

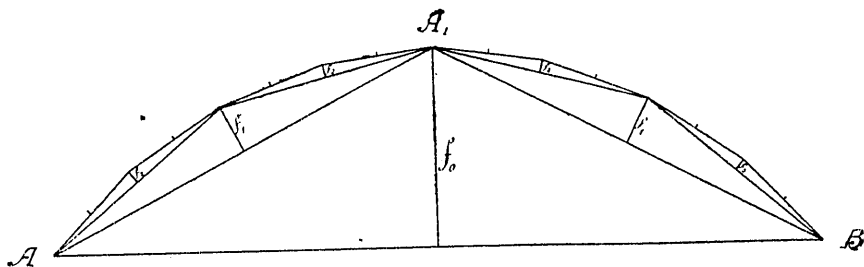
Sobre algunas funciones continuas con infinitas singularidades en el menor intervalo ⁽¹⁾

(CONTINUACIÓN)

II

El otro ejemplo que tratábamos de presentar es el de una construcción aproximada muy usada en la práctica y que conduciría, rigurosamente aplicada, á una curva con infinitas singularidades en el menor intervalo; la construcción es la que se deduce de la llamada *regla del cuarto*. Para trazar sobre el terreno curvas circulares de gran radio y no mucha longitud, suelen darse los dos puntos extremos, que reciben los nombres impropios de *tangente de entrada* y *tangente de salida*, y el punto medio de la curva. De este modo, quedan inmediatamente determinadas la cuerda y la flecha del arco.

A partir de estos datos se intercalan nuevos puntos, procediendo del modo siguiente: se une el punto medio con los extremos y se tienen así las cuerdas de los arcos mitades; en la mitad

Fig. 1.^a

de estas cuerdas se elevan perpendiculares, sobre las cuales se toman longitudes iguales á la cuarta parte de la flecha del arco primitivo; los puntos determinados de este modo son aproximadamente los que, con los tres dados, dividirían el arco en cuatro partes iguales. Sobre cada una de estas partes y las que sucesivamente se obtuvieran, se podría proceder igualmente, dividiendo siempre por 4 la flecha del arco doble y determinando de este modo puntos cada vez más numerosos de la curva.

La justificación de la regla es muy sencilla. Sean f y $2a$ la flecha y la cuerda del arco, y 2α el ángulo en el centro. Se tendrá, para la flecha del arco mitad, la expresión

$$\frac{a \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2}}{2 \cos \alpha},$$

la cual, si α es muy pequeño, puede sustituirse prácticamente por

$$\frac{a \alpha}{4},$$

y como además

$$f = a \operatorname{tang} \alpha,$$

y, en la misma hipótesis, podrá sustituirse por $a \alpha$, se tendrá en definitiva aproximadamente

$$\frac{a \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2}}{2 \cos \alpha} = \frac{f}{4},$$

y con tanta mayor aproximación cuanto más pequeño sea f con relación á a .

Siendo el trazado aproximado, claro es que la línea á que se llegue aplicándole no puede ser un arco de círculo, pero si tratáramos de representar por una ecuación la línea de referencia, fácilmente nos percibiríamos de que tal ecuación no podría ser expresada por funciones analíticas. En efecto, por la misma naturaleza de la construcción, la línea en tal caso debería ser simétrica con relación á su normal, por lo menos para un conjunto de puntos infinito y denso y en una extensión limitada, pero finita, á uno y otro lado de cada uno de esos puntos. Se seguiría de aquí que, para todos ellos, la derivada del radio de curvatura, con relación á la longitud de la curva, sería nula. El radio de curvatura sería, pues, constante, y la curva una circunferencia, lo que hemos visto ya que es imposible.

Lo que ocurre es que el eje de simetría no es normal á la curva, la cual tiene dos tangentes en cada uno de los puntos de la serie enumerable que se deduce inmediatamente de la definición. La tangente no es única sino en los puntos límites que acaban de establecer la continuidad de la curva.

