

REVISTA DE OBRAS PÚBLICAS

PUBLICACION TECNICA DEL CUERPO DE INGENIEROS DE CAMINOS, CANALES Y PUERTOS

DIRECTOR

D. MANUEL MALUQUER Y SALVADOR

COLABORADORES

LOS INGENIEROS DE CAMINOS, CANALES Y PUERTOS

SE PUBLICA LOS JUEVES

Dirección y Administración: Plaza de Oriente, 6, primero derecha.

APLICACION DE LA TEORIA DE MÖÖSCH

Puente de hormigón armado sobre el río Júcar EN JALANCE (VALENCIA)

POR

ARTURO MONFORT

Ingeniero de Caminos, Canales y Puertos.

(CONTINUACIÓN) (1)

COLUMNAS.—De las seis columnas que en sentido transversal se proyectan tomamos una de las cuatro centrales y veamos la carga que sufre.

Siendo la carga permanente por metro lineal que insistía sobre el larguero $g = 0,852$ toneladas, tendremos:

	Toneladas.
Por los largueros inmediatos $0,852 \times 2$	1,704
Por la carga móvil.....	4,066
Carga propia $(4,5 \times 0,20 \times 0,20) \times 2.400$ kg.....	0,432
$p =$	6,202

La presión de la base columna será, pues

$$R = \frac{6,202}{20 \times 20} = 15,50 \text{ kg. por cm}^2$$

Siendo la altura libre de la columna máxima de 3,80 metros, el lado menor de la sección de aquella 0,20 metros, viene á ser $\frac{1}{20}$ de la altura.

Si adoptamos para armadura

$$F_e = 4 \phi 14 \text{ mm.} = 6,16 \text{ cm}^2$$

esta sección será el 1,54 por 100 de la de la columna 400 centímetros cuadrados.

Los estribos de hierro de 5 milímetros en forma de eslabón se suceden cada 15 centímetros de altura, 5 menos que el espesor del pilar (Möös, pág. 69).

Para la seguridad contra la flexión lateral ó pandeo se toma la presión media, es decir, la presión á la mitad de la altura de

la columna, ó sea, próximamente, á los 2 metros, ó también p menos el peso de media columna.

$$p' = p - \frac{0,432}{2} = 5,986 \text{ ton.}$$

Según la fórmula de Euler (Möös, pág. 70), la carga de ruptura será:

$$P = \frac{\pi^2}{l^2} \cdot E \cdot J = \frac{10 \cdot 200.000 \cdot \frac{20^4}{12}}{400 \times 400} = 166.667 \text{ kg.}$$

y el coeficiente de seguridad contra el pandeo

$$\frac{P}{p'} = \frac{166.667}{5.986} = 29 \text{ veces.}$$

Según la fórmula de Ritter (Möös, pág. 71), siendo $r = \frac{J}{\Omega}$

$$R_r = \frac{R_{\text{máx.}}}{1 + 0,001 \frac{l^2}{r^2}} = \frac{250}{1 + 0,001 \cdot \frac{400 \times 400}{20 \cdot 20}} = 169 \text{ kg. por cm}^2$$

Siendo, pues, la carga efectiva

$$R_r' = \frac{5,986}{400} = 15 \text{ kg. por cm}^2$$

el coeficiente de seguridad será:

$$\frac{R_r}{R_r'} = \frac{169}{15} = 11 \text{ veces.}$$

Reune, pues, la columna resistencia más que suficiente.

En las columnas exteriores los esfuerzos que resisten son más pequeños, y no hay, por tanto, que repetir con ellas los cálculos.

El detalle de las columnas se dibuja en la sección transversal, hoja núm. 4 de los planos.

PÉNDULO.—El empuje que el tablero transmite al péndulo en sus deformaciones, y que puede actuar en opuestos sentidos, es proporcional en su intensidad al peso de aquél con la sobrecarga en su tramo libre multiplicado por un cierto coeficiente. Ahora bien, muy desfavorablemente, pues se desprecian los apoyos de las columnas, se puede, en el caso presente, considerar como tramo libre del tablero la semiluz considerando la clave de la bóveda como punto de apoyo. Esta hipótesis dista mucho de la realidad, pues las columnas han de evitar en gran parte se transmita al péndulo toda la deformación por dilatación ú otra causa.

El coeficiente antes mencionado oscila entre 0,10 y 0,50, según la menor ó mayor resistencia que oponga el apoyo á la dila-

(1) Véase el número anterior.

tación. Aceptamos el máximo para el sistema de apoyo, ó luego por metro lineal sea 0,50.

Ya vimos que el peso del tablero por metro cuadrado era

$$g = 824 \text{ kg.}$$

al que agregando 400 kilogramos de sobrecarga obtendremos por metro cuadrado un peso de 1.224 kilogramos. Siendo, pues, seis metros el ancho total del puente y 18 la longitud del semitablero, desde la clave hasta el apoyo, su peso será:

$$18 \cdot 6 \cdot 1.224 = 132.192 \text{ kg.}$$

y el empuje máximo que el péndulo sufra:

$$P' = 0,50 \cdot 132.192 = 66.096 \text{ kg.}$$

Obra el péndulo como una viga empotrada por un extremo y libre por el otro, así pues, el momento máximo de empotramiento será, siendo la altura del péndulo 2,75 metros

$$M_{\text{máx.}} = 66.096 \cdot 2,75 = 18.176.400 \text{ kg. por cm.}$$

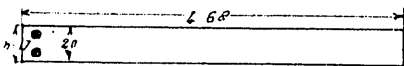


Fig. 12.

La flecha de la elástica es (fig. 12).

$$f = \frac{1}{3} \cdot \frac{P l^3}{EI} = \frac{1}{3} \cdot \frac{66.096 \times 2,75^3}{2.000.000 \cdot I}$$

poniendo en vez de I su valor para la sección virtual de la viga, teniendo en cuenta que la armadura por metro lineal es:

$$F_e = 10 \phi 9 \text{ mm.} = 0,000636 \text{ m}^2$$

$$I = \frac{1}{12} b \cdot h^3 + 2 n F_e \left(\frac{h}{2} - 0,03 \right)^2 = 0,00321;$$

poniendo arriba este valor se obtiene:

$$f = 0,06 \text{ m.}$$

Esta será, pues, la flecha máxima en el extremo del péndulo, cifra muy exagerada, pues en puentes construidos del mismo sistema con luces de más de 70 metros apenas se llegó a los 2 centímetros. Esto es debido a considerar la semiluz del tablero sin apoyo cuando nos acercáramos más a la realidad, si bien con error por defecto, considerando como tramo libre el claro entre el péndulo y la primera columna.

Sin embargo, calcularemos la armadura para resistir el esfuerzo F hallado.

La viga está sujeta a compresión por su peso propio y el del tramo y a flexión por el empuje P' . Apliquemos las fórmulas correspondientes a este caso.

La fuerza normal de compresión N en la sección de empotramiento del péndulo, es el peso de éste más el de la parte que del último tramo de tablero se puede suponer que apoya sobre él, que para mayor garantía supondremos apoya el tramo en toda su longitud de 2 metros, cuyo peso será:

$$2 \times 6 \times 1.224 = \dots\dots\dots 14.688$$

siendo el peso del péndulo:

$$2,75 \times 0,2 \times 4,68 \times 2.400 = \dots\dots\dots 6.178$$

$$N = \underline{\underline{20.866}}$$

$$N = \frac{20.866}{4,68} = 4.460 \text{ kg.}$$

y

$$M = \frac{M_{\text{máx.}}}{4,68} = 39.000 \text{ kg.}$$

Siendo la expresión

$$\frac{M}{N \cdot h} = \frac{39.000}{446.000 \cdot 20} = 0,44$$

y

$$\mu = \frac{F_0}{100 \cdot 20} = \frac{6,36}{2.000} = 0,0032$$

según el gráfico inserto en el Möösch, pág. 129, tendremos:

$$w = 0,525 \cdot h = 10,5 \text{ cm.}$$

y, por tanto, la compresión máxima de hormigón

$$R_b = \frac{N}{b \cdot x + \frac{n F_e}{2} (2x - h)} = \frac{4.460}{543} = 10 \text{ kg.} \times \text{cm}^2$$

Colocando el eje de las armaduras a 3 centímetros de los paramentos, y llamando

$$e = e' = \frac{h}{2} - 3 = 7 \text{ cm.}$$

tendremos para la máxima tracción de la armadura

$$R_e = n R_b \cdot \frac{e' + \frac{h}{2} - x}{x} = 93 \text{ kg. por cm}^2$$

y la máxima compresión para la misma:

$$R_{e'} = n R_b \cdot \frac{e' - \frac{h}{2} + x}{x} = 107 \text{ kg. por cm}^2$$

La armadura del péndulo será, pues, simétrica y por metro lineal de ancho de aquél estará compuesta por 10 ϕ 9 milímetros con otra armadura de distribución normal a la anterior formada por 5 hierros de 6 milímetros por metro de altura, con estribos de hierro de 5 milímetros espaciados verticalmente 20 centímetros.

Para resistir al esfuerzo de empotramiento del larguero con el péndulo se refuerzan las armaduras, según ya dijimos antes, y se representa en el alzado del larguero, hoja núm. 5 de los planos.

ANDENES: Forjado. — Proponemos para el forjado de los andenes de 0,60 metros de vuelo libre un espesor de 10 centímetros, siendo la distancia entre ejes de ménsulas de apoyo 2 metros, la luz teórica del forjado será:

$$l = 2 \text{ m.}$$

y la carga permanente:

	Kilogramos.
Por el peso propio = $2 \times 0,60 \times 0,10 \times 2.400 \text{ kg.} = \dots$	288
Por la sobrecarga de 400 kg. = $2 \times 0,60 \times 400 = \dots\dots$	480
$g =$	<u>768</u>

