual hubo de expresarla con esta pregunta mitad indiferente, mitad desdenosa: ¿pues de qué trata su libro?

La anécdota revela de un modo bien expresivo todos los prejuicios que el sólo nombre de cálculo de probabilidades despierta en el ánimo del vulgo y aun en el de muchas personas de educación no vulgar, que no aciertan a ver en él sino la vana labor de desequilibrados martingalistas ó un resurgir pseudo-científico de los misteriosos secretos de la cábala.

Y sin embargo, el cálculo de probabilidades, bien lo sabéis todos los que me escucháis, no es nada de eso. Es precisamente la más rotunda y concluyente negación de todo eso, y es además una rama de la ciencia matemática que ha alcanzado un considerable desarrollo, constituyendo hoy un cuerpo de doctrina de los más importantes.

Nacido de la interpretación de una cuestión de juego sometida al sutil ingenio de Pascal, pronto fué objeto de los más interesantes trabajos que han atraído la atención y ejercitado el talento de los mayores matemáticos, como lo demuestran los nombres ilustres de Fermat, de los Bernoulli, de Laplace, de Gauss, por no citar más que los eminentes.

Y tampoco ha quedado reducida su materia a la categoría de meras investigaciones curiosas, notables tan sólo por lo ingenioso de los procedimientos ó por la elegancia de los resultados, sino que ha llegado a infiltrar sus métodos en las ciencias experimentales que, desconfiando de aquellos modelos mecánicos con los que se trataba hace medio siglo de representar las recónditas

intimididades del mundo físico, buscan hoy la explicación de los hechos en simples leyes estadísticas que surgen por el poder de los grandes números de una heterogeneidad inextricable, á cuyo análisis elemental parece renunciarse.

Ni aun siquiera se ha limitado su influencia al campo de la ciencia pura ni á la inspiración de hipótesis más ó menos satisfactorias, pero de interés exclusivamente teórico, sino que descendiendo al terreno de las aplicaciones, han recibido también sus resultados la sanción suprema de la experiencia, no sólo en el estrecho recinto de los laboratorios, sino en el mucho más amplio de la vida y de los negocios.

Lo que con tales caracteres se nos presenta, no podrá ser nunca considerado como una lucubración vana y estéril. Si el árbol se conoce por sus frutos, fuerza será confesar que éste los ha dado excelentes. Pero en el estado actual de la crítica científica los resultados solos nos bastan para legitimar un procedimiento, y aunque las verdades adquiridas sean una garantía para las investigaciones futuras, el temor á extrapolaciones injustificadas no abandonará nunca al sabio, mientras queden en los fundamentos mismos de la ciencia hondos problemas que resolver, dudas espesas que aclarar.

Mirada la cuestión desde este punto de vista, la impresión no puede ser ya tan satisfactoria. Entre el aspecto de indecisión y vaguedad con que los fenómenos de azar forzosamente se nos presentan y la precisión numérica con que sus probabilidades se expresan, parece existir, á primera vista al menos, una oposición radical que amenaza con convertirse en irreducible antinomia; y cuando para huir de ella se trata de lavar este pecado de origen en las puras fuentes del infinito, nuevas nebulosidades oscurecen el pensamiento, poniéndole en el borde de la paradoja y de la contradicción.

No es el reproche de hoy. Empeñadas discusiones acompañaron al cálculo de probabilidades desde sus primeros pasos. Aun queda el recuerdo en los tratados clásicos de las intransigentes objeciones de d'Alembert y el eco de los debates sostenidos en torno al célebre problema de San Petersburgo. La aplicación de los resultados del cálculo ha dado también lugar á opiniones encontradas en la teoría de la probabilidad de las causas y en la de los errores de observación. Igualmente han sido motivo de críticas acerbas, y no siempre injustificadas, las tentativas hechas por Condorcet, por Laplace, por Poisson para someter al cálculo de probabilidades las decisiones judiciales. Stuart Mill veía en ellas el escándalo de las matemáticas.

Prescindiendo de algunas exageraciones, un cierto acuerdo había llegado, sin embargo, á establecerse entre los tratadistas, y

(1) Conferencia dada en Sevilla en el VI Congreso de la Asociación Española para el Progreso de las Ciencias.

eso bastaba. Bertrand hacía preceder su conocida obra publicada en 1889 de una luminosa introducción que había sido impresa algunos años antes con el título *Las leyes del azar*. En ella trata de poner de relieve los fundamentos del cálculo, disipando las dudas que pudieran asaltar al lector desprevenido, al que subyuga con los fallos de su certero juicio y las galanuras de su estilo, no exento de sal ática. Bertrand detiene, sin embargo, su análisis ante los datos elementales aportados por el sentido común ó por el buen sentido, que no siempre es lo mismo. Su trabajo empieza con estas palabras:

«¿Cómo atreverse á hablar de leyes del azar? ¿El azar no es la antítesis de toda ley? Rechazando esta definición, yo no he de proponer ninguna otra. *Sobre un asunto vagamente definido se puede razonar sin equívoco*. ¿Se debe separar al químico de sus hornos para preguntarle sobre la esencia de la materia? ¿Se empieza el estudio de los transportes de fuerza por definir la electricidad?»

Bertrand, como se ve, elude expresamente tratar estas cuestiones; acepta el concepto con todas sus vaguedades, pero es que para él estas vaguedades no le enturbiaban.

«La palabra azar—continúa—, inteligible por sí, despierta en el espíritu una idea *perfectamente clara*.»

Y trata en seguida de transmitir esta claridad al lector por medio de sugestivos ejemplos tomados de la realidad de la vida y ajenos á toda lucubración metafísica y á toda posibilidad no experimentada, por las que siempre mostró aquella repugnancia que le hacía rechazar, como pueriles juegos de la inteligencia, los modernos trabajos sobre las geometrías no euclídeas.

El análisis de Bertrand no podía bastar á espíritus más exigentes. Algunos años después, Poincaré, en su célebre obra *La science et l'hypothèse*, con plena conciencia de todas aquellas explicaciones, se expresaba, sin embargo, en estos términos:

«El solo nombre de cálculo de probabilidades es una paradoja: la probabilidad, opuesta á la certeza, es lo que no se sabe; y ¿cómo se puede calcular lo que no se conoce? No obstante, muchos sabios eminentes se han ocupado de este cálculo, y no se podría negar que la ciencia ha sacado de él algún provecho. ¿Cómo explicar esta aparente contradicción?»

Y al terminar el capítulo que dedica á la resolución del enigma, tan poco satisfecho queda del resultado obtenido, que concluye:

«En las líneas que preceden he planteado muchos problemas sin resolver ninguno. No lamento, sin embargo, haberlos escrito, porque ellos invitarán quizás al lector á reflexionar sobre estas delicadas cuestiones.»

No menos escéptico se había mostrado en el curso que había dedicado á esta materia en su cátedra de la Facultad de Ciencias, de París, el cual termina con estas palabras:

«El cálculo de probabilidades ofrece una contradicción en los términos mismos que sirven para designarle, y si no temiera recordar aquí una frase demasiado á menudo repetida, diría que ante todo nos enseña una cosa, y es, á saber, que no sabemos nada.»

Después de Poincaré, varios libros se han publicado sobre el mismo tema. Citemos al paso los de Montessus, de Carvallo, de Borel. Más ó menos en todos ellos se concede especial interés á la crítica de los principios. Los mismos problemas han inspirado también artículos recientemente publicados en la Prensa científica, como el de Guillaume aparecido en Septiembre último en *L'Enseignement mathématique*, y no solamente en revistas matemáticas, sino en publicaciones de carácter más general como el de Pincherle en *Scientia*, y aun en las especializadas en otras ramas de los conocimientos humanos, al parecer menos afines á la

materia, como los *Anales de Psicología* de Flournoy y Claparede, en cuyos tomos XV y XVI se han publicado también sendos artículos por Cailler y Cérésolle.

En España se ha prestado también recientemente atención á estos asuntos sobre los que contábamos algunos tratados elementales y un resumen histórico muy interesante, hecho hace ya bastantes años por D. Miguel Merino con motivo de su ingreso en la Academia de Ciencias de Madrid. Esta docta Corporación escogió hace pocos años el cálculo de probabilidades para tema de uno de sus concursos y posteriormente dedicó también al mismo una interesante conferencia en el Ateneo de Madrid mi querido amigo y compañero D. Antonio Prieto.

Esta enumeración, que no aspira ni mucho menos á ser completa, demuestra que este asunto es, no sólo de capital importancia, sino además de verdadera actualidad científica. Sobre él os invito á meditar conmigo un rato.