La existencia de tangente, simple ó doble, es fácil de demostrar para todos los casos.

Bastará comprobarla para uno de los puntos extremos, y para

ello estudiemos el ángulo que con la cuerda primitiva forman las distintas secantes que unen dicho extremo con el más próximo de los puntos sucesivamente intercalados. Ese ángulo vendrá expresado por las sumas parciales de la serie

$$\begin{aligned} 6) \quad \alpha &= \operatorname{arc} \operatorname{tang} \frac{f}{a} + \operatorname{arc} \operatorname{tang} \frac{f}{2 \sqrt{a^2 + f^2}} + \\ &+ \operatorname{arc} \operatorname{tang} \frac{f}{4 \sqrt{a^2 + f^2 + \frac{f^2}{4}}} + \dots \\ &\dots + \operatorname{arc} \operatorname{tang} \frac{f}{2^k \sqrt{a^2 + f^2 + \dots + \frac{f^2}{4^{k-1}}}} + \dots, \end{aligned}$$

la cual es, evidentemente, convergente porque la relación de un término al anterior tiene por límite $\frac{1}{2}$. En el límite será, pues, el ángulo perfectamente determinado α el que forme la tangente con la cuerda.

Este ángulo es un poco inferior al que formaría la tangente á la circunferencia que pasa por los tres puntos, y que sería igual á

$$2 \operatorname{arc} \operatorname{tang} \frac{f}{a};$$

los ángulos de las dos tangentes que existen en cada punto serán, pues, salientes y la punta convexa.

También se ve fácilmente que la diferencia entre los dos ángulos es tanto más pequeña cuanto menor sea f con relación á a , y que se anula con esta relación.

(1) Véase el número anterior.

Del conocido desarrollo

$$\operatorname{arc tang} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots,$$

convergente para x no superior á la unidad se deduce el nuevo desarrollo también convergente para x y ε menores que uno

$$\operatorname{arc tang} x(1+\varepsilon)^{-\frac{1}{2}} = x(1+\varepsilon)^{-\frac{1}{2}} - \frac{x^3}{3}(1+\varepsilon)^{-\frac{3}{2}} + \dots$$

Si x y ε son menores que la unidad, los términos del segundo miembro son decrecientes en valor absoluto, y el segundo representará un límite del error que se cometa cuando se tome el primero por valor de la serie. Este error sería *a fortiori* menor que x^3 .

También se tendría

$$\begin{aligned} x(1+\varepsilon)^{-\frac{1}{2}} &= x \left(1 - \frac{\varepsilon}{2} + \frac{1 \cdot 3}{1 \cdot 2} \cdot \frac{\varepsilon^2}{2^2} - \dots \right) = \\ &= x \left(1 - \frac{\varepsilon}{2} \right) + R, \end{aligned}$$

y, como anteriormente, se puede demostrar que

$$R < x\varepsilon^2,$$

luego, en definitiva, se tendrá

$$\operatorname{arc tang} x(1+\varepsilon)^{-\frac{1}{2}} = x \left(1 - \frac{\varepsilon}{2} \right)$$

con un error menor que $x\varepsilon^2$ ó que $x^3(1)$.

Esto supuesto, el término general del desarrollo 6) será

$$\begin{aligned} \operatorname{arc tang} \frac{f}{2^k \sqrt{a^2 + f^2 + \frac{f^2}{4} + \dots + \frac{f^2}{4^{k-1}}}} &= \\ = \operatorname{arc tang} \frac{f}{2^k a} \left[1 + \frac{f^2}{a^2} \left(1 + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{4^{k-1}} \right) \right]^{-\frac{1}{2}} &= \\ = \frac{f}{2^k a} \left[1 - \frac{f^2}{2a^2} \left(\frac{4}{3} - \frac{1}{3 \cdot 4^{k-1}} \right) \right] \pm \delta & \\ \delta < \frac{4}{3} \cdot \frac{f^3}{2^k \cdot a^3}. \end{aligned}$$