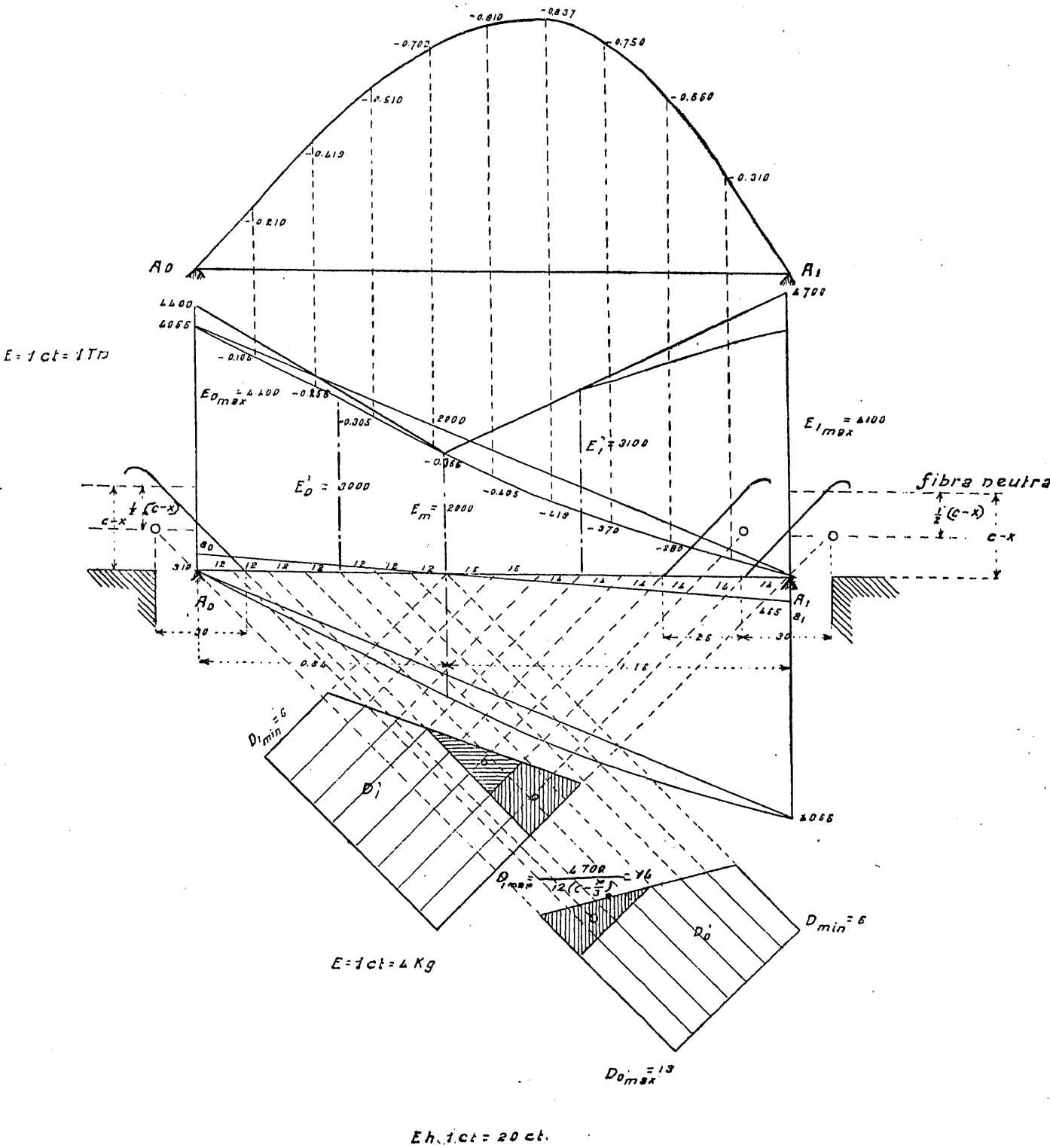
Teniendo en cuenta que es una viga empotrada

$$M_{\text{máx.}} = \frac{1}{10} g \cdot l = 15.360 \text{ kg. por cm.}$$

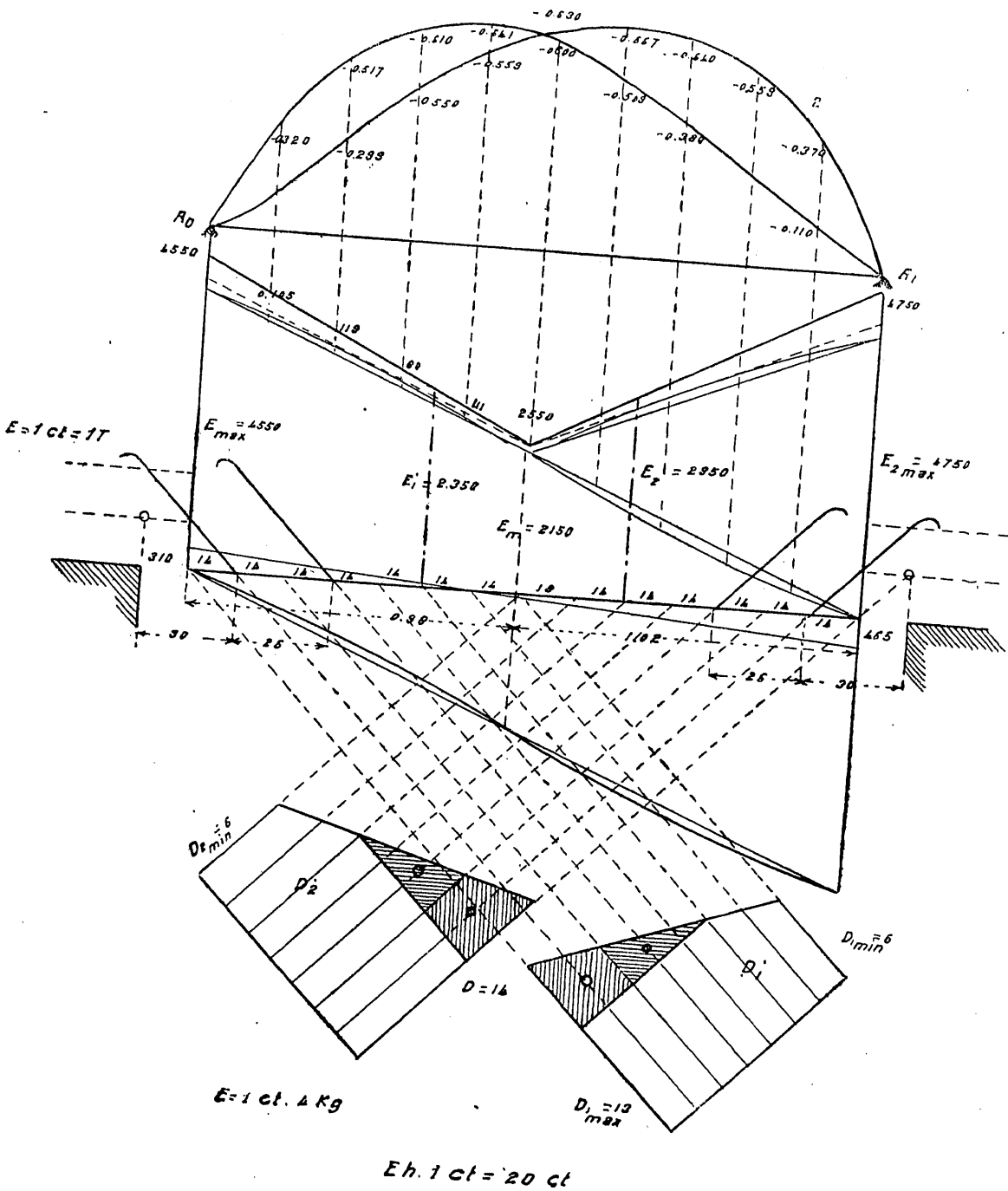
Puente de hormigón armado sobre el río Júcar en Jalance (Valencia).