Empecemos por definir la probabilidad y observemos ante todo qué no sería posible ni siquiera pensar en ella si no existieran en la realidad hechos probables. Faltando esa condición, aun la misma posibilidad del concepto carecería de toda importancia y las investigaciones en este sentido serían completamente estériles. ¿Cuáles son los caracteres de esos hechos?

En condiciones de antemano determinadas, se espera un resultado: ¿este resultado se presenta de un modo cierto y constante? El fenómeno obedece entonces á una ley natural que le liga de manera inequívoca á las condiciones preexistentes. Existiría, igualmente, una ley de exclusión, si el resultado que se esperaba no se presentase nunca; pero hay combinaciones de circunstancias en las que determinado fenómeno se produce algunas veces, no todas. Es entonces cuando lo calificamos de probable. No investigamos la causa de la incertidumbre: señalamos sólo un hecho.

Si queremos precisar más esta noción puramente cualitativa, tendremos que recurrir á la mayor ó menor frecuencia con que el fenómeno se produce, una vez que se han dado las condiciones previstas, y entonces diremos que será más probable el fenómeno más frecuente. La experiencia, en un gran número de circunstancias, es precisamente el caso de los juegos de azar, permite llegar más adelante en la determinación de la probabilidad, al revelar la existencia de relaciones numéricas que han permitido fijar en todas las épocas, de una manera empírica, las reglas de equidad de los juegos usuales.

Para ello se ha solido comparar el número de casos favorables con el de casos adversos á cada jugador; pero, por razones que no es de momento indicar, la relación que de este modo se determina presentaría ciertas dificultades para la comodidad de cálculos posteriores, y por ello se la ha sustituido por el cociente entre el número de casos favorables y el número total de casos posibles. Generalizando este concepto de inspiración experimental, se ha llegado á definir en todos los casos la probabilidad por ese cociente.

Pero esta definición, como se observó en seguida, deja abierta la puerta á un sin fin de ambigüedades. ¿Cómo numerar los casos posibles? Puede en un gran número de ocasiones hacerse de muchos modos y el cociente obtenido variará con la elección que se haga. D'Alembert, razonando contra el cálculo de probabilidades, hacía observar que, para cualquier acontecimiento dudoso, dos casos pueden ocurrir tan sólo: ó se verifica ó no; el primero sería el único favorable y toda probabilidad sería igual á $\frac{1}{2}$. Hecha esta comprobación, todo el cálculo sobraba.

Si pues la definición no ha de resultar vana, será preciso agregarle algo y, en efecto, decimos hoy: la probabilidad es la relación del número de casos favorable al número total de casos po-

sibles, pero siempre que estos casos sean igualmente posibles, igualmente verosímiles, empleando estas locuciones con un cierto vengonzoso temor, porque pronto nos damos cuenta de que con ellas no podemos ni queremos significar otra cosa sino que esos casos han de ser igualmente probables, y entonces nos vemos inclinados á exclamar con Poincaré: «Hemos reducidos á definir lo probable por lo probable».

Tratando de salvar esta flagrante petición de principio, el mismo Poincaré se pregunta: «¿Cómo sabremos que dos casos posibles son igualmente probables? ¿Será por una convención?» Y contesta en seguida: «Si establecemos al principio de cada problema una convención explícita, todo marchará bien, no tendremos ya más que aplicar las reglas de la Aritmética y del Álgebra y llegaremos al fin del cálculo sin que nuestro resultado pueda dejar lugar á la duda; pero en cuanto que queramos hacer la menor aplicación, será preciso demostrar que nuestra convención era legítima y volveremos á encontrarnos frente á la dificultad que habíamos creído eludir».

Buscando un criterio para la enumeración de los casos elementales igualmente probables, se ha creído poder encontrarlo en razones de independencia, de simetría, en la aplicación, en suma, de lo que se ha dado en llamar el principio de razón suficiente; pero si analizamos este criterio, acabaremos por encontrarlo insuficiente ó contradictorio. En una urna existen bolas blancas y negras en igual número, del mismo tamaño, de idéntica materia; se han mezclado completamente á fuerza de agitarlas en todos sentidos; no hay razón ninguna que hubiera de decidirnos por unas ó por otras; la probabilidad deberá ser igual para los dos casos, y en ambos será de $\frac{1}{2}$. Mas razonando de este modo hemos olvidado un pequeño detalle: las bolas son de colores diferentes. El color no influye, se dirá, y es cierto; pero ¿cómo sabemos que es cierto? La experiencia nos lo ha confirmado mil veces. A falta de ella, nuestra afirmación *a priori* sería temeraria. ¿Con qué derecho podríamos asegurar entonces que el color no podía ser motivo de preferencia? ¿No lo es, en efecto, en otras ocasiones?

Y si hemos de distinguir entre sí los sucesos, si hemos de cerciorarnos de algún modo de su aparición ó su ausencia, sin lo cual toda afirmación sería improbable y todas las definiciones simples juegos de palabras, serán precisos siempre caracteres distintivos que vendrán á destruir esa indiferencia absoluta, esa simetría perfecta que parece indispensable para la aplicación del principio. Y cuando, allanando esta imposibilidad, hubiéramos llegado á conseguir una indiferencia completa ante el pensamiento, ¿qué garantía tendríamos de que hubiera una igual indiferencia ante la realidad? ¿Por qué no habían de haber quedado ocultas nuevas circunstancias influyentes?

Vemos, pues, que si prescindimos de convenciones, siempre más ó menos arbitrarias, no tenemos más medio de resolver el problema que la comprobación experimental. ¿Habrá que deducir de aquí que el cálculo de probabilidades es una ciencia vana? Tanto valdría como declarar vanas la Geometría ó la Aritmética, porque ni la una ni la otra nos garantizan *a priori* la igualdad de las figuras ó la equivalencia de las unidades. Dos figuras, por ejemplo, son iguales, según la definición clásica, cuando superpuestas coinciden; pero ¿quién nos asegura de que no varían durante el transporte? Del mismo modo, las unidades deben ser iguales para que la cantidad quede perfectamente definida por su número; pero la comprobación última de esa igualdad es operación ajena al cálculo. En uno ú otro caso, es la existencia de cuerpos sólidos ó la de procedimientos precisos de medida la que hace comprobables esas igualdades que las ciencias puras postulan y sobre las que edifican sus teorías, que toman de la experien-

cia sus datos elementales, para devolverlos más tarde preñados de consecuencias en complicadas combinaciones de práctica aplicación.

Hay casos, sin embargo, en los que el dato experimental parece ausente y en los que una cierta fuerza lógica nos inclina, aun á pesar nuestro, hacia determinadas convenciones que la experiencia más tarde justifica. Poincaré nos habla de ese instinto oscuro, al que llamamos buen sentido y sin el cual no podríamos dar un paso, porque la ciencia misma sería imposible y quedaríamos incapaces de descubrir ninguna ley ni de aplicarla. El método experimental y la ciencia toda, que es su consecuencia, no tienen otro fundamento que la creencia en que existen leyes que rigen los fenómenos del mundo, y esta creencia, fundada en hechos pasados, no podemos extenderla al porvenir, sino porque repugnamos el cataclismo mental que supondría la negación de toda experiencia adquirida, ante la posibilidad del cual, no tenemos sino una sola respuesta: «eso es muy poco probable».

No habrá que confundir, sin embargo, datos y posiciones que convendrá que queden separados. ¿Cómo ha de parecer extraño que ese buen sentido, seleccionado producto de innumerables experiencias, que han venido enriqueciendo el acervo mental del individuo y de la especie, concuerde con frecuencia con la realidad externa, si ha sido modelado por ella en lucha cien veces secular en la que el triunfo ha sido el premio de perfectas adaptaciones que han permitido la continuidad de esta dilatada cadena de vida que hasta nosotros llega? ¿Cómo un tan continuado éxito no ha de inspirar confianza? Pero será preciso guardarse de las generalizaciones injustificadas y, por lo mismo que ha sido tan fecundo, debemos conservar vivo este íntimo consorcio con la realidad experimental. La interpretación de ésta quedará siempre un poco vaga é indecisa é impregnada quizás de ideas de antiguo adquiridas y de inveterados hábitos de pensamiento, que se impondrán á nuestra inteligencia, inclinándola á preferir para los problemas planteados soluciones particulares, que se reputarán las más probables, porque representarán la mínima resistencia para nuestra actividad espiritual. Pero esta probabilidad de carácter puramente subjetivo no podría someterse á ningún cálculo ni ser fundamento de él. Para ser fecunda la ciencia ha de ser objetiva y la fuente de todo objetivismo no puede ser otra que la experiencia. La probabilidad elemental ha de ser pues, por consiguiente, un dato de experiencia que el cálculo se encargará de combinar con tantos otros. El objeto de este cálculo será entonces, según la exacta definición de Borel, *evaluar las probabilidades de los acontecimientos complejos por medio de las probabilidades supuestas conocidas de otros acontecimientos más sencillos*.

