

C) ACIDOS.

el número

$$u_2 = u_1 + r_1 u_0$$

9. ACIDOS.—La determinación de los ácidos por el procedimiento de la American Railway Engineering Association, ó por otros muy empleados, conduce á resultados erróneos, razón por

que designaremos con la misma letra, por ser, en uno y otro caso, el primer denominador que viene á sustituir á uno de los primitivos en el cálculo sucesivo de los denominadores correspondientes á las crecientes aproximaciones.

Las dos fórmulas se reducirían á una misma, si conviniéramos en hacer para este caso

$$u_0 = n \quad u_1 = q$$

Esto, supuesto á la división inmediata, el denominador correspondiente sería $2u_2 - u_1$; pero, según que r_2 pertenezca á una ú otra clase, se tendrá para denominador del valor aproximado de la función, al cabo de las r_2 segundas divisiones,

$$u_3 = r_2 u_2 + (u_2 - u_1) \quad \text{ó} \quad u_3 = u_2 + r_2 (u_2 - u_1)$$

Si convenimos en que, en uno ú otro caso, se tenga, respectivamente,

$$u'_2 = u_2, \quad u'_1 = u_2 - u_1 \quad \text{ó} \quad u'_2 = u_2 - u_1, \quad u'_1 = u_2,$$

las dos fórmulas se podrán reducir á la fórmula única

$$u_3 = r_2 u'_2 + u'_1,$$

y los r_3 siguientes denominadores podrán calcularse en función de u_3 y de $u_3 - u'_2$, que representados, según la clase de r por $u''_3 = u_3$, $u''_2 = u_3 - u'_2$ ó por $u''_3 = u_3 - u'_2$, $u''_2 = u_3$, darían para el último de dichos denominadores la fórmula

$$u_4 = r_3 u''_3 + u''_2$$

Procediendo del mismo modo en lo sucesivo, se tendrá en general para el denominador que ocupará el lugar $r_1 + r_2 + r_3 + \dots + r_s$ después de los dos primitivos, la expresión

$$1) \quad u_{s+1} = r_s u_s^{(s-1)} + u_{s-1}^{(s-1)}$$

con

$$u_s^{(s-1)} = u_s, \quad u_{s-1}^{(s-1)} = u_s - u_{s-1}^{(s-2)}$$

ó

$$u_s^{(s-1)} = u_s - u_{s-1}^{(s-2)}, \quad u_{s-1}^{(s-1)} = u_s,$$

según que r_s pertenezca á la primera ó á la segunda clase. Los denominadores intermedios entre u_s y u_{s-1} se calcularían substituyendo en la fórmula 1), en vez de r_s los valores

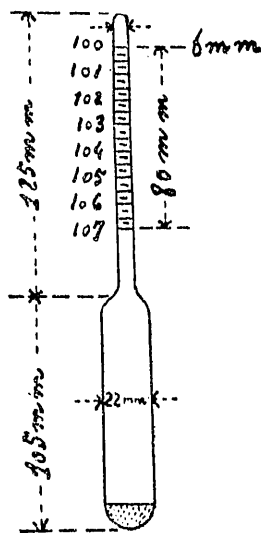
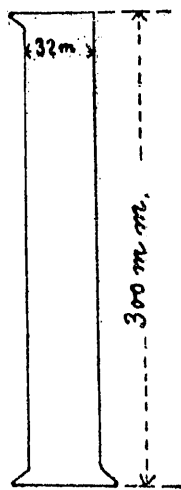
$$1, 2, 3, \dots, r_s$$

y podrán representarse por la notación

$$u_{s+1}, u_{s+2}, u_{s+3}, \dots, u_{s+r_s} = u_{s+1}.$$

Esto supuesto, $f(x)$ quedará siempre comprendida en un intervalo, en el cual, dado el carácter creciente de la función, la oscilación será igual á la diferencia entre los valores extremos, al mismo tiempo que esta diferencia, en virtud de una de las propiedades enunciadas más atrás, será igual á la unidad dividida por el producto de los denominadores extremos. La relación entre este producto y el intervalo que contiene á x será, si tiende hacia un límite, la derivada de $f(x)$.

Sin entrar en el estudio del caso general bastará el examen de algunos casos particulares para comprobar la existencia de derivadas no infinitas. Observemos en primer lugar que, si todos los valores r pertenecen á la primera clase, las ecuaciones

Fig. 3.^aFig. 4.^a

la cual se aconseja que se continúe haciendo estudios para encontrar un método aceptable.

D) NAFTALINA.

10. NAFTALINA.—El procedimiento de la American Railway Engineering Association para determinar la naftalina, no se emplea mucho y es inexacto. Por regla general, es suficiente la observación directa de los productos de la destilación á la temperatura del ambiente para tener idea de la cantidad de naftalina que contiene la creosota.

Ω

Sobre algunas funciones continuas con infinitas singularidades en el menor intervalo ⁽¹⁾

(CONTINUACIÓN)

Estudiemos ahora los valores sucesivos de la función para los valores aproximados de la variable, y fijémonos con especialidad en los denominadores de las fracciones correspondientes. Los numeradores son menos interesantes y podrían en todo caso ser tratados del mismo modo. Hagamos, para generalidad de las fórmulas

$$u_0 = q \quad u_1 = n;$$

al cabo de las r , primeras divisiones, se tendrá para el denominador irreducible de la expresión

$$f\left(a + \frac{1}{2^k + r_1}\right)$$

el número u_2 dado por la igualdad

$$u_2 = r_1 u_1 + u_0$$

Si x perteneciera originariamente á un segundo intervalo, se tendría para denominador de la expresión

$$f\left(b - \frac{1}{2^k + r_1}\right)$$

(1) Véase el número 2112.

determinantes de las u se reducen ya, sin ambigüedades, á la forma siguiente:

$$\begin{aligned} u_2 &= r_1 u_1 + u_0 \\ u_3 &= r_2 u_2 + u_1 \\ u_4 &= r_3 u_3 + u_2 \\ &\dots\dots\dots \\ u_{s+1} &= r_s u_s + u_{s-1} \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

y si, además, suponemos iguales á los r , los u formarán una serie recurrente, cuya relación de concurrencia será

$$u_{s+1} = r_s u_s + u_{s-1}$$

con lo cual se tendrá

$$u_s = A w_1^s + B w_2^s$$

siendo w_1 y w_2 las raíces de la ecuación de segundo grado

$$3) \quad z^2 - rz - 1 = 0$$

y A y B dos constantes que quedarían determinadas por los valores iniciales.

Al mismo tiempo se tendría

$$u_{s+1} = A (w_1 + 1) w_1^{s-1} + B (w_2 + 1) w_2^{s-1}$$

y el producto de los dos denominadores consecutivos será

$$4) \quad u_s \cdot u_{s+1} = A^2 (w_1 + 1) w_1^{2s-1} + AB (w_1 + 2 w_1 w_2 + w_2) w_1^{s-1} w_2^{s-2} + B^2 (w_2 + 1) w_2^{2s-1},$$

mientras que el intervalo correspondiente de la variable será igual á $1 : 2^{k+rs+1}$.

Cuando s crece indefinidamente, si $w_1 > w_2$, los dos últimos términos del segundo miembro de la ecuación 4) son infinitamente pequeños con relación al primero, y la relación cuyo límite habría que investigar sería en resumen

$$\frac{2^{k+rs+1}}{A^2 (w_1 + 1) w_1^{2s-1}} \sim \frac{2^{k+1} w_1}{A^2 (w_1 + 1)} \left(\frac{2^r}{w_1^2} \right)^s$$

Esta relación tenderá hacia cero ó hacia infinito, según que

$$2^r < w_1^2 = \frac{2 + r(r + \sqrt{4 + r^2})}{2} \quad \text{ó} \quad 2^r > w_1^2$$

ó bien según que r sea ó no menor que 3 (1).