Anejo núm. 4.

Primer claro.



Segundo claro.



Adoptemos una armadura

$$F_e = 5 \phi 7 \text{ mm.} = 1,92 \text{ cm}^2$$

siendo

$$h = 8 \text{ y } b = 60$$

$$x = \frac{nF_e}{b} \left(-1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot b \cdot h}{uF_e}} \right) = 2,33 \text{ cm.}$$

$$Z = D = \frac{M_{\max.}}{h - \frac{x}{3}} = 2.127 \text{ kg.}$$

la tracción del hierro será:

$$R_e = \frac{Z}{F_e} = 1.108 \text{ kg. por cm}^2$$

y la compresión del hormigón:

$$R_b = \frac{2D}{b \cdot x} = 30 \text{ kg. por cm}^2$$

En la hoja núm. 5 de los planos se representa el detalle del andén, al que además se le ha puesto otra armadura de distribución, normal al puente, con varillas de 6 milímetros de diámetro.

MÉNSULAS.—El vuelo libre de las ménsulas es 0,60 metros y la carga de los dos semitramos contiguos de forjado que les transmiten, es, según hemos visto:

	Kilogramos
Peso propio de la ménsula.	$g = 768,00$
$\frac{0,70 + 0,10}{2} \times 0,60 \times 0,12 \times 2,400 = \dots\dots\dots$	68,32
Peso del pretíl (según se detallará).	264,00
$M_{\max.} = \frac{(768 + 68,32) \times 0,60}{2} + 264 \times 0,60 = 40.830 \text{ kg. por cm.}$	

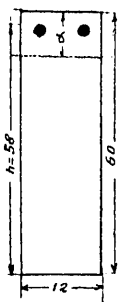


Fig. 13.

Adoptamos una armadura para la cara superior donde las tracciones se presentan (fig. 13)

$$F_e = 2 \phi 9 \text{ mm.} = 1,27 \text{ cm}^2$$

$$x = \frac{15 \cdot 1,27}{12} \left(-1 + \sqrt{1 + \frac{2 \times 12 \times 58}{15 \times 1,27}} \right) = 12,08 \text{ cm.}$$

$$Z = D = \frac{M_{\max.}}{h - \frac{x}{3}} = \frac{40.830}{58 - 4,03} = 757 \text{ kg.}$$

Luego la tracción en el hierro será:

$$R_e = \frac{757}{1,27} = 600 \text{ kg. por cm}^2$$

y la compresión en el hormigón:

$$R_b = \frac{2 \cdot 757}{12 \cdot 12,08} = 10 \text{ kg. por cm}^2$$

En el frente donde se producen los esfuerzos de compresión es conveniente colocar también armadura, que puede ser la misma calculada.

El máximo esfuerzo cortante es:

$$E_{\max.} = 768 + 68,32 + 264 = 1.100 \text{ kg.}$$

La carga máxima de desgarramiento del hormigón será, pues:

$$D_o = \frac{E_{\max.}}{a \left(h - \frac{x}{3} \right)} = 2 \text{ kg. por cm}^2$$

y el esfuerzo adherente del hierro

$$D_a = \frac{D_o \cdot a}{\Sigma p} = 4,3 \text{ kg. por cm}^2$$

no se necesitan, pues, armaduras secundarias y los hierros tienen, además, el diámetro conveniente para que no se exceda la carga límite de adherencia de 4,5 kilogramos.

Como precaución, siempre conveniente, hemos anclado las armaduras superiores de las ménsulas á las del forjado del piso del puente, por medio de tirantes del mismo diámetro que aquéllas.

PRETIL.—El pretíl adoptado es mixto de hierro y hormigón armado, según se representa en el alzado de la hoja núm. 5 de los planos, y está formado por pequeños pilares prolongación de las columnas armados como aquéllas y una barandilla formada por un zócalo y pasamanos de hormigón armado y enrejado metálico que cierra el recuadro y se empotra en los pilares.