Planteada la cuestión en estos términos, las principales dificultades desaparecen, en tanto al menos que el número total de casos posibles sea finito. Si este número llega á ser infinito, las consideraciones anteriores no bastan ya para despejar de dudas el asunto. Estudiaremos primero el caso en que se trate de un infinito discreto y numerable representable simbólicamente por la serie de los números enteros y empezaremos por notar la imposibilidad de comprobar experimentalmente la igual probabilidad de cada uno de los elementos que integrarían el conjunto. Esta igualdad había de revelarse por una igual frecuencia, y sería preciso disponer de una eternidad para que se presentaran todos siquiera una vez. Y aun antes ó después de intentar la prueba, la definición misma de los sucesos á distinguir presentaría también dificultades insuperables: no nos es dable conocer directamente una infinidad de elementos distintos; toda definición de esta especie ha de resolverse finalmente en una fórmula constructiva que determine nuevos elementos en función de los ya definidos: la definición de los números enteros es el ejemplo típi-

co más sencillo: redúcese en esencia á la interpretación del símbolo $n + 1$.

Dentro de la realidad experimental y aun independientemente de toda prueba, esa igualdad de probabilidad no es tampoco presumible, por lo menos, en los fenómenos accesibles al hombre, los únicos que, en definitiva, podríamos conocer y podrían, por consiguiente, interesarnos. Imaginemos para fijar las ideas una urna conteniendo n bolas numeradas desde 1 hasta n : podremos, agitándola convenientemente, llegar á realizar de un modo práctico la igual probabilidad de los n números; n queda indeterminado, podemos hacerlo crecer, y teóricamente este crecimiento no tendrá límite; pero en la práctica, con n deberán crecer el tamaño de la urna y el tiempo necesario para conseguir una conveniente mezcla de las bolas; aunque encontráramos sitio para la urna en el espacio infinito, el orden y disposición de las bolas no serían suficientemente renovados; y siempre serían más probables las próximas al orificio de extracción que las que quedaran á considerable distancia y podrían exigir mucho tiempo para ser accesibles.

Esta gigantesca urna podemos suponerla realizada en el Universo por un éter cinético compuesto de una infinidad de átomos velocísimos, moviéndose en todas direcciones con la rapidez de la luz; no hago una hipótesis física, trato sólo de aclarar los conceptos con una imagen. Al mismo tiempo, en la célula terminal de un cabello de cualquiera de vosotros y en la molécula más prominente de esta célula, podríamos, utilizando su fórmula estequímica, señalar un átomo de hidrógeno. Pasarán los siglos; de cuántos aquí nos congregamos no quedará ni el recuerdo; la vida misma desaparecerá de nuestro planeta; pero más allá de todo eso, en las tinieblas de la eternidad ignorada, podemos, desde ahora, imaginar un fugitivo instante que viniera á interrumpir con precisión casi matemática la majestad del tiempo, y en ese momento, el átomo de hidrógeno, que habrá hecho su camino, vendrá á chocar con un átomo de éter. ¿Quién será capaz de calcular el encuentro? ¿Cuál de los infinitos átomos producirá la colisión? ¿Cabe imaginar azar más indeciso? Pues bien, también en el momento actual, más allá de los confines de la Vía láctea, tras las últimas nebulosas distinguibles por los más poderosos telescopios, podríamos señalar inmensas regiones cuyos átomos etéreos, aun sin ser desviados por el menor choque, no podrían concurrir á la cita y se encontrarían despojados por completo y desde hoy de toda probabilidad.

Pero si la igual probabilidad de infinitos sucesos no es prácticamente asequible, pueden imaginarse disposiciones para que cada uno de esos infinitos sucesos tenga una probabilidad asignable.

Sea, por ejemplo, una urna que contenga n series de 10 bolas cada una, siendo ya n un número finito y fijo, y numeremos cada serie con las cifras de 0 á 9; pero supongamos que las series sean todas de bolas blancas, menos una que estuviere compuesta de bolas rojas. Podríamos dar á esta urna el encargo de definir un número y, al efecto, deberían extraerse bolas de ella de un modo sucesivo, devolviendo siempre á la urna la bola salida en cada extracción. El número pedido sería el que se escribiera con las cifras obtenidas, interrumpiendo la operación á la salida de la primera bola roja. Es claro que en vez del sistema decimal hubiéramos podido escoger otro sistema de numeración cualquiera, ó no interrumpir la serie de cifras sino á la salida de la segunda ó de la tercera bola roja ó adoptar otra composición de urna y aun otro proceder operatorio, pues son muchos los que se podrían imaginar; pero limitándonos al expuesto, observaremos que si bien es capaz de reproducir un número entero cualquiera, no todos los números tendrían igual probabilidad, pues aunque la posibilidad de que nunca salga una bola roja no se pueda ne-

gar en términos absolutos, esto es, al menos, altamente improbable, y, por consiguiente, mientras mayor sea el número de cifras, menor sería la probabilidad de alcanzarle. Estos números serían, á la larga, los menos frecuentes.

El cálculo preciso de las probabilidades en este caso es muy sencillo, aunque no nos hemos de detener en él. En general, siempre que los sucesos puedan ser, efectivamente, infinitos, ó con más precisión ilimitados, las probabilidades particulares de cada uno deberán formar una serie convergente hacia la unidad. Si sin conocer la composición de la urna ó, más en general, las condiciones de la experiencia, quisiéramos determinar prácticamente esas probabilidades, la dificultad no sería tampoco mucho mayor en estas nuevas circunstancias que cuando los casos eran en número finito: las mayores probabilidades serían fácilmente comprobables, la infinidad posible quedaría dividida en clases de interés decreciente, hasta llegar á un conjunto prácticamente despreciable, y sencillas interpolaciones permitirían la determinación de una fórmula empírica, tanto más próxima á la realidad cuanto más se prolongara la experiencia. Esta marcha podría complicarse tal vez hasta hacerse humanamente irrealizable; pero desde el punto de vista teórico no daría motivo á la menor objeción, y en la práctica no serían el fenómeno ó la ley sino uno de tantos como esperan y esperarán tal vez eternamente el sabio que los descubra.

Reducido así también á la experiencia el caso que nos ocupa, todavía la imaginación no se da por satisfecha. Es ciertamente imposible en la práctica una infinidad de fenómenos igualmente probables; pero fuera de las limitaciones de la realidad, ¿no sería posible imaginarla? Y aparte del interés físico, que se concede nulo, ¿no habría en esa consideración un alto interés filosófico que viniera en ayuda de la interpretación de este mismo mundo, realizado entre infinitos que la inteligencia ve posibles? Nada importaría que á las imposibilidades físicas viniera á sumarse la limitación de nuestro intelecto incapaz de representarse distintamente una infinidad; ¿acaso no puede el espíritu, aun renunciando á la representación diferenciada de los fenómenos, abarcarlos en fórmulas comprensivas y razonar sobre ellos con perfecto rigor lógico? Y ya que esa diferenciación sea imposible al hombre ¿no podemos suponerla en la infinita inteligencia de Dios mismo?

Planteadas la cuestión en esos términos, difícil es dar una respuesta; pero sí debemos notar que ante la infinidad de Dios y cualquiera que sea la actitud que se adopte respecto de la contingencia del mundo, toda probabilidad se desvanece; porque si se admite un determinismo absoluto, el menor fenómeno estará siempre presente á su ilimitada inteligencia, y si el Universo fuera el resultado de continuos é imprevistos devenires, éstos no podrían ser tampoco, ni en conjunto ni en detalle, sino el producto inequívoco de su voluntad soberana.