Sustituyendo en el mismo desarrollo 6) los distintos términos por sus valores aproximados que acabamos de determinar, tendremos, pues,

$$\alpha = \frac{2f}{a} - \frac{f^3}{a^3} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \left(\frac{4}{3} - \frac{1}{3 \cdot 4^{k-1}} \right)$$

con un error menor que

$$\frac{8}{3} \cdot \frac{f^3}{a^3}$$

y como

$$2 \operatorname{arc tang} \frac{f}{a} = \frac{2f}{a} - \frac{2f^3}{3a^3} + \dots$$

se deduce inmediatamente que

$$\alpha = 2 \operatorname{arc tang} \frac{f}{a}$$

con un error á lo sumo del orden del cubo de $\frac{f}{a}$.

(1) Los dos errores no podrán sumarse, porque son evidentemente de signos contrarios.

Se ve, pues, que en el límite las irregularidades desaparecen y que la línea está, por consiguiente, formada por un conjunto de arcos de círculo infinitamente pequeños, cuyos centros no coinciden, y, lo que es más, forman un conjunto discontinuo. La discontinuidad de las tangentes no es óbice para la existencia de círculo osculador; éste, sin embargo, es doble donde es doble la tangente.

Todos estos círculos osculadores son, sin embargo, iguales. Para determinar su radio bastará hallar el límite de la relación entre el cuadrado de la semicuerda y el doble de la flecha, y se tendrá así, después de suprimir factores comunes

$$\rho = \frac{a^2 + \frac{4f^2}{3}}{2f} = \frac{a^2 + f^2}{2f} + \frac{f}{6} = R + \frac{f}{6},$$

fórmulas en las que ρ representa el radio que buscábamos y R el de la circunferencia que pasa por los tres puntos primitivos. La diferencia entre los dos radios disminuye, pues, indefinidamente con f .

La línea es rectificable. La aplicación reiterada del teorema de Pitágoras conduce á la fórmula sencilla

$$7) \quad L = 2 \sqrt{a^2 + \frac{4f^2}{3}}$$

Esta longitud es algo inferior á la del arco de círculo correspondiente. Así debía resultar, porque la línea es convexa y queda envuelta por el arco. Sin embargo, cuando la relación de f á a es muy pequeña, la diferencia entre las dos longitudes es completamente despreciable en la práctica. Para tener una idea del grado de aproximación, representemos por $2w$ la longitud del arco de círculo medido con el radio, la longitud dada por la fórmula 7) se reduciría entonces á

$$\sqrt{\sin^2 w + \frac{4(1 - \cos w)^2}{3}} = \sqrt{1 + \frac{4 - 8 \cos w + \cos^2 w}{3}}$$

y para w suficientemente pequeños, y despreciando infinitamente pequeños de orden igual ó superior al séptimo, esta expresión sería equivalente á

$$w \left(1 - \frac{w^4}{180} \right),$$

lo que se demuestra por desarrollos fáciles, aunque un poco largos, que omitimos en gracias á la brevedad.

El área comprendida entre la curva y la cuerda está dada por la serie

$$\begin{aligned} S &= af + \frac{f}{4} \sqrt{a^2 + f^2} + \frac{f}{4^2} \sqrt{a^2 + f^2 + \frac{f^3}{4}} + \dots \\ &+ \frac{f}{4^k} \sqrt{a^2 + f^2 \left(\frac{4}{3} - \frac{1}{3 \cdot 4^{k-1}} \right)} + \dots, \end{aligned}$$

que se reduce para f muy pequeño, y despreciando términos de orden superior al de f^3 , á

$$\frac{4af}{3} + \frac{8f^3}{45a}.$$

Con el mismo grado de aproximación, el área del segmento circular correspondiente sería

$$2 \left(\frac{a^2 + f^2}{2f} \right)^2 \operatorname{arc tang} \frac{f}{a} - a \frac{a^2 - f^2}{2f} = \frac{4af}{3} + \frac{4f^3}{15a}.$$

Es un poco mayor, como debía ocurrir, pero la diferencia es del orden de f^3 y aproximadamente igual á

$$\frac{4f^3}{45a}.$$

Cuando la relación de f á a no es tan pequeña como hemos supuesto al calcular las fórmulas aproximadas que acabamos de determinar, la curva se aparta ya bastante del círculo. Si se hace en el caso extremo

$$a = 0 \quad f = D$$

se deducirá

$$L = \frac{4D}{\sqrt{3}}$$

$$s = \frac{D^2}{4} \left(1 + \frac{1}{4} \sqrt{\frac{5}{4}} + \frac{1}{4^2} \sqrt{\frac{21}{4^2}} + \dots + \frac{1}{4^k} \sqrt{\frac{4^{k+1}-1}{3 \cdot 4^k}} + \dots \right) = 0,3436 \dots D^2,$$

valores que se separan ya considerablemente de la longitud de la circunferencia y del área del círculo.

Aunque la línea que estudiamos no es analítica, se podría definir, para cada uno de los puntos definidos, una curva analítica que tenga común con ella un conjunto infinito de puntos en la proximidad del dado.

Al efecto, podemos limitarnos á uno de los extremos, pues otro punto cualquiera podría ser siempre considerado como el extremo de un arco más pequeño, al que se podría aplicar las mismas consideraciones.

Representemos, pues, por r_k y θ_k las coordenadas polares, con relación al punto y á la cuerda tomadas como polo y como eje del extremo del arco de longitud igual á

$$\frac{L}{2^k}.$$

Hagamos para abreviar

$$b_0 = a, b_1 = 2 \sqrt{a^2 + f^2}, \dots$$

$$b_k = 2^k \sqrt{a^2 + f^2 \left(\frac{4}{3} - \frac{1}{3 \cdot 4^{k-1}} \right)};$$

se deduce

$$r_k = \frac{2 b_k}{4^k}$$

$$\theta_k = \arctan \frac{f}{b_0} + \arctan \frac{f}{b_1} + \dots + \arctan$$

y si entre estas dos ecuaciones elimináramos á k , se tendría una relación entre r y θ que sería la representativa de la curva buscada. Para ello será preciso que tanto r_k como θ_k , que hasta ahora sólo están definidos para valores enteros de k , se interpreten también para valores fraccionarios é incommensurables del mismo parámetro y que la interpretación sea tal que una y otra resulten funciones analíticas en k .

Para r_k la cosa no ofrece dificultades; en cuanto á θ_k , podrá aplicarse la conocida fórmula de Eule

$$8) \quad \sum_0^k f(x) = \int_0^k f(x) dx - \frac{1}{2} \left[f(x) \right]_0^k + \frac{B_2}{2!} \left[f'(x) \right]_0^k - \frac{B_4}{4!} \left[f''(x) \right]_0^k + \dots$$

La función $f(x)$ sería en este caso

$$f(x) = \arctan \frac{f}{2^x \sqrt{a^2 + f^2 \left(\frac{4}{3} - \frac{1}{3 \cdot 4^{x-1}} \right)}}.$$

Definida así la función continua en k , que toma los valores θ_k , habría que sustituir en ella, en vez de k , su valor deducido de la ecuación

$$r_k = \frac{1}{2^{k-1}} \sqrt{a^2 + f^2 \left(\frac{4}{3} - \frac{4}{3 \cdot 4^k} \right)}$$

ó sea

$$9) k = \frac{\log \frac{2}{3} \left[3a^2 + 4f^2 \pm \sqrt{(3a^2 + 4f^2)^2 - 48f^2 r_k^2} \right] - 2 \log r_k}{\log 4}$$

Tendríamos así una expresión de la forma

$$0 = \phi(r^2),$$

de la que inmediatamente se deduce que el origen es un centro de la curva.