Vemos, pues, que si la derivada es infinita en el intervalo (0, 1) para infinitos valores de la variable, hay también otros valores en número infinito para los cuales la derivada es nula. La demostración de Duhamel subsiste en lo que tiene de esencial, pero sus conclusiones abusivas quedan desmentidas.

Parando la atención en las fórmulas 2) se observa que, si uno de los r_1, r_2 , por ejemplo, se anula, el valor de u_4 tendría una expresión análoga á la que hubiera de tener u_3 si r_2 , sin ser nulo, perteneciera á la segunda clase. Síguese de aquí que podrían adoptarse las ecuaciones 2) para el caso general, sin más que intercalar en la serie de los r tantos ceros cuantos sean precisos, para tener en cuenta las diferencias de clase que se produzcan entre los r sucesivos no nulos.

(1) Cuando $r = 1$ se deduce fácilmente de las consideraciones anteriores la fórmula

$$f \left(\frac{2^n + k - \frac{4}{5} (2^n - (-1)^n)}{2^{r+n-1}} \right) = \frac{p_n}{q_n}$$

con

$$p_n = p_{n-1} + p_{n-2} \quad \text{y} \quad q_n = q_{n-1} + q_{n-2}$$

dada por el Sr. Escott en el *Intermediario*, en su respuesta de Septiembre de 1909 (pág. 212).

De las consideraciones anteriores se deduce también una consecuencia importante. Supongamos escrito el valor de x en el sistema binario de numeración. Sean n_1 el número de ceros que siguen inmediatamente á la coma (podrá ocurrir que $n_1 = 0$), n_2 el de unos que siguen inmediatamente después, n_3 el de los ceros que siguen á los primeros unos, y así sucesivamente. El número x , podrá representarse sin ambigüedad por la serie

$$n_1, n_2, n_3, \dots$$

Pues bien $f(x)$ viene dado en todos los casos por la fracción continua

$$f(x) = \frac{1}{1 + n_1 + \frac{1}{n_2 + \frac{1}{n_3 + \frac{1}{n_4 + \dots}}}}$$

En gracia á la brevedad, omitimos la demostración, que podrá ser hecha fácilmente por el lector.

Consecuencias inmediatas de esta expresión son:

1.º Que sólo para los valores de x de la forma $h : 2^k$ es conmensurable $f(x)$.

2.º Que para los restantes valores racionales de x , $f(x)$ es incommensurable algébrico de segundo orden, y

3.º Que para x incommensurable, $f(x)$ es también incommensurable trascendente ó algébrico de orden superior al segundo.

Todas las mencionadas propiedades de la función en estudio demuestran claramente que no se trata de una función analítica, pero pueden, sin embargo, en la proximidad de determinados valores de la variable, determinarse funciones analíticas que tengan con ella una infinidad de valores comunes. Sean, en efecto, como más atrás

$$a = \frac{h}{2^k} \quad \text{y} \quad b = \frac{h+1}{2^k}$$

dos valores de la variable correspondientes á los valores

$$\frac{m}{n} \quad \text{y} \quad \frac{p}{q}$$

de la función, siendo, por supuesto, estas dos últimas fracciones irreducibles.

Para todos los valores de la variable de la forma

$$x = a + \frac{1}{2^{k+\lambda}},$$

en la que λ representa un entero cualquiera, se tendrá

$$f(x) = \frac{p + \lambda m}{q + \lambda n}$$

pero de la primera de estas expresiones se deduce

$$-\lambda = k + \frac{\log(x-a)}{\log 2}$$

y, por consiguiente, para todos los valores de x de la forma expresada, la función podrá calcularse por la fórmula

$$5) \quad f(x) = \varphi(x) = \frac{(p - km) \log 2 - m \log(x-a)}{(q - kn) \log 2 - n \log(x-a)}$$