Y en cuanto á la consideración más verbalista que efectúa de esa infinidad igualmente probable, fácil es ver que no puede ser fecunda sino en contradicciones. Supongamos, en efecto, que todos los números enteros fueran igualmente probables: la probabilidad de cada uno sería nula y ninguno en particular podría llegar á realizarse. Otra forma podría darse al mismo argumento: escojamos un número n tan grande como queramos; podremos dividir el conjunto de los números enteros en dos clases conteniendo la una al número n y á todos los inferiores á él, y en la segunda á los números restantes. Por grande que sea n , los números de la primera clase tendrán siempre una probabilidad nula, y el número favorecido por la suerte debería ser en todos los casos mayor que n , de donde este teorema, que podrá ser objeto de variadas interpretaciones metafísicas, pero al que no

podrá conceder ningún valor la ciencia positiva: «si todos los números son igualmente posibles, sólo es cierto el infinito». Con igual derecho y fuerza lógica alejariamos al infinito también estrellas y mundos, para quedar aquí sumidos en perpetuo silencio y en oscuridad tenebrosa, que nos permitiera sin distraernos enumerar por los siglos de los siglos los elementos de nuestra infinidad probable.

Admitiendo igual ilegítima hipótesis, llega Laurent en su *Estatística matemática* á la conclusión de que la probabilidad, para que un número entero escogido al azar sea primo, es nula. Lo mismo hubiera podido concluir de los cuadrados y de los cubos. Y nosotros, entretanto, tropezaremos diariamente con primos, con cubos y con cuadrados, en nuestros cálculos ordinarios con los números usuales, en este mundo nuestro, bajo los cálidos rayos de nuestro sol ó en la noche callada mientras recibimos desde remotas, pero medibles lejanías, los reflejos centelleantes de miríadas de estrellas.

Supongamos ya que el número infinito de los casos posibles llegue á tener la potencia del continuo, como ocurre con los puntos de una recta ó de un plano. Si la recta ó el plano ó aun el espacio los consideramos indefinidos, podrán siempre dividirse en porciones de medida finita que vendrán á constituir conjuntos numerables, á los que se podrán aplicar las consideraciones anteriores y, por consiguiente, bastará que estudiemos una de esas porciones limitadas, que parece que ha de ser, además, perfectamente realizable.

Esta realización sería, sin embargo, más aparente que real. Supongamos trazado un segmento rectilíneo: el número de sus puntos, se dice, es infinito: será cierto, pero al tratar de señalarlos, por finísima que sea la punta de que nos sirvamos, si disponemos de tiempo suficiente, llegaremos al cabo á una confusión indiscernible. Aun cuando nuestros procedimientos de determinación y de medida se perfeccionasen hasta límites inconcebibles, concluiríamos siempre por tropezar con la discontinuidad de la materia misma. Las determinaciones en definitiva serían siempre en número limitado.

Persiguiendo el infinito, podemos hacer caso omiso de la molestia que el átomo nos ocasiona. Reduzcámosle á un punto matemático, imaginemos su centro de gravedad, por ejemplo, y hagámosle recorrer con movimiento uniforme el segmento rectilíneo: habrán llegado así á señalarse sucesivamente todos los infinitos puntos del segmento: nuestra atención no podrá seguirle, fija siempre en un punto anterior, como la flecha del célebre argumento de Zenón de Elea.

Pero prescindamos de todas estas dificultades: no nos preguntemos qué utilidad pueden tener tantos supuestos inalcanzables: admitamos que en este caso pueda la consideración de lo continuo prestar los mismos servicios científicos que presta en otras ramas del saber y elevemos nuestro pensamiento á las regiones de la pura y perfecta idealidad geométrica. Todavía la probabilidad sería en este caso una relación entre dos infinitos, cuyo indeterminado valor no sería posible fijar sino por nuevas convenciones.

Y no hay que creer tampoco que tales convenciones se presenten naturalmente al espíritu de modo que conduzcan en cada caso á resultados inequívocos: una célebre paradoja de Bertrand nos convencerá de lo contrario. Bertrand propone el siguiente problema: «Se traza *al azar* una cuerda en un círculo. ¿Cuál es la probabilidad para que sea mayor que el lado del triángulo equilátero inscrito? Lo resuelve de las tres formas siguientes, al parecer irreprochables (véase la fig. 1.^a):

1.^a Todos los puntos del círculo son equivalentes: la simetría de la figura lo garantiza. Escojamos uno cualquiera: la cuer-

da que pase por este punto deberá formar con la tangente un ángulo mayor de 60°: la probabilidad será $\frac{1}{3}$.

2.^a Podríamos escoger arbitrariamente la dirección de la recta, ya que todas las direcciones son también equivalentes: la cuerda deberá encontrarse entonces á una distancia del centro menor que la mitad del radio: la probabilidad sería $\frac{1}{2}$.

3.^a En vez de escoger arbitrariamente la intersección ó la dirección podemos fijar directamente al azar el punto medio de

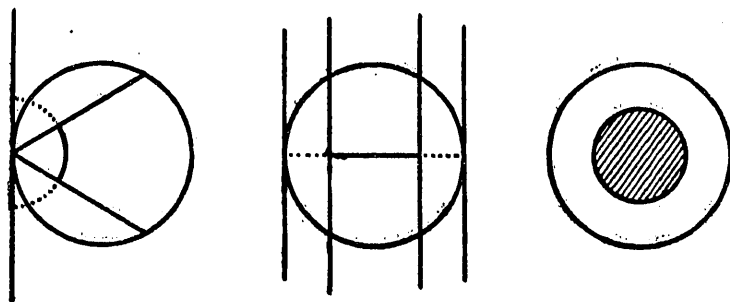


Fig. 1ª

la cuerda; con él la cuerda vendrá determinada y, para satisfacer al enunciado, dicho punto deberá encontrarse dentro del círculo concéntrico al primero y de radio mitad. La probabilidad, igual á la relación de las áreas de esos círculos será igual á $\frac{1}{4}$.

Entre estas tres respuestas ¿cuál es la verdadera? Ninguna de las tres es falsa, responde Bertrand, ninguna es exacta: la cuestión está mal planteada. Y tiene razón. Sin definir previamente lo que ha de entenderse por *trazar al azar una cuerda*, el problema carece de sentido preciso. Todas esas probabilidades y muchas más, intermedias ó no, podrán llegar á realizarse por disposiciones prácticas convenientes. Sin conocer en cada caso la que se da en la realidad, todas las contestaciones serán aventuradas. Desprovisto el enunciado de toda restricción, la probabilidad que se pide no existe.

La conclusión de Bertrand se ha criticado y antes y después de él se ha desarrollado modernamente todo un cuerpo de doctrina del que puede verse una exposición bastante completa en la obra de Czuber *Probabilidades y medias geométricas*. Para ello ha sido preciso aceptar determinadas convenciones que precisen el sentido, para los elementos geométricos, de la locución «escogido al azar». Estas convenciones se recomiendan por su naturalidad: cuando se trata de puntos sobre una recta, sobre un plano ó en el espacio, la probabilidad para que el punto se encuentre dentro de un segmento, de una superficie ó de un cuerpo es proporcional á la longitud del segmento, al área de la superficie, al volumen del cuerpo. Para los conjuntos continuos de rectas la convención no es ya tan intuitiva, pero se llega á ella fácilmente; si una recta se mueve de modo continuo satisfaciendo determinada condición envolverá una cierta curva, si en su movimiento conserva un solo grado de libertad; pero si su determinación envuelve dos parámetros, las condiciones del problema establecerían entre ellos una ó más desigualdades que, al convertirse en igualdades, representarían curvas límites si el conjunto es plano; los puntos interiores á un recinto ó comunes á varios tendrían entonces por correlativas las rectas que cortan á una ó varias curvas, y así como para aquéllos su probabilidad se define proporcional al área del recinto, la de las rectas lo es á la longitud de la curva á que cortan. Para los planos y las rectas en el espacio las convenciones se complican: no podemos en este

momento entrar más de lleno en el asunto; con lo expuesto basta para sugerir una idea sumaria del método. Aplicado al problema de Bertrand, la única solución que sería correcta sería la segunda; la relación entre las rectas que cortan al círculo interior y las que cortan al exterior sería la misma que las de las circunferencias de los dos círculos: la probabilidad sería, pues, $\frac{1}{2}$. Pero esta conclusión, ¿no sería en el fondo arbitraria? Borel considera que esas definiciones y convenciones son legítimas en este sentido, «que conducen á consecuencias de acuerdo con la experiencia, siempre que las condiciones de ésta no se compliquen expresamente para hacerlas caer en defecto». Es una actitud análoga á la que el mismo ilustre matemático adopta en el problema de la suma de las series divergentes.

Pero aun reconociendo lo que esta actitud pueda tener de justificada como reacción contra determinadas tendencias quizás demasiado idealistas de las matemáticas modernas, habrá que convenir también en que esos enunciados son de una vaguedad tal que no parecen compatibles con la precisión requerida por las ciencias que han acaparado para sí el calificativo de exactas. Es que cualquiera experiencia, por sencilla que sea, ¿no encierra ya en sí un cúmulo enorme de complicaciones? ¿cuándo empezáramos á complicarla demasiado? ¿cómo distinguir las complicaciones naturales de las complicaciones artificiosas? ¿es que se puede intentar alguna experiencia fuera de la realidad?

Vano discutir, se pensará tal vez, no renovemos el sofisma del montón de trigo; ni un grano ni dos harán que la colección se transforme en montón, pero todos estaríamos conformes cuando llegara el momento de aplicar el calificativo y todos nos mantendríamos indecisos en los casos dudosos. Desgraciadamente, ni el acuerdo existe ni la duda se presentaría tan sólo en circunstancias excepcionales. ¿Dónde está el caprichoso artificio del problema ni de las soluciones de Bertrand? ¿Quién no calificaría de naturales sus hipótesis? ¿Y cómo considerar á una más natural que las otras cuando para hacer la elección es preciso dedicarse á laboriosas investigaciones? El mismo Borel, al tratar de este problema, admite la fácil posibilidad práctica de las soluciones primera y tercera; «pero es fácil ver—añade—que la mayor parte de los procedimientos naturales que se pueden imaginar conducen á la segunda» (1). Para probarlo cita tres ejemplos, alguno muy discutible por adolecer de la misma imprecisión, y, finalmente, por asimilación con el problema de la aguja, cuya solución experimental ha sido admitida, entiende que hay motivo para rechazar las otras dos soluciones de Bertrand porque «no nos pertenece, dice modificando arbitrariamente una definición, modificar la solución del problema».

Muy débiles me parecen todas estas razones y difícilmente pudieran alegarse otras. ¿Cómo declarar esa *mayoría natural* sin una previa estadística siempre laboriosa y siempre deficiente? Y aun supuesta terminada, ¿cómo negar los derechos de la *minoría*? Y en cuanto á los argumentos por analogía, su valor será siempre muy limitado, y en todo caso no se trataría aquí de *modificar arbitrariamente* una definición, sino de hacer patente su improcedencia lógica por restringir, sin justificado motivo y sin las salvedades á que habría lugar, el sentido de una palabra de aplicación corriente, dejando así la puerta abierta al equívoco y al sofisma, pues esta cuestión de palabra, que puede parecer completamente baladí, no carece, sin embargo, de trascendencia, porque si el azar se define y la experiencia no responde á esa definición, habrá que buscar la razón del desacuerdo, y la decisión habrá repercutido en el problema de la previsión y de la discusión de las causas.

(1) Borel dice á la primera porque estudia las soluciones en otro orden.

Motivos habría también para dudar un poco de esa pretendida naturalidad de las comprobaciones experimentales. El mismo Borel ha llamado también la atención sobre las dificultades que presentan, algunas de un orden bastante general, que depende en ciertos casos de la naturaleza misma de las cosas (1). Y para eludir esas dificultades, que ocultarían la precisión del resultado teórico, él también se ve obligado á recurrir á artificios.

¿Qué pensar, en vista de todo lo dicho, de esa moderna teoría de las probabilidades geométricas? En mi concepto, que es una teoría más geométrica que de probabilidades, sin dejar de reconocer que puede prestar muy útiles servicios y que constituye un cuerpo de doctrina de los más meritorios.

Cuando se trata de probabilidades continuas, no es posible pasar en silencio una profunda observación debida á Poincaré. Hay casos numerosos en la práctica en los que, cualquiera que sea la hipótesis que se haga sobre la probabilidad elemental, con tal de suponer tan sólo que varía de una manera continua, los resultados serán independientes de la elección. Supongamos un disco y una aguja que gira alrededor de un eje que pasa por su centro: el disco está dividido por el borde en partes iguales coloreadas alternativamente de blanco y de rojo: la aguja se pone en movimiento con velocidad suficiente para dar muchas vueltas completas: parará al fin; ¿cuál será la probabilidad de que pare en rojo?

Si conociéramos con completa exactitud la magnitud del impulso y la importancia de los rozamientos de todo género, podríamos calcular el arco descrito por la aguja, y si además supiéramos el punto de partida, el de llegada podría igualmente determinarse sin la menor vacilación. Pero el impulso varía y con él los rozamientos y el arco descrito: no podrá ser menor que un límite dado si la aguja ha de completar varias vueltas, no podrá exceder de todo límite, si se ha de mover con fuerzas humanas y no se ha de hacer interminable la experiencia: nula la probabilidad de esos casos extremos, tomará valores continuos en los intermedios, creciendo primero y decreciendo en seguida después de pasar por un máximo. Si llevamos sobre un eje el borde desarrollado del disco é indicáramos por franjas blancas y rojas el color y disposición de las divisiones, la función de probabilidad vendrá representada por una curva de forma acampanada como la que se dibuja en la figura 2.^a, y si las franjas se prolongan en el interior de la superficie encerrada entre el eje y la curva, es fácil ver que,

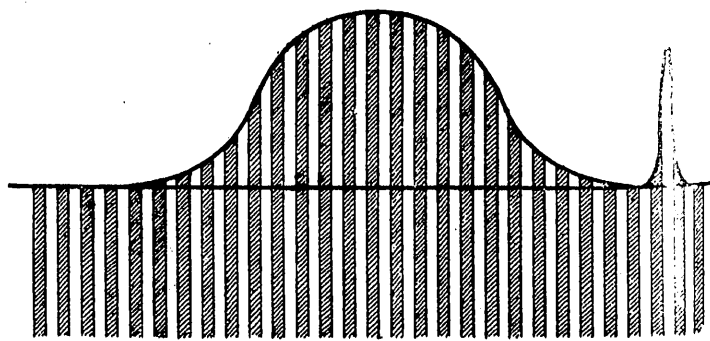


Fig. 2^a

con error despreciable y tanto menor cuanto que la curva sea más prolongada, la porción que de la superficie quede blanca tendrá igual medida que la pintada de rojo.

De cualquier modo que paseemos la curva á lo largo del eje ocurriría lo mismo: la posición inicial de la aguja carecería, como se ve, de influencia; el mayor ó menor tendido de la curva

(1) *Elements de la theorie des probabilités*, pág. 91.

podría tener alguna; rebasado cierto límite, sería completamente insignificante; la probabilidad de ambos colores sería $\frac{1}{2}$.

Aunque de un gran valor, esta observación no tiene, sin embargo, aquel carácter decisivo que se está en derecho de exigir á las definiciones y á las teorías matemáticas; señala un hecho curioso y fecundo, pero que no puede servir de base única de la ciencia; limita el campo y facilita el camino para las comprobaciones experimentales, pero no puede pasarse sin ellas. Si la curva se estrecha extraordinariamente hasta no cubrir más que una ó dos divisiones, la demostración caería por su base; ¿dónde está el límite preciso que restringe las aplicaciones? La experiencia sólo puede decirlo; á ella habrá que recurrir siempre para documentarse respecto á la escala de los fenómenos.

Llegamos, pues, también para este caso á la misma conclusión: los razonamientos *a priori* no pueden suplantar á la experiencia; casos habrá en que parezcan adivinarla; ¿quién podrá afirmar entonces que no haya en el fondo de esas intuiciones simples reminiscencias experimentales?

Y si quisiéramos tomarlas como único fundamento de investigaciones abstractas, sin comprobar su contenido en la piedra de toque de la realidad, la perplejidad y la contradicción invadirían al cabo nuestros cálculos. Un sencillo ejemplo reproduciría aquí bajo nueva forma la misma antinomia que hemos ya comprobado en un caso anterior. Los números todos comprendidos entre 0 y 1 forman un conjunto que, empleando la terminología de Cantor, tienen la potencia del continuo. A este conjunto pertenecen todos los números fraccionarios menores que la unidad; pero estos números forman un conjunto numerable, porque convertidos á quebrados irreducibles, podemos ordenarlos poniendo delante á $\frac{1}{2}$, después á los que tengan por denominador 3, luego los que lo tengan igual á 4, y así sucesivamente. Ahora bien, si de un conjunto no numerable se suprime un conjunto numerable, el primero conservará su potencia primitiva, que es tanto como decir que el conjunto numerable será rigurosamente nulo ante el conjunto continuo. Consecuencia práctica: la probabilidad de los números comensurables es igual á cero; sólo los incommensurables serán posibles. Mas he aquí la respuesta de la realidad ante esta demostración rigurosa: nos es imposible comprobar ni construir números incommensurables: todos los resultados de nuestras medidas serán forzosamente números racionales.

Una deducción general se desprende de esta discusión ya larga: la probabilidad subjetiva no puede servir de base á ningún cálculo exacto; sus convenciones dejarían siempre amplia participación á lo arbitrario, su aplicación sería siempre aventurada. En cambio la probabilidad como hecho de experiencia es un fundamento sólido y el único posible para una teoría matemática del azar. Es además, como decíamos al principio, su sola justificación aceptable. Si no hubiera hechos probables el cálculo de probabilidades sería un vano contrasentido.

¿Es qué por eso la probabilidad subjetiva deba ser desechada en bloque, como de ningún valor? ¿Despreciaremos ese instinto oscuro de que nos hablaba Poincaré? No podríamos, ni lo aconsejamos: fuera del alcance de la ciencia positiva, previéndola, acompañándola, siguiéndola á veces, existirá siempre un mundo de vislumbres, de aspiraciones, de sentimientos que dará pábulo á las tendencias metafísicas del hombre y que será su sostén ó su cadena, el ángel tutelar que le conduzca á una vida más pura y más digna de ser vivida ó el demonio tentador que le suma en las tinieblas de la ignorancia y de la desesperación. Y con esta distinción no trato de hacer una comparación de valores: para la

ciencia positiva y la metafísica no hay en la realidad un denominador común: en beneficio de una y de otra habrá que recordar siempre que son dos mundos aparte.

Pero volvamos al punto de partida. Hay hechos probables y por eso existe una probabilidad; pero ¿por qué hay hechos probables? Sin pretender conocer la razón última de las cosas ¿no habrá medio de reducir la existencia de esos hechos á realidades más sencillas? ¿Cuál puede ser la explicación del azar? El azar se ha dicho es la ausencia de toda ley. Bertrand rechazaba esta definición, que es en efecto insostenible como base del cálculo. Si el azar es la ausencia de toda ley ¿cómo podría haber leyes para el azar? Le Dantec tendría razón para recordar con este motivo la frase de un conjurado de opereta: «¿la falta de señales será acaso una señal?» Los fenómenos probables no obedecen á leyes exactas, pero satisfacen á leyes estadísticas: es esta última una circunstancia que no hay que echar en olvido.

Se ha creído encontrar la causa en la complicación de las leyes incapaces de ser abarcadas por nuestra limitada inteligencia y, aun apurando el argumento, Guillaume presenta como tipo teórico de azar inductible el de un fenómeno sometido á una ley sólo expresable mediante un número infinito de variables independientes. No se ve, sin embargo, cómo de este caos puede brotar algún orden, ni por qué la ignorancia inevitable del detalle hubiera de imponer relaciones numéricas al conjunto.

Se ha buscado también la razón del azar en el encuentro fortuito de series de fenómenos independientes; obedeciendo cada una á leyes determinadas, sus frecuencias respectivas podrían calcularse, una vez conocidas esas leyes, con completa exactitud. Las relaciones entre esas frecuencias, fácilmente calculables también con toda precisión para el que pudiera conocer todas las series, constituirían las probabilidades y darían razón de la ley estadística; pero la independencia de las series impediría, á su vez, que esas relaciones se verificaran de un modo constante y cierto é introducirían en la marcha de los fenómenos la irregularidad característica de los hechos de azar.

La explicación parece plausible y conciliaría el determinismo mecánico del mundo y la existencia de esos otros fenómenos de carácter aleatorio que parecerían desmentirlo, aunque podría pensarse tal vez que tiene el inconveniente de probar demasiado, pues aceptándola, todo fenómeno tendría siempre una probabilidad, y no debería, sin embargo, darse el nombre de tal á una relación cualquiera que, aun admitiendo variaciones irregulares, no llegara á presentar cierta relativa constancia que le hiciera útil en las aplicaciones.

Podría quizás la explicación completarse por la observación del predominio con que par cen presentarse en el mundo los fenómenos periódicos. Su intervención en los ejemplos más típicos de hechos de azar no puede desconocerse: el barajeo de las cartas, la mezcla de las bolas en una urna, el giro de la ruleta son operaciones que, con mayor ó menor precisión, presentan este carácter, y que, gracias á él, reducen entre límites no excesivamente amplios las anomalías que permiten la independencia de las leyes.

Y tampoco puede extrañarnos que esos fenómenos periódicos predominen en el mundo: gracias á ellos es posible la vida misma, que no podría realizarse sin cierta constancia de ambiente, gracias á la cual los mismos elementos, constantemente renovados por inagotables combinaciones, conservan el equilibrio dinámico que constituye la esencia íntima del vivir. Si estas condiciones no se dieran con ese carácter de generalidad, nuestra existencia sería imposible; ¿podríamos entonces observar otra cosa?

Admitiendo estas explicaciones, el azar sería más aparente que

real y procedería más de nuestra limitación y de nuestra ignorancia que de la naturaleza íntima de las cosas. De otro modo sería, si desechando la hipótesis determinista ó reduciéndola sólo al campo de las ciencias físicas, tomáramos en cuenta los problemas que surgen en torno al libre albedrío. Desde este punto de vista, la indeterminación sería completamente real y á ella recurriría Renouvier cuando hacía derivar el azar de la intervención de *comienzos absolutos* en la cadena de los acontecimientos, hasta entonces y después sometidos al determinismo. En esta hipótesis el azar no estaría en las bolas, sino en el brazo que agita la urna y en la mano que efectúa la extracción.

Con esta hipótesis, se prescindiría, sin embargo, de una porción de fenómenos que, aun revistiendo los caracteres del azar, se encuentran libres por completo de toda intervención humana, como no sea la de la observación de los hechos y, en todo caso, tampoco se explicaría por ella la ley estadística, que no sería, en definitiva, sino una coincidencia extraña ó un resultado de prolija cuenta sólo conocible *a posteriori*, á menos de admitir también para las voluntades ciertas compensaciones misteriosas, que en cierto modo vendrían á ser la negación de la libertad misma ó una limitación al menos de esta libertad.

En cambio, ese instinto oscuro, al que varias veces hemos aludido y que sería el fundamento de las probabilidades subjetivas, podría tal vez entonces encontrar su explicación en un conocimiento directo del yo por el yo mismo, que encontraría proyectados al exterior los reflejos de sus propias actividades. Una aproximación de este género parece entreverse, aunque no se afirme de manera categórica, en el trabajo de Ceresole, que ya antes hemos citado:

«El acuerdo entre la voluntad y el acto—dice—entre la intuición de las probabilidades y el hecho no nos está garantizado ni por consideraciones matemáticas ni más en general por consideraciones lógicas; encontramos en él una relación irreductible, última, de orden metafísico.»

Es éste, sin embargo, un terreno en el que, por las razones apuntadas, no podemos entrar; pero antes de abandonarlo convendrá hacer una observación: si la intuición de las probabilidades procediera de un contacto íntimo de ese género entre la voluntad y la inteligencia, podría tal vez ilustrarnos sobre la probabilidad de los actos humanos; pero carecería de toda garantía para darnos á conocer las relaciones numéricas del mundo exterior. El hecho cierto que hemos comprobado ya es que las respuestas de esa intuición son con frecuencia ó equivocadas ó vacilantes y que el cálculo, por consiguiente, si busca sólido apoyo, no podrá encontrarlo sino sobre la probabilidad objetiva, es decir, sobre la probabilidad experimental.

¿Las aplicaciones del cálculo han respondido siempre á esta manera de ver? ¿Hasta qué punto han sido consecuentes con ella y qué confianza merecen los resultados? El tiempo nos falta para tratar debidamente el punto, y por eso hemos de limitarnos, para concluir, al examen de algunos ejemplos que nos pongan en guardia contra conclusiones poco justificadas ó demasiado ambiciosas. Fijémonos primero en uno tomado del trabajo de Ceresole, citado hace un momento. Se había hecho desde hace tiempo la observación de que, aun en circunstancias en que todo está determinado, como ocurre con los cálculos numéricos, los caracteres reconocidos del azar pueden encontrarse en ciertos detalles: la sucesión de las cifras por ejemplo. «El sello del azar—dice Bertrand—aparece muy curiosamente, á veces, en los números deducidos de las leyes más precisas. Una tabla de logaritmos lo atestigua. De 10.000 números sucesivos de las Tablas con 10 decimales de Vega, tomo la séptima cifra del logaritmo: nada en esta elección ha quedado al azar, el Algebra lo gobierna todo, una

ley inflexible encadena todas las cifras. Si se cuentan, sin embargo, los resultados se tendrán, próximamente, para 10.000, mil veces la cifra 0, mil veces la cifra 1, y así de las demás: la fórmula se conforma con las leyes del azar». Bertrand llegó á hacer prácticamente la comprobación y la encontró de acuerdo con las previsiones. Poincaré, examinando la cuestión nuevamente, llegó á demostrar de un modo riguroso que una comprobación de este género debía tener lugar dentro de ciertos estrechos límites, fundándose al efecto tan sólo en la continuidad y limitación de las primeras derivadas del logaritmo, lo que hace sus razonamientos aplicables á la mayor parte de las tablas numéricas. Ceresole recusa esta demostración, que considera excesiva, por cuanto demuestra ser cierto lo que sólo sería probable: olvida, sin embargo, que en la demostración de Poincaré queda siempre un margen de error; postula además la probabilidad, y habría que discutir si lo hace con razones suficientes.

Es verdad que para la posición de Ceresole las razones sobran, la intuición basta, y esta intuición es, según él, irreductible á razones de orden lógico. En este terreno, toda discusión sería imposible, ó por mejor decir sería inacabable, porque no tendría otra base que prejuicios. En su opinión, serían las complicaciones del cálculo, sin relación exacta con el sistema de numeración empleado, las que harían arraigar en el espíritu ese poderoso sentimiento de probabilidad, y avanzando por el mismo camino, arrostrando todas las consecuencias, trata de desarrollar en el lector la creencia en proposiciones matemáticas exactas pero indemostrables, insinuando que á esta categoría podría pertenecer el tan perseguido teorema de Fermat.

Como ejemplo sugestivo de tales proposiciones, Ceresole define un número, determinando sus cifras consecutivas con las condiciones de que el cálculo de cada una se funde sobre el conocimiento de todas las precedentes y que la complicación del cálculo vaya en aumento. Cumplidas estas condiciones, que no examinaremos si realiza porque el autor no trata tampoco de demostrarlo, éste no vacila en afirmar, guiado por su intuición de las probabilidades, que el valor medio de las n primeras cifras de este número tiende hacia 4,5 cuando n crece indefinidamente, y afirma además que esta proposición será matemáticamente indemostrable, porque toda demostración supondría que el valor medio, para valores de n suficientemente grandes, se mantendría siempre comprendido entre límites muy próximos fijados de antemano, mientras que posibilidades con probabilidad asignable, y que habrían, por consiguiente, de realizarse alguna vez en la serie infinita de las cifras, producirían con toda certeza variaciones que excedieran esos límites.

Sin entrar en el detalle de la demostración, lo que sí se puede afirmar desde luego, y ello basta para quitarle todo valor, es que la asimilación de las cifras de ese número, ó de las de cualquier otro de complicado cálculo, con una serie indefinida de extracciones de bolas de una urna conteniendo diez numeradas de 0 á 9, será siempre completamente arbitraria, si la experiencia ó algún razonamiento no la garantizan. Desde el momento que un número está definido, lo están también todas y cada una de sus cifras, aunque éstas no las hayamos de conocer sino sucesivamente, á medida que nos las entrega el cálculo. Es algo así como si nos encontráramos ante una urna cuya composición cuantitativa nos fuera desconocida: todas nuestras hipótesis carecerían de fundamento.

Aun podría pensarse que, suponiendo todas las combinaciones de cifras igualmente posibles, aquellas en las que todas se presenten con frecuencias próximamente iguales serían con mucho las más numerosas. No podríamos afirmarlo; todas las evaluaciones serían posibles y todas serían arbitrarias. Imaginemos

odos los números inferiores á la unidad: cualquier combinación de cifras corresponderá á uno de ellos. Pero consideremos las combinaciones en que no entren más que el 1 y el 0; deberían constituir una minoría ínfima. Sin embargo, en el sistema binario representarían los mismos números. Ambos grupos de combinaciones serían equivalentes.

La excesiva confianza de Ceresole en esa misteriosa intuición de las probabilidades no es, ciertamente, compartida por la mayoría de los hombres de ciencia, y no cuenta, desde luego, con el favor de los matemáticos; pero no faltan ciertas nociones de aplicación corriente en las que se admiten con demasiada facilidad determinados apriorismos, que quizás exigirían algunas mayores reservas.

Con frecuencia se ha llamado la atención sobre los peligros de error en la aplicación de la teoría de la probabilidad de las causas. Se ha observado un fenómeno; puede ser debido á varias causas: ¿cuál es la probabilidad de cada una? Para resolver el problema se emplea el conocido teorema de Bayes: la probabilidad de cada una será proporcional á la probabilidad del suceso observado, en el supuesto de que esa causa obre; pero es claro que este teorema supone algún conocimiento previo, por muy imperfecto que sea, sobre la posibilidad de las causas mismas. Si partiéramos de una completa ignorancia respecto de las causas operantes, las hipótesis que cabría hacer serían infinitas, y sin motivo para decidimos por ninguna, habría que desecharlas todas. En la práctica, esta indiferencia absoluta no existe: habrá motivos para desechar algunas hipótesis, otras aparecerán, desde luego, como muy verosímiles, y será preciso aplicar á cada una un coeficiente proporcional á lo que se llama su probabilidad *a priori*.

Este coeficiente se podrá aplicar con seguridad en algunos casos: se tiene un número determinado de urnas de composición conocida; se escoge una al azar, se extrae una bola y es blanca, por ejemplo; ¿cuál es la probabilidad para que la urna sea una de las que poseen una composición dada? Se tienen todos los elementos necesarios para la aplicación del teorema de Bayes y la solución fácilmente calculable tendrá un carácter objetivo.

Pero el caso es muy diferente cuando se trata de la probabilidad de muchas hipótesis científicas en las que la comprobación directa es imposible. Entonces su probabilidad *a priori* no puede ser fijada sino por razones de analogía con teorías admitidas ó con otros fenómenos observados, en una palabra, por consideraciones más ó menos vagas sobre las que tanta influencia tienen en cada momento las corrientes de opinión científica y aun la apreciación personal. Hemos entonces forzosamente arrastrados al resbaladizo terreno de la probabilidad subjetiva, con la agravante de que en tales casos la enumeración de todas las hipótesis posibles es con frecuencia impracticable. Ya demostró Poincaré que desde el momento en que se diera una explicación mecánica de un fenómeno podrían darse infinitas. ¿Qué criterio podría adoptarse entonces para su valoración? En buena lógica habría que abstenerse por completo de resolver un problema forzosamente indeterminado y cuyo planteamiento envuelve un equívoco. Hipótesis de ese género han prestado, sin embargo, servicios á la ciencia y muchas seguirán siendo útiles en las investigaciones futuras. Renunciemos á calcular sus probabilidades que no serían más que números arbitrarios y precisiones ilusorias. No pueden mirarse en realidad tales hipótesis como verdaderas; ni como falsas: son simplemente *cómodas*, según la feliz expresión del propio Poincaré.

De considerable importancia, por su posible aplicación á todas las ciencias experimentales, es también la teoría de los errores de observación. Fúndase sobre una función de probabilidad de los

errores; propuesta por Gauss, el cual trató de justificarla por razones que, por lo variadas, no debieron dejarle muy satisfecho. El problema no es, en efecto, de los que pueden ser resueltos por la ciencia abstracta. «La ley rigurosa de probabilidad de los errores de observación—dice Bertrand—varía, sin duda, con la magnitud medida, con la elección de los instrumentos y con la habilidad del observador: es inaccesible á los geómetras».

La ley de Gauss ha sido sometida á la experiencia y los resultados han sido admisibles: las comprobaciones no han sido, sin embargo, ni suficientemente variadas ni bastante numerosas; permiten aceptarla como una ley aproximada, pero nada más. Ni aun siquiera nos es dable fijar *a priori* con seguridad el grado de aproximación. Tenía razón Lippmann, cuando decía á Poincaré: «todo el mundo cree en ella, sin embargo, porque los experimentadores se imaginan que es un teorema de matemáticas y los matemáticos que es un hecho experimental».

Estas circunstancias, que no deben darse al olvido, aconsejan la mayor circunspección en las aplicaciones. Convendrá igualmente recordar que, para que éstas sean correctas, deberán ser eliminados de los resultados de la experiencia los errores sistemáticos. ¿Y qué medios tenemos para distinguir esos errores? Si nos fueran conocidos, los corregiríamos; pasando inadvertidos, quedarán confundidos forzosamente con los demás. Sólo cabría entonces comparar entre sí las divergencias observadas y no considerar como accidentales sino los errores que cumplen con la ley de Gauss. Ésta se habría hecho entonces inacabable, pero no podría servir ya más que como un medio de coordinación, cuyo éxito dependería de las simplificaciones obtenidas en la sistematización de los resultados.

Y voy á terminar con algunas consideraciones sobre el papel que se hace desempeñar al azar en ciertas modernas concepciones del mundo. No hace aún medio siglo que se perseguían los secretos del Universo buscando en él leyes inmutables, como resultado de necesidades geométricas y de mecanismos perfectamente determinados. Poincaré resumía esta manera de ver, en el momento en que trataba de someterla á su certera crítica del siguiente modo: «Las verdades matemáticas derivan de un pequeño número de proposiciones evidentes por una cadena de razonamientos impecables; se imponen, no solamente á nosotros, sino á la naturaleza misma. Encadenan, por decirlo así al Creador, permitiéndole sólo escoger entre algunas soluciones relativamente poco numerosas. Bastarán entonces algunas experiencias para hacernos saber la elección que ha hecho».

Algunos años antes, nuestro Echegaray, en aquellas *Teorías modernas de la Física*, que fueron el encanto de la juventud de los que vamos ya mediando el camino de la vida, más próximo á aquel ambiente científico, se expresaba en estos términos aún más ambiciosos: «Se condensaron los hechos en leyes empíricas; se han reducido éstas á un corto número de hipótesis, que son en rigor grandes síntesis, pero falta completar la obra, reducir todas las hipótesis á una, y si es posible, hacer que esta ley única pierda su carácter empírico, se racionalice por completo, y busque en la filosofía su verdadero origen y su natural deducción».

Los progresos de la ciencia han revelado de entonces acá complejidades no sospechadas, que han traído abundantes cosechas de ignorados fenómenos; pero que han hecho vacilar al mismo tiempo la fe en aquellas grandiosas creaciones que aspiraban á encerrar toda la realidad en una clara, breve é infinitamente compendiosa fórmula de Mecánica.

Las tentativas de unidad se desvanecían, las grandes leyes, sometidas á comprobaciones más precisas, dejaban aparente la necesidad de términos de corrección y en los límites de la experiencia, confundidos ya con los errores instrumentales, sospe-

chábanse todavía divergencias nuevas que alejaran aún más la posesión de la fórmula exacta, que habría de contener en suma un número infinito de parámetros.

Ante esta complicación, siempre creciente, eran precisos nuevos modelos de hipótesis coordinatorias que, renunciando á la explicación del fenómeno elemental, en el que la variabilidad sería la regla, buscaran en el conjunto la realización de leyes inteligibles, por las compensaciones probables de innumerables anomalías. La teoría cinética de los gases ha sido la primera creación de este género y sus consecuencias y derivaciones han venido á formar un cuerpo de doctrina conocido hoy con el nombre de mecánica estadística. Tales teorías buscan su apoyo en el cálculo de probabilidades, pero al hacerlo así necesitan partir de determinados postulados que no siempre se presentan en forma explícita y con la suficiente precisión, y cuya enumeración, sin embargo, sería muy conveniente, para poder darse cuenta exacta del valor de la teoría y ver la parte que toman en ella los datos experimentales y la deducción lógica.

De no hacerlo así, se corre el riesgo de padecer ilusiones sobre el carácter de determinados resultados, á los que pudiera atribuirse una necesidad que cerrara el camino á las investigaciones. A veces parece renacer bajo nueva forma en estas modernas teorías aquella aspiración exclusivamente racionalista, que no quería ver en la experiencia sino una especie de comprobación casi superflua de leyes absolutas, que una inteligencia suficientemente poderosa habría de deducir con todo rigor á partir de axiomas inatacables. Esa necesidad de los resultados sería aquí la consecuencia de una mezcla confusa de todas las posibilidades, de la que brotarían como por encanto, al mágico influjo de los grandes números, las espléndidas armonías de la Naturaleza.

No es posible entrar en detalles que el tiempo nos veda ya; pero para ver cuánto tienen de quimérico tales esperanzas, permitásenos una observación. Para que pudiera justificarse ante la razón esa manera de pensar, sería preciso, por lo menos, que todas esas posibilidades estuvieran realmente representadas, y es fácil ver que esta real representación es imposible. Imaginemos

un volumen cualquiera: la distribución de las moléculas de un gas ó de un éter cinético en el interior de este volumen estará determinada en cada momento. Dividamos el espacio en volúmenes iguales: el número de éstos será infinito, pero un infinito numerable; el número de distribuciones de las moléculas dentro del volumen tiene la potencia del continuo. Es, pues, absolutamente imposible que todas las distribuciones se realicen, ni aun en el espacio infinito.

Pero se pensará tal vez que el tiempo es también continuo, que un continuo puede representarse sobre otro continuo, y que ya que el espacio fuera insuficiente para contener tantas posibilidades, éstas podrían encontrar al fin su realización en una eternidad condensable en la duración más fugitiva. Esfuerzo vano, porque una correspondencia de este género entre continuos de distinto número de dimensiones supone siempre una discontinuidad analítica infinitesimal incompatible con la continuidad de las trayectorias moleculares entre dos choques consecutivos, que habrían de estar separados por algún intervalo de tiempo por brevísimo que fuera.

Y cuando se hubieran vencido todos esos infranqueables obstáculos, todavía la distribución de las infinitas posibilidades en el tiempo y en el espacio daría lugar á una configuración que, en vez de ser única, habría que justificar entre una infinidad mucho más inmensurable de configuraciones posibles.

En resumen, que cualquier realidad podrá ser excedida mediante combinaciones innumerables formadas con los elementos de la realidad misma, y que habrá que abandonar por contradicción la fórmula de Hegel, según la cual todo lo posible es real. El conocimiento del mundo no podrá alcanzarse nunca sino por medio de la experiencia. Los hechos se condensarán en leyes, las leyes en teorías y las teorías se fundirán, á su vez, en grandes síntesis, caminando constantemente en pos de esa unidad que, exista ó no en el Universo, será siempre aspiración de la ciencia humana y hasta condición obligada de su existencia; pero en los cimientos del edificio estarán siempre los hechos: cuando ellos faltan, toda la construcción se derrumba.

REVISTA EXTRANJERA

Presa de arcos múltiples de hormigón armado sobre el Sélune (Mancha, Francia) (1).

El empleo cada vez más desarrollado de las fuerzas hidráulicas ha llevado consigo la construcción de un gran número de presas para saltos de agua, obras que no se construían antes más que para asegurar el abastecimiento de agua de las poblaciones ó de los canales. Numerosos tipos de construcción se han ideado para estas obras, pero hasta aquí las presas de mampostería estaban siempre constituidas por bloques, en cuanto fuera posible monolitos, establecidos de manera de resistir la presión del agua gracias á su masa. Para aumentar la resistencia de la obra se ha tenido la idea en diferentes casos de dar á la presa una forma curva en proyección horizontal, de modo que actuase como una bóveda cuyos estribos estuviesen constituidos por las laderas del valle.

Desde que el empleo del hormigón armado ha venido á ser

corriente en las construcciones, se ha introducido también en algunos países, y sobre todo en los Estados Unidos, en la construcción de las presas, pero este empleo no se había ensayado todavía en Francia, á pesar de las ventajas que puede presentar en ciertas ocasiones.

Por medio del hormigón armado se puede, en efecto, constituir una presa formada de un muro delgado sostenido por contrafuertes transversales y trabajando entre dos contrafuertes á la manera de un piso ó de una pared plana de depósito. Para resistir con más facilidad el empuje transmitido á los cimientos por los contrafuertes, se ha resuelto inclinar el muro propiamente dicho de la presa 45°, próximamente, hacia agua abajo, no estando el extremo de los contrafuertes más que ligeramente inclinado en sentido inverso. La obra forma una estructura de tabiques, cubierta en parte por el muro de la presa propiamente dicho, y que algunas veces ha podido cerrarse completamente para contener en el interior la fábrica hidroeléctrica. Más de 70 presas de esta clase se han construido antes de la guerra, con el nombre de presas Ambursen, principalmente en los Estados Unidos.

Á fin de utilizar todavía mejor la resistencia del hormigón armado que constituye la pantalla de la presa, se ha tenido la idea

(1) En el número anterior publicamos una nota sobre otra presa de bóvedas, proyectada por el distinguido Ingeniero de Caminos D. Alfonso Peña, cuyo sistema difiere de la citada en este número y de las demás de hormigón armado, no sólo en la naturaleza de los materiales, sino en la disposición de ellos.