Sobre la clave se proyecta un pequeño tramo macizo de hormigón armado del mismo tipo que los pilares, en cuyo centro puede colocarse el adorno que se estime oportuno.

El peso del pretíl descrito es el siguiente:

	Kilogramos.
Peso de un pilar = $1,10 \times 0,20^2 \times 2,400 = \dots\dots\dots$	105,6
Peso por m. l. de zócalo = $1 \times 0,20 \times 0,10 \times 2,400 = 48$	88
Idem m. l. de pasamanos = $1 \times 0,10 \times 0,10 \times 2,400 = 24$	
Idem m. l. de enrejado.	16

Según esto, el peso que insiste sobre una ménsula, que es el de un pilar y 1,8 metros de pretíl, será:

$$105,6 + 1,80 \times 88 = 264 \text{ kg.}$$

La armadura del pilar ya hemos dicho que es prolongación de la de las columnas y tanto al zócalo como al pasamanos se colocarán dos varillas superiores y dos inferiores de 7 milímetros de diámetro, con lo que su resistencia, por ser muy sobrada, no necesitamos justificar.

CÁLCULO DE LA BÓVEDA.—Para el cálculo de la bóveda hemos seguido el método propio de D. E. Mösch, Profesor en Zurich, á cuya obra nos hemos referido varias veces en esta Memoria, método que, por ser muy práctico y racional, creemos superior á otros varios preconizados por distintos autores, y al haberlo expuesto en un folleto que no tenemos noticias haya sido traducido del alemán, convendrá, sin entrar en demasiado detalle, dar de él una idea antes de hacer la aplicación del mismo al puente objeto de este proyecto.

Tratemos el caso que nos interesa, que es el de una bóveda empotrada simétrica, pues también en el folleto estudia el caso de las no simétricas.

Supongamos suprimido el apoyo izquierdo en A (fig. 14), resulta entonces una viga libre en aquel extremo y empotrada en el otro. Si se quiere conservar la misma distribución de las tensiones hay que aplicar en la sección del apoyo suprimido una reacción R

igual á la que obra antes de la supresión de aquél, y de la hipótesis de que la sección citada con pilas de apoyo ó estribos invariables no ha de experimentar movimiento en sentido horizontal, ni vertical, ni de giro, se deducen tres ecuaciones que permiten

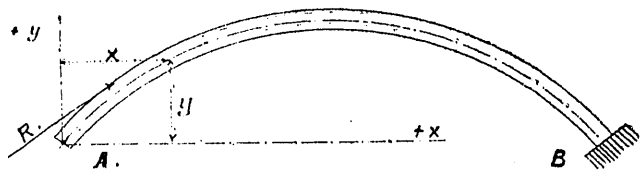


Fig. 14.

para un estado fijo de carga conocer las componentes vertical y horizontal de R y su momento con relación á A . Estas ecuaciones de deformación se simplifica mucho si se traslada R á un punto fijo o (fig. 15) que hemos de suponer en unión rígida en la sección del apoyo izquierdo. Además, pues, de las compresiones H y

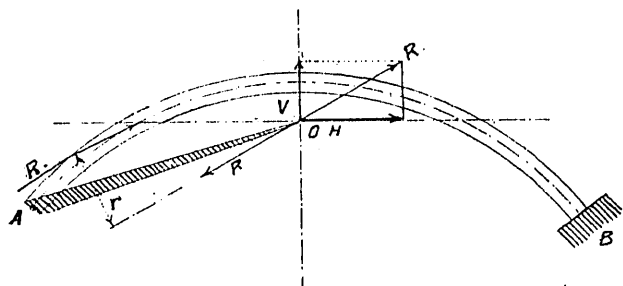


Fig. 15.

V de R se habrá introducido un par, cuyo momento será $M = R \cdot r$, y según la figura actuando en el punto o (fig. 16), tenemos las tres reacciones estáticamente indefinidas, H , V y M , y dicho punto, unido rigidamente al apoyo, también ha de quedar inmóvil.

Los movimientos de la sección de apoyo están motivados por

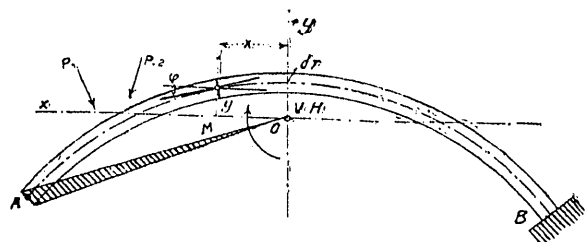


Fig. 16.

la deformación de los elementos constitutivos del arco y sobre cada sección transversal de esta obra un momento de flexión M_x , una fuerza normal N_x y otra transversal Q_x . Esta última puede despreciarse en el cálculo porque su influencia sobre la deformación es insignificante.

Se obtiene, por tanto, como consecuencia de la deformación: por el momento M_x un giro de dos secciones transversales próximas, cuyo ángulo es:

$$d\gamma = \frac{\sigma}{E} \cdot \frac{ds}{e} = \frac{M_x}{EJ} \cdot ds$$

por ser:

$$\sigma = \frac{M_x}{\frac{J}{e}}$$

y para la fuerza (móvil) normal N_x como compresión positiva una aproximación de aquellas secciones de:

$$\Delta ds = \frac{N_x}{EF} ds$$

Según el sistema de coordenadas de la figura 16, tendremos las siguientes ecuaciones (fig. 17):

1) Desplazamiento del punto o en el sentido del eje de la x .

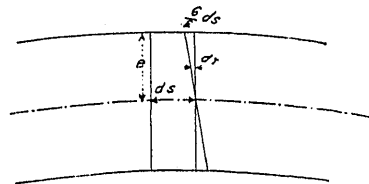


Fig. 17.

El aumento ó incremento de la luz del arco á consecuencia de la deformación de un elemento es:

$$dl = d\gamma \cdot y - \Delta \cdot ds \cdot \cos \phi;$$

de manera que resulta para todo el arco en el supuesto de un aumento de temperatura de τ_0

$$o = \int \frac{M_x}{EF} \cdot ds \cdot y - \int \frac{N_x}{E} \cdot \frac{ds}{F} \cdot \cos \phi + \alpha \cdot \tau \cdot l$$

en donde α es el coeficiente de dilatación.

2) Desplazamiento en el sentido del eje y

$$o = \int \frac{M_x}{EJ} \cdot ds \cdot x + \int \frac{N_x}{E} \cdot \frac{ds}{F} \cdot \sin \phi$$

3) Giro de la sección del apoyo alrededor del punto o .

$$o = \int \frac{M_x}{EJ} \cdot ds$$

Indicando con M_0 el momento de las fuerzas exteriores situadas á la izquierda de la sección x con relación á su centro de gravedad o , el momento flector que allí se produce por estar la viga empotrada en el apoyo derecho y libre en el izquierdo

$$M_x = M_0 + M - Hy - Vx$$

Por $N_x \cos \phi$ se puede poner sin error en la práctica el empuje horizontal H , porque la influencia de la deformación por las fuerzas normales disminuye generalmente en grandes peraltes y solamente aumenta en los pequeños, ó sea en arcos rebajados, pero aun en estos cabe aquella sustitución.

En la aplicación á arcos de puentes, como luego veremos, se tiene en cuenta el valor exacto de N_x para la carga permanente, de manera que sólo para la carga móvil resultará la exactitud afectada de un modo insignificante.

Por el mismo motivo se desprecia $N_x \sin \phi$.

Si ponemos los valores de M_x y $N_x \cos \phi$ en las ecuaciones que preceden, se obtiene multiplicando por E :

$$\begin{cases} o = \int \frac{M_0 y}{J} \cdot ds + M \int \frac{y ds}{J} - H \int \frac{y^2 ds}{J} - V \int \frac{x \cdot y \cdot ds}{J} - \\ \quad - H \int \frac{ds}{F} + R \alpha \tau l \\ o = \int \frac{M_0 x}{J} - M \int \frac{x ds}{J} + H \int \frac{xy}{J} \cdot ds + V \int \frac{x^2 ds}{J} \\ o = \int \frac{M_0 ds}{J} + M \int \frac{ds}{J} - H \int \frac{y \cdot ds}{J} - V \int \frac{x \cdot ds}{J} \end{cases}$$

No habiendo fijado hasta ahora el origen o de coordenadas, podemos situarlo de manera que resulte

$$\int \frac{x ds}{J} = 0 \quad \int \frac{y ds}{J} = 0 \quad \int \frac{xy ds}{J} = 0$$

Si se considera el eje del arco formado por pesos elásticos

$$dw = \frac{ds}{J}$$

Las tres últimas ecuaciones condicionales se convertirán:

$$\int dw \cdot x = 0 \quad \int dw \cdot y = 0 \quad \int dw \cdot x \cdot y = 0$$

y entonces el sistema de coordenadas se ha de elegir de modo que:

1) Los ejes x e y se hallan de manera que el momento cen-

Si no se trata de cargas móviles sino de estáticas solamente, se puede efectuar el cálculo aplicando estas fórmulas.

Ahora bien, las integrales no las podremos resolver con cualquier forma de arco, y hay que determinarlas aproximadamente. A este objeto, se puede dividir el arco en un número par de partes iguales, calcular para los puntos de división los valores bajo signo integral y sumarlos según la regla de Simpson. En el caso de que sobre el arco insistan cargas concentradas, se divide aquél en trozos de la longitud S , tales que coincidan los puntos donde actúan aquellas cargas con las de división, se colocan luego los pesos $w = \frac{S}{J}$ para los centros de cada trozo y se suman sencillamente los productos

$$M_0 \cdot w \cdot y, \quad M_0 \cdot w \cdot x, \quad w \cdot y^2, \quad w \cdot x^2$$

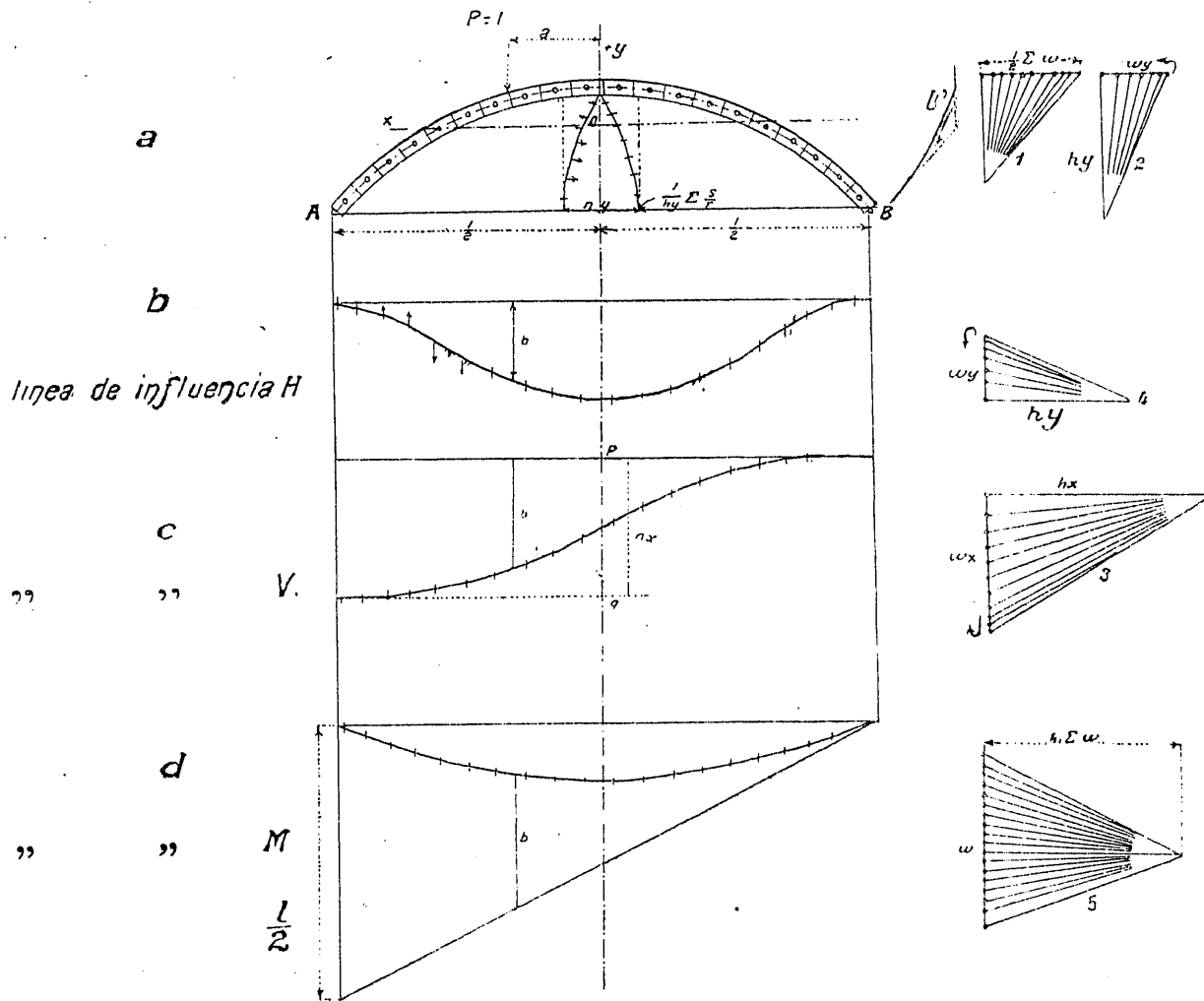


Fig. 18.

trífugo de los pesos dw sea nulo. En la hipótesis de arco simétrico se halla, desde luego, cumplida esta condición si el eje y coincide con el de simetría.

Las tres ecuaciones de deformación contendrán entonces cada una solamente una de las reacciones desconocidas del apoyo, que despejándolas obtendremos:

$$\begin{cases} H = \frac{\int \frac{M_0 y}{J} ds + E \alpha \cdot l}{\int \frac{y^2}{J} ds + \int \frac{ds}{F}} = \frac{\int M_0 \cdot dw \cdot y + E \alpha \cdot l}{\int dw \cdot y^2 + \int \frac{ds}{F}} \\ V = \frac{\int \frac{M_0 ds}{J} \cdot x}{\int \frac{x^2 ds}{J}} = \frac{\int M_0 \cdot dw \cdot x}{\int dw \cdot x^2} \\ M = - \frac{\int \frac{M_0 \cdot ds}{J}}{\int \frac{ds}{J}} = - \frac{\int M_0 dw}{\int dw} \end{cases}$$

Si denominamos las $w \cdot y = w_y$ y $w \cdot x = w_x$, tendremos:

$$\begin{cases} H = \frac{\Sigma M_0 \cdot w_y}{\Sigma y \cdot w + \Sigma \frac{s}{F}} \\ V = \frac{\Sigma M_0 \cdot w_x}{\Sigma x \cdot w_x} \\ M = - \frac{\Sigma M_0 w}{\Sigma w} \end{cases}$$

Suponiendo que las integrales se calculan por el segundo procedimiento dicho.

Si tratamos ahora de conocer las variaciones de H , V y M por medio de sus líneas de influencia para cargas verticales, imaginaremos la unidad de ellas, $P = 1$, actuando sobre el arco en la base α (fig. 18).

Entonces para todas las secciones en que

$$x > a \text{ será } M_n = 0$$

$$x < a \text{ será } M_n = -1 \times (a - x)$$

por lo tanto, para esta carga:

$$\Sigma M_n \cdot w_y = -\Sigma_n \frac{-l}{2} w_y \cdot (a - x)$$

$$\Sigma M_n \cdot w_x = -\Sigma_n \frac{-l}{2} w \cdot (a - x)$$

$$\Sigma M_n \cdot w = -\Sigma_n \frac{-l}{2} w \cdot (a - x)$$

ó, lo que es lo mismo, que para la carga $P = 1$ estas Σ anteriores son los momentos estáticos de los pesos w_y , w_x situados á la derecha del punto en que aquélla actúe con relación á la línea de acción de dicha carga (fig. 18).

Así, pues, si queremos obtener las líneas de influencia habrá que hacer mover la carga $P = 1$, comenzando por la derecha haciéndola actuar en los puntos divisorios de los trozos de arco S , y en cada posición calcular los momentos de todos los pesos w_y , w_x , á la derecha del punto de acción con relación á éste.

Puede para esto, como ya sabemos, calcularse cada momento con relación al que le antecede, y las ordenadas de influencia se obtendrán dividiendo estos momentos por las Σ indicadas en los denominadores de H , V y M .

PROCEDIMIENTO GRÁFICO.—Presenta el Sr. Möösch también la solución gráfica del problema que vamos á describir.

En la figura 18 el polígono de fuerzas 1 y el funicular 1' determinan el centro de gravedad o de los pesos elásticos w . Recordando el principio de estática gráfica, según el que (fig. 19) la suma de los momentos estáticos de fuerzas paralelas con relación á otras paralelas á ellas es igual al trozo m comprendido entre los dos últimos lados del funicular multiplicado por la dis-

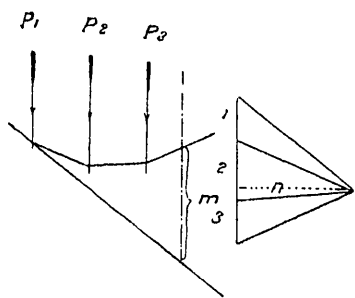


Fig. 19.

tancia polar h , se pueden representar por medio de funiculares todas las Σ que aparezcan como momentos estáticos.

Denominador de H , ó sea $\Sigma y \cdot w_y$.—Para hallar el momento estático de los pesos w_y con relación al eje x , se dibuja el polígono de fuerzas 2 (fig. 18) con una distancia polar cualquiera h_y .

Puesto que según las anotaciones

$$\Sigma w_y = \Sigma w \cdot y = 0$$

para el semiarco, el correspondiente funicular para la fuerza horizontal w_y tiene la forma indicada en la figura 4.^a a. Para el semiarco resulta el primero y último lado del polígono verticales. Para la mitad derecha se obtiene un polígono simétrico, de manera que denominando n_y al trozo comprendido entre los dos puntos de origen

$$\Sigma y \cdot w_y = n_y \cdot h_y$$

á esta suma hay que agregar aún, según vemos en el denominador de H , $\Sigma \frac{S}{F}$ que se calculará numéricamente.

Denominador de V , ó sea $\Sigma x \cdot w_x$.—Para la determinación de estas Σ de los momentos estáticos ó pesos w_x con relación al eje y se ha dibujado en la figura 4.^a el polígono de fuerzas 3 con una distancia polar h_x , y el polígono funicular está representado en c y llamando $p_q = n_x$

$$\Sigma x \cdot w_x = n_x \cdot h_x$$

Los denominadores calculados de H y V son siempre positivos, pues son iguales á $\Sigma w \cdot y^2$ y $\Sigma w x^2$, y las ordenadas están elevadas al cuadrado.

Numerador de H , ó sea $\Sigma M_n \cdot w_y = -\Sigma_n \frac{-l}{2} w_y (a - x)$ para $P = 1$.—Para determinarlo se ha dibujado el polígono de fuerzas 4 con la distancia polar antes fijada h_y , y en el polígono funicular b están representados los momentos de todos los pesos w_y , con relación á la fuerza $P = 1$, por la ordenada b que se encuentra en la prolongación de P multiplicada por h_y .

Según esto, el empuje horizontal H será:

$$H = \frac{b \cdot h_y}{n_y \cdot h_y + \Sigma \frac{S}{F}} = \frac{b}{n_y + \frac{1}{h_y} \Sigma \frac{S}{F}}$$

Si se añade, por lo tanto, al trayecto n_y el segmento

$$\frac{1}{h_y} \Sigma \frac{S}{F}$$

que representa la influencia de la deformación por las fuerzas normales, se obtendrá el denominador de la última expresión hallado de H , ó también se puede considerar el polígono funicular b últimamente dibujado como línea de influencia del empuje horizontal H , siendo representada la mitad de escala de las ordenadas b para la distancia

$$n_y + \frac{1}{h_y} \Sigma \frac{S}{F}$$

considerando ambos términos como longitudes.

Numerador de V , ó sea $\Sigma M_n \cdot w_x = -\Sigma_n \frac{-l}{2} w_x (a - x)$ para $P = 1$. Análogamente á lo dicho para H del polígono funicular c , se deducen los momentos de todos los pesos w_x con relación á la línea de fuerzas P que son iguales á las ordenadas b en prolongación de aquélla multiplicada por h_x ; según esto

$$V = \frac{b \cdot h_x}{n_x \cdot h_x} = \frac{b}{n_x}$$

ó también, como antes, puede considerarse el polígono funicular dibujado como línea de influencia para V , siendo la unidad de escala de la ordenada b el segmento n_x .

Numerador de M , ó sea $-\Sigma M_n \cdot w = +\Sigma_n \frac{-l}{2} w (a - x)$.—Para determinarlo se ha dibujado en la figura 18 el polígono de fuerzas 5 y el funicular d . La suma de los momentos estáticos de todos los pesos w á la derecha del punto de acción de la fuerza con relación á la línea acción de esta es igual á la ordenada b comprendida entre los dos lados del polígono funicular multiplicada por la distancia polar h .

Si hacemos $h = \Sigma w$

$$M = \frac{b \cdot \Sigma w}{\Sigma w} = b$$

esto es, que las ordenadas b medidas como longitudes representan directamente las líneas de influencia del momento M para la carga $P = 1$. En el arranque izquierdo del arco resulta

$$M = \frac{l}{2}$$

(Continuará.)