Las funciones representadas por esta fórmula para los distintos valores de a y de k (m, n, p y q son funciones de a y de k , las cuales deben también satisfacer ciertas limitaciones fácilmente determinables con lo que antecede), presentan caracteres comunes que conviene conocer. Para $x = a$ la función, de forma

indeterminada, tiene como valor límite $\frac{m}{n}$. La derivada para este valor es infinita y la función, siempre creciente, se hace infinita para

$$w = a + 2^{\frac{q - kn}{n}},$$

cambia de signo al pasar por infinito, pero sigue siendo creciente y tiende de nuevo hacia $\frac{m}{n}$ cuando w crece indefinidamente. Para valores de w menores que a , $w - a$ se hace negativa, y su logaritmo imaginario tomaría los infinitos valores comprendidos en la fórmula

$$\log(w - a) = \log(a - w) + (2k + 1)\pi\sqrt{-1}$$

en la que k representaría un número entero cualquiera. No es posible aprovechar la arbitrariedad de k para hacer real la fracción que expresa a $\phi(w)$, ni aun para valores particulares de m, n, p y q . Si multiplicamos, en efecto, el numerador por la conjugada del denominador é igualamos á cero la parte imaginaria del producto, esta parte imaginaria, que consta, á su vez, de una parte constante y de otra variable con $\log(a - w)$, da lugar á dos ecuaciones, una de ellas idéntica, pero reducible la otra á

$$(p - km)n = (q - kn)m$$

ó, lo que es lo mismo, á

$$pm - mq = 0,$$

cuando se sabe que se tiene

$$pm - mq = 1.$$

La curva real representativa de la función analítica tiene, pues, un punto de parada para $w = a$, es decir, precisamente para el punto en que tiene un contacto de orden infinito con la línea que representaría la función singular objeto de este estudio.

En el caso particular en que se tenga

$$k = m = 0 \quad n = p = q = 1$$

la expresión 5) se reduce á

$$\phi(x) = \frac{\log 2}{\log 2 - \log x},$$

la cual es igual á $f(x)$ para los extremos del intervalo $(0, 1)$, en el que dicha función ha quedado definida, y en general para todo número de la forma $1 : 2^k$, siendo k un entero positivo; $\phi(x)$ se hace infinita, fuera ya de ese intervalo, para $x = 2$, y se podrían prolongar hasta este valor las concordancias entre $\phi(x)$ y $f(x)$, generalizando la ley de formación de esta última función, mediante la asignación al valor 2 de la variable de la fracción $\frac{1}{0}$.

Se ve sin dificultad que los valores de la función en los intervalos $(0, 1)$ y $(1, 2)$ están entonces ligados por la relación

$$f(1 - x)f(1 + x) = 1,$$

y como, además, se tiene

$$f(x) + f(1 - x) = 1$$

se deduce

$$f(1 + x) = \frac{1}{f(1 - x)} = \frac{1}{1 - f(x)}$$

lo que reduce la determinación de la función, en todo el intervalo hasta ahora considerado, al cálculo de los valores del intervalo $\left(0, \frac{1}{2}\right)$, al cual podríamos llamar intervalo fundamental.

Todavía podría extenderse la generalización para valores de la variable mayores que 2; $\phi(x)$ se hace entonces negativa y da para las distintas potencias de 2

$$\phi(4) = -1, \phi(8) = -\frac{1}{2}, \dots, \phi(2^k) = -\frac{1}{k-1}, \dots$$

y podrían mantenerse las igualdades para esos valores haciendo

$$f(4) = -\frac{1}{-1}, f(8) = -\frac{1}{-2}, \dots, f(2^k) = -\frac{1}{1-k}, \dots$$

y entonces los valores intermedios de la función podrían reducirse á los del intervalo fundamental mediante la fórmula

$$f[2^k(1+x)] = -f\left(\frac{1}{2^{k-2}} - \frac{x}{2^{k-1}}\right) \quad (0 < x < 1)$$

Para valores negativos de w , la función ϕ no puede servir de punto inmediato de apoyo para la generalización, porque hemos visto ya que se hace imaginaria é infinitiforme. Veamos cómo se distribuyen sus valores. Si suponemos los logaritmos neperianos, lo que podrá siempre hacerse porque la elección de sistema no varía el valor de ϕ , se ve inmediatamente que el denominador se reduce á

$$\log 2 - \log(-w) = \log 2 - \log w + (2k + 1)\pi\sqrt{-1}$$

En la representación geométrica admitida para las imaginarias, estos infinitos valores corresponderán á una serie de puntos situados á distancias iguales á 2π sobre una recta paralela al eje imaginario, que corta al eje de las reales en el punto correspondiente á $\log 2 - \log w$, el cual punto divide en dos partes iguales uno de los intervalos determinados por los infinitos puntos representativos de los valores del denominador.

A cada uno de estos valores corresponde para $\phi(x)$ otro valor, cuya construcción geométrica sería muy sencilla. Bastaría unir el origen con el punto representativo del denominador mediante un radio vector, cuya longitud designaremos para abreviar por ρ , trazar la recta simétrica á ésta con relación al eje real y tomar sobre ella una longitud igual á

$$\frac{\log 2}{\rho}.$$

La teoría de la transformación por radios vectores recíprocos demostraría inmediatamente que los puntos así determinados están sobre una circunferencia, tangente en el origen al eje imaginario y cuyo diámetro es igual á

$$\frac{\log 2}{\log 2 - \log x}$$

Sobre esta circunferencia, los puntos formarían un conjunto infinito con un sólo derivado en el origen. Para todos los valores negativos de x habría, pues, un valor asintótico del eje de las reales, que podría representarse por $\pm 0 \cdot \sqrt{-1}$; pero de aquí no podríamos deducir con lógica la anulación de la función, porque ese valor existe igualmente para x positiva, aunque haya allí otro valor real que aquí falta.

Procede la diferencia de que entonces la recta que contiene los puntos representativos del denominador es cortada por el eje de las reales en uno de los puntos de división, mientras que en el caso actual lo es en la mitad de uno de los intervalos. Allí el diámetro de la circunferencia era en cierto modo *realizado* por un valor efectivo sobre el eje real; aquí es tan sólo una cantidad

ideal que no viene determinada sino por el conjunto de valores. La completa realización en el primer caso determina la magnitud y el signo; en el segundo, es el valor absoluto el único conocido, quedando el signo y aun la dirección indeterminados; pero en los dos casos los valores absolutos son idénticos.

Estas consideraciones y las analogías anteriormente comprobadas inducen á generalizar la función f para los valores negativos de x asignándole un valor absoluto igual al de $f(-x)$; y en tal caso, si no se ha de salir del campo de las cantidades reales, como parece exigirlo el carácter aritmético de la función, sólo faltará escoger el signo. Dar el mismo signo $f(x)$ y á $f(-x)$ no estaría justificado por ninguna asimilación; supondría, además, una identidad que en la función analítica correlativa no existe entre los valores situados á derecha é izquierda del origen; el signo — parece preferible y entonces se tendría

$$f(x) = -f(-x)$$

La función sería entonces creciente en todo intervalo, como lo era ya para los valores positivos de la variable.

Fácilmente se ve, sin embargo, que esta generalización no es la única posible, siempre en toda generalización ocurre lo mismo; es un paso de lo definido á lo indefinido, y en el campo de la posibilidad los caminos son infinitos; pero hay soluciones más ó menos naturales que parecen venir impuestas por un proceso de evolución mental, cuyo valor será ó no confirmado por la futura fecundidad de los supuestos y por la sencillez ó comodidad de las notaciones. Otra generalización podría aceptarse, que tendría la ventaja de abarcar toda la función en una definición única, y es la siguiente: dadas las fracciones originales

$$\frac{-1}{k+1} \quad \text{y} \quad \frac{1}{-k},$$

y asignando la primera al valor -2^{k+1} de la variable y la segunda al valor 2^{k+1} , los valores restantes de la función serían los obtenidos por mediación, en la forma explicada con todo detalle en lo que antecede.

Esta generalización, sin embargo, no diferirá esencialmente de la anterior en lo que se refiere á la sucesión de valores de la función y á la distribución de las derivadas infinitas y nulas, objeto principal de nuestro estudio. Todo se reduciría á un cambio de escala para las variables negativas y á una variación de signo al paso por el valor que hace á la función infinita.

Podría, por último, prescindirse de los valores negativos de la variable, aceptando para ellos el imaginarismo ó la indefinición de la función, limitando el estudio á los valores positivos que son las más interesantes. En esta parte hemos visto que las funciones f y ϕ tienen infinitos valores comunes que corresponden á la fórmula

$$x = \frac{1}{2^r}$$

en la que r es un entero cualquiera positivo ó negativo. Estos valores no son, sin embargo, los únicos y la razón es obvia: para todos estos valores de x , la derivada de $f(x)$ se hace infinita, mientras que la de $\phi(x)$ lo es sólo para $x = 0$ y para $x = 2$; y como f y ϕ son ambas crecientes y continuas, será forzoso que, entre cada dos de los valores definidos haya, por lo menos, uno para el cual vuelvan á igualarse f y ϕ . Esta consideración demuestra una vez más la existencia de valores de x en número infinito para los cuales $f(x)$ no es infinita.

Lo que acabamos de decir respecto á la función ϕ más sencilla es igualmente aplicable á las más complicadas definidas por

la expresión 5), aunque en éstas la comunidad de valores con f no se extiende sino al intervalo (a, b) , pues sólo para

$$\phi(x) = \frac{\log 2}{\log 2 - \log x}$$

van las analogías más adelante, precisamente por haber servido esta función para la generalización aceptada de f .

PEDRO M. GONZÁLEZ QUIJANO.

(Continuará.)

LA LÁMPARA DE PENTANO ⁽¹⁾

III. Reglas generales para el empleo de las lámparas de Pentano.—

2. Preparación de la lámpara.—3. Funcionamiento.

IV. Pentano.—1. Preparación y ensayo.—2. Alteraciones que experimenta y corrección por la densidad.

V. Influencia de las condiciones atmosféricas.—1. Temperatura.—

2. Presión atmosférica.—3. Vapor de agua.—4. Cuadro gráfico.—5. Variaciones de la humedad en los Estados Unidos.

VI. Resumen.

(CONCLUSIÓN)

2. PREPARACIÓN DE LA LÁMPARA.

Al preparar la lámpara para experimentar con ella se observará la situación de la chimenea con relación al mechero, tanto vertical como horizontalmente; la posición de la ventana de mica, la cantidad de pentano en el depósito, la altura, orientación y verticalidad de la lámpara y, por último, su distancia al centro del banco fotométrico ó á cualquier punto bien definido de la escala del mismo. Es muy conveniente, sobre todo al principio, comprobar de una manera directa en la forma que se ha explicado anteriormente la verticalidad y la situación de la lámpara.

Al encender la lámpara habrá en el depósito una cantidad de pentano equivalente al tercio ó á los dos tercios de su capacidad total; la altura del combustible sobre el fondo de aquél nunca será inferior á tres milímetros. Como el pentano es muy volátil é inflamable y más pesado que el aire, resulta muy peligroso el verterle en el depósito cuando la lámpara está encendida; esta operación no se hará nunca, y por la misma razón se prescribirá de una manera terminante que cerca de cualquier llama estén abiertas las vasijas que contienen pentano.

Antes de encender la lámpara se comprobará la situación de la chimenea respecto del mechero con el calibre correspondiente, operación que se repetirá con alguna frecuencia mientras aquélla esté funcionando.

3. FUNCIONAMIENTO DE LA LÁMPARA.

Para encender la lámpara se abre primero la llave del tubo para entrada del pentano en el depósito, se acerca después una cerilla encendida al mechero, y, por último, se abre poco á poco la llave de salida del depósito; cuando la lámpara tiene una llave reguladora cerca del mechero, las dos del depósito se abren por completo antes de encender, cuando no, la segunda de éste se utiliza para regular la llama. Por regla general, desde el momento que se abren las llaves pasa el vapor de pentano al mechero y forma la llama, pero algunas veces es necesario soplar por el tubo de entrada del depósito y otras aspirar por la parte

(1) Véase el número anterior.