La relación 9) demuestra también que k se hace imaginario para

$$r > \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{3a^2 + 4f^2}{2f}.$$

Es este límite el que hace máximo á r_k ó iguales las dos raíces de la ecuación cuyos logaritmos entran en la expresión de k . Como r entra por su cuadrado, el valor mínimo que habrá que considerar en el cálculo de θ será $r = 0$ y, en este caso, las raíces de la ecuación en 4^k son

$$4^k = \infty \quad \text{y} \quad 4^k = \frac{4f^2}{3a^2 + 4f^2}.$$

Para el primero de estos valores, k se hace también infinito y, como en la expresión 8), en nuestro caso, tanto $f(x)$ como sus derivadas son infinitamente decrecientes, se tendrá

$$0_\infty = \int_0^\infty f(x) dx + \frac{1}{2} f(0) - \frac{B_2}{2!} f'(0) + \frac{B_4}{4!} f''(0) + \dots = \alpha.$$

Para el segundo, que es evidentemente menor que la unidad, k será negativo y, como á $k = 0$ corresponde $\theta = 0$, es claro que θ deberá pasar por valores negativos. Sólo se exceptuará el caso en que a sea nulo, para el cual k y θ serán iguales á cero, y la segunda tangente del punto doble se confundirá con la cuerda.

De la discusión de las fórmulas resulta, pues, que la curva analítica tiene figura de lazo con un punto doble, por el cual pasa la cuerda primitivamente dada, la cual corta en general á la curva en otros dos puntos. Habrá que observar, sin embargo, que el punto doble no es propiamente un punto analítico; si así fuera, el radio de curvatura debería para él ser infinito. El radio de curvatura, sin embargo, es en este punto, por lo menos para una de las ramas, igual á ρ . Vemos, pues, que la curva pierde su regularidad analítica precisamente en el punto en el que la curva irregular á quien oscula adquiere esa regularidad para el intervalo infinitamente pequeño.

Huelga decir que á cada punto definido en el trazado aproximado corresponde una curva analítica distinta.

Generalizando la construcción de la línea singular cuyo estudio sumario acabamos de hacer, pueden definirse otras líneas en las cuales la relación de dos flechas sucesivas fuera un número cualquiera, r , en vez de ser $\frac{1}{4}$. Estudiemos primero el caso en el que

$$r < \frac{1}{4}.$$

Se vería sin dificultad, por los mismos métodos anteriormente empleados, que la tangente es doble en cada uno de los puntos definidos y que los ángulos son todos salientes y la curva convexa. Su longitud total vendrá dada por

$$L = 2 \sqrt{a^2 + \frac{1^2}{1-4r^2}}.$$

No existirá ya propiamente círculo osculador. Su radio habría de ser el límite para $n = \infty$ de la expresión

$$\frac{L^2}{4^{n+1} \cdot 2^n r^n f},$$

que crece indefinidamente. La curvatura, pues, es nula, pero se podría apreciar un ángulo de contingencia aplicando en vez del círculo una curva de la forma

$$10) \quad \rho = 2b \operatorname{sen}^k(\alpha - \omega),$$

que degeneraría en círculo para $k = 1$.

En las proximidades del límite se tiene, en efecto, despreciando infinitamente pequeños de orden cada vez más elevado

$$\rho = \frac{L}{2^{k+1}} \quad \alpha - \omega = \frac{(2r)^k \cdot 2f}{(1-2r)L},$$

siendo ρ y ω las coordenadas polares referidas al extremo de la línea como polo y á la cuerda primitiva como eje polar, y α el ángulo que forma con el eje la tangente en el origen.

Dedúcese de aquí

$$\rho(\alpha - \omega) = \frac{f}{1-2r} \left(\frac{L}{2\rho} \right)^{\frac{\log r}{\log 2}},$$

y después de fáciles transformaciones de cálculo

$$\rho = \left[\frac{L}{2} \left(\frac{1-2r}{f} \right)^{-\frac{\log 2}{\log r}} \right]^{\frac{\log r}{\log 2 + \log 2}} \cdot (\alpha - \omega)^{-\frac{\log 2}{\log 2 + \log r}}$$

ó haciendo

$$k = -\frac{\log 2}{\log 2 + \log r},$$

$$\rho = \left(\frac{L}{2} \right)^{1+k} \cdot \left(\frac{1-2r}{f} \right)^k (\alpha - \omega)^k;$$

y sustituyendo $\alpha - \omega$ por $\operatorname{sen}(\alpha - \omega)$, lo que es permitido en el límite, se llegará al fin á la ecuación 10) con sólo hacer

$$b = \frac{1}{2} \left(\frac{L}{2} \right)^{1+k} \cdot \left(\frac{1-2r}{f} \right)^k.$$

Además de estas curvas osculadoras, podrían también determinarse, como en el caso anterior, curvas de contacto más íntimo que tuvieran con la línea estudiada un número infinito de puntos comunes, en el menor intervalo, conteniendo al punto de contacto.

Consideremos ahora el caso en que

$$\frac{1}{2} > r > \frac{1}{4}$$

La tangente sigue siendo doble, pero aquí los ángulos son entrantes, y si r es suficientemente grande, las dos tangentes pueden llegar á cruzarse. Se tendría entonces una línea con lazos; pero estos lazos serían siempre en número finito, en tanto que r

quede incluido dentro del intervalo considerado. La longitud de la línea vendrá expresada por igual fórmula que en el caso anterior, y las curvas osculadoras tendrán ecuaciones de la misma forma 10), con la única diferencia de que k será en este caso mayor que 1.

Si

$$r = \frac{1}{2}$$

el exponente k se hace infinito, la curva osculadora se reduce al origen, la longitud de la línea se hace también infinita, y los puntos definidos son todos puntos de lazo, desapareciendo la tangente, aunque conservándose la continuidad de la curva. Si quisiéramos estudiarla en la proximidad infinitesimal de uno de sus puntos, habría que partir de las ecuaciones

$$\rho_k = \frac{\sqrt{a^2 + kf^2}}{2^k}$$

$$\theta_k = \sum_0^k \operatorname{arc tang} \frac{f}{\sqrt{a^2 + kf^2}},$$

entre las cuales debería eliminarse á k ; pero se podría sustituir estas ecuaciones por otras más sencillas, porque para k suficientemente grande, se tendría, despreciando infinitamente pequeños de orden superior,

$$11) \quad \begin{cases} \rho = \frac{f\sqrt{k}}{2^k} \\ \theta = \Theta + 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{k}}, \end{cases}$$

donde Θ representa una constante dada por la expresión

$$\Theta = \sum_1^\infty \left(\operatorname{arc tang} \frac{f}{\sqrt{a^2 + f^2}} - \frac{1}{\sqrt{k}} \right).$$

Esta última serie es, en efecto, convergente, porque sus términos acaban por ser del orden de

$$\frac{1}{k\sqrt{k}}.$$

En cambio, la serie que representa á Θ es conocidamente divergente, y, por lo tanto, el radio rector evanescente gira sin límite alrededor del origen, describiendo su extremo una espiral asintótica con él, y cuya orientación quedaría indeterminada, si se tratara de hacerla osculadora. En los puntos intermedios, esta espiral no representaría sino una de las ramas del lazo, pues la otra rama sería otra espiral igual, que se desarrollaría en sentido inverso continuando el trazado.

Prescindiendo de la orientación, las ecuaciones 11) podrán reducirse á

$$\rho = \frac{f\sqrt{k}}{2^k}, \quad \theta = 2\sqrt{k}$$

de donde

$$\rho = \frac{f\theta}{2^{1+\frac{\theta^2}{4}}},$$

ecuación de la espiral que define la naturaleza de la línea en el punto asintótico.

PEDRO M. GONZÁLEZ QUIJANO.

(Continuará.)