

REVISTA DE OBRAS PÚBLICAS

PUBLICACION TECNICA DEL CUERPO DE INGENIEROS DE CAMINOS, CANALES Y PUERTOS

DIRECTOR

D. MANUEL MALUQUER Y SALVADOR

COLABORADORES

LOS INGENIEROS DE CAMINOS, CANALES Y PUERTOS

SE PUBLICA LOS JUEVES

Dirección y Administración: Plaza de Oriente, 6, primero derecha.

Sobre algunas funciones continuas con infinitas singularidades en el menor intervalo ⁽¹⁾

Lo continuo y lo discontinuo constituyen dos dominios distintos en el inmenso campo de las Matemáticas. Éstas, al menos en su forma científica, han debutado por el estudio de lo discontinuo. Ha sido, sin duda, la noción de número entero la que primero se ha precisado, y por eso es ella la que aun hoy aparece la más clara y definida, justificando así la tendencia de la mayor parte de los matemáticos modernos que aspiran á reducir á ese concepto todos los demás.

Pero cuando se ha querido aplicar á la realidad la pura y abstracta investigación científica, el número entero no ha bastado, y no tal vez porque no sean esencialmente discontinuas nuestras sensaciones elementales, sino porque cualquiera que sea la solución de ese problema psicológico, el análisis completo del fenómeno observado exigiría un tal número de sutiles distinciones que harían la operación prácticamente inabordable.

Ha sido preciso reducir las comparaciones, efectuándolas tan sólo entre conjuntos *suficientemente* definidos para ser con facilidad distinguidos ó realizados. Estos conjuntos, organizados sobre intuiciones cuya elaboración se pierde en los orígenes de la evolución mental de la especie, planteando por ello su explicación todos los problemas del innatismo, han solido revestir forma extensiva y se los ha podido, por consiguiente, suponer compuestos de partes exteriores una á otra, y, á su vez, comparables entre sí. De estas comparaciones ha nacido, en una segunda etapa del progreso del pensamiento matemático, la noción de número fraccionario.

Esta noción pareció que debía ya bastar para todas las necesidades. Cuando el denominador crece, sin crecer el numerador, la fracción acaba por ser inferior á toda cantidad *apreciable*; las fracciones permitían, pues, expresar con toda la aproximación *posible* cualquiera *cantidad* dada por la experiencia. Con la nueva adquisición el campo de estudio se imaginó ya completo y, por completo, limitado.

El pensamiento matemático tardó bastante en franquear estos límites, y no lo logró sin hacer antes frente á contradicciones al parecer formidables. Paralelamente al proceso aritmético, las nociones geométricas habían ido desarrollándose y concretándose

se y aspiraban ya á revestir forma científica precisa y á constituirse en dominio autónomo. La autonomía, sin embargo, no podía ser completa: la medida de las magnitudes geométricas exigía el empleo de los números; esta misma medida había tomado á su vez parte, y no pequeña, en la noción de número fraccionario. El paralelismo hubo de ser notado y las analogías aprovechadas.

Pero al extender las analogías se tropezó con profundas diferencias. Las operaciones numéricas encontraban siempre operaciones geométricas en que *realizarse*, pero no á toda operación geométrica correspondía igualmente una operación numérica correlativa.

La diagonal del cuadrado fué el caso típico: ningún número podía medirla si el lado se tomaba por unidad. Al intentarlo, la razón descubría un proceso infinito, oculto en la práctica tras los inevitables errores de observación.

La correlación se presentaba, sin embargo, tan hermosa, se la adivinaba tan fecunda, que costaba trabajo renunciar á ella, y, para salvar el obstáculo, se imaginaron los números inconmensurables. La idea era atrevida y genial, pero al mismo tiempo hondamente revolucionaria. No podía prosperar sin resistencias y las tuvo obstinadísimas. Los ecos de la lucha han llegado á nosotros bajo la sugestiva forma que diera á su oposición Zenón de Elea en sus famosos solismas sobre la imposibilidad del movimiento, los cuales, en definitiva, no son otra cosa sino la expresión de la repugnancia á admitir, entre términos finitos, una serie infinita de determinaciones. La victoria quedó por los inconmensurables, pero no sin que hayan conservado hasta nuestros días, como título de gloria, el estigma con que intentaron afrentarles sus adversarios, la denominación de números *irracionales*.

La admisión de los inconmensurables ensanchó considerablemente los horizontes de la ciencia. Gracias á ella lo continuo pudo ser ya estudiado de un modo preciso y sistemático; excepciones enfadadas desaparecían de los cálculos; pudo llegar á vislumbrarse la idea de función en sus formas más elementales, y las leyes algorítmicas alcanzaban una generalidad no conseguida antes.

Tales resultados no se obtuvieron, sin embargo, inmediatamente y sin esfuerzo, y aun parece que la antigüedad clásica, fuera de algunos geniales atisbos, entre los que habría que contar principalmente las intuiciones maravillosas de personalidad científica tan saliente como la de Arquímedes, no desarrolló las nuevas orientaciones en la medida que hubiera podido esperarse. Detenida en los primeros pasos, á causa de la general decadencia

(1) Comunicación presentada al Congreso de Valladolid de la Asociación Española para el progreso de las Ciencias. Sección de Matemáticas.

de todos los estudios, el germen quedó latente, sin embargo, y pudo desarrollarse siglos más tarde en ambiente más libre de embarazosas tradiciones, preparado por la coincidencia feliz de asombrosos descubrimientos á dar al pensamiento rienda suelta y á confiar en su poder y en su fuerza para aceptar, sin grandes reservas, las más atrevidas concepciones.

Es entonces cuando la Aritmética y la Geometría hacen alianza más estrecha, cuando el Algebra se constituye, cuando la noción de función aparece y se afirma, cuando el Cálculo infinitesimal se presenta avasallador y dominante, abarcando con sus aplicaciones toda la ciencia, prometiendo el descubrimiento del secreto del mundo, incapaz ya de ocultarse por más tiempo á las inquisidoras investigaciones de la razón.

En ese juvenil período de irreflexivo entusiasmo, es la intuición principalmente la que guía los pasos del matemático. ¿Cómo desconfiar de ella cuando tantos dones prodiga y tantas esperanzas despierta? La noción de espacio es elevada á la misma categoría abstracta que la de número; bórranse en éste diferencias y cualidades, quedando sólo los enteros á manera de jalones, que no tienen otra misión que la de marcar la alineación indefinida y homogénea, siempre igual á sí misma; hasta se la llega á dar forma sensible, asimilándola y aun confundiéndola con el tiempo. Y las nociones de tiempo y espacio son admitidas como nociones absolutas y sus leyes como necesarias, hasta el punto de que, no sólo obligarían á nuestra razón, sino que llegarían á imponerse á la Suprema inteligencia de Dios mismo, para la que toda contradicción es imposible.

Y sobre las puras y absolutas nociones de espacio y tiempo se intenta construir la Mecánica, llamando en auxilio al principio de razón suficiente, con el que se trata de purgar de su materialidad grosera los postulados fundamentales producto de la experiencia. Y la Mecánica se erige en ciencia universal que á las demás cobija, mediante la reducción de todos los fenómenos á fenómenos de movimiento. Y el universo entero quiere convertirse en pedestal inmenso que sostenga el soberbio trono de la razón soberana.

Al entusiasmo sucedió la crítica. En los fundamentos mismos de la Geometría existía desde la antigüedad un punto oscuro. Al desarrollar la teoría de las paralelas, Euclides se había visto obligado á aceptar un postulado que había resistido durante siglos los conatos de demostración intentados por numerosos matemáticos, muchos de ellos eminentes. Tal falta de rigor en ciencia esencialmente racional era motivo de escándalo que había que suprimir á todo trance. Quizás influía en ello, más que otra cosa, el lugar ocupado por el postulado en la obra de Euclides, pues iguales reproches hubieran podido hacerse á otras proposiciones enunciadas al principio de los «Elementos», y que eran admitidas, no obstante, como axiomas evidentes; pero en ello habrá de verse una nueva prueba del peso enorme de la tradición, aun sobre los espíritus más selectos, y en materia tan ajena al parecer á las imposiciones de la costumbre, como es la ciencia.

Toda obstinación era ineficaz, sin embargo, y los intentos fracasaban; pero tanto trabajo no fué del todo estéril. A fuerza de iluminar el camino, se llegó á descubrir al fin que la vía estaba cerrada. El postulado de Euclides no era forzosa consecuencia de los demás postulados; no era siquiera una verdad necesaria; el mundo podría estar organizado de manera perfectamente *inteligible*, sin que en él se verificase el pretendido inexcusable principio.

Los nombres de Gauss, de Bolyai, de Lobachevski sobre todo, van unidos á este descubrimiento, que forma época en la historia de la Geometría. Fué la primera formidable derrota de la intui-

ción, y precisamente en la rama de las Matemáticas que mejor podía recabar para sí el carácter de intuitiva.

La crítica había penetrado también en la ciencia de los números. Abel y Cauchy habían llamado la atención sobre los peligros á que exponía el empleo inconsiderado de las series divergentes. Cauchy mismo trataba de introducir el rigor en el Cálculo infinitesimal, cuyos fundamentos aparecían envueltos en nebulosidades metafísicas; se percibió que aquella primitiva concepción de la función continua, encerrando en el menor intervalo la ley entera de sus variaciones, que brotaba como del germen merced á misteriosa virtud formativa del desarrollo de Taylor, sufría excepciones numerosas, aun en funciones relativamente sencillas, combinaciones en número finito de operaciones elementales del análisis.

Todo ello levantaba dudas que apenas si eran confesadas y que se pretendía ahogar, ocultando las excepciones tras las leyes *generales*, resucitando así la antigua máxima de que la excepción confirma la regla. Todo ocurría *en general*, y las singularidades eran algo así como infinitamente pequeños, cuyo desprecio era permitido. Tal posición, sin embargo, era eminentemente inestable. Se imponía en las demostraciones un rigor creciente, y al fin se quiso deslindar de una manera precisa los campos de lo continuo y de lo discontinuo; pero entonces surgieron en la frontera conflictos inesperados. Las concepciones tradicionales se presentaban al fin en quiebra, víctimas de su desmedida ambición. La continuidad se escapaba de la estrecha cárcel en que el cálculo infinitesimal había intentado encerrarla, poniéndole por guardias derivadas y diferenciales, y la discontinuidad, á su vez, tomaba por asalto el edificio, ocultando su bastardía bajo el manto de la integración. Riemann y Weierstrass fueron los principales portavoces de la ola revolucionaria, y la intuición fué de nuevo vencida y derrotada.

Tan trascendental cambio de valores no podía menos de herir intereses cuantiosos nacidos al amparo del derrocado régimen. No en balde era la antigua noción de la continuidad la que había dado vida á toda la ciencia aplicada, demostrando con ella su fecundidad prodigiosa y aun no agotada, y así como en los pasados siglos, en aquel pleito de los irracionales, que hoy puede parecer mezquino á nuestros estudiantes de Instituto, la voz del sedicente sentido práctico pudo preguntar ¿qué bueno, si con los números fraccionarios habrá siempre bastante?, así también en nuestros días, espíritus cultivados, aun conociendo á fondo estas cuestiones, y sin llegar á negar las conclusiones rigurosas de la teoría, pretenden ser lo prudente desentenderse del fallo y mantener el estado posesorio, sólo atacado por meros entes de razón, sin realidad acreditada ni aun posible.

No parece que las enseñanzas de la historia autoricen una, con apariencia de juiciosa, tan radical manera de pensar. Ciertamente que los nuevos conceptos no son por el momento de inmediata y general aplicación; pero, aunque no otra cosa, siempre será el vulgarizarlos de la mayor importancia, porque las limitaciones que suponen deben ejercer poderosa influencia sobre la manera como hayamos de representarnos el mundo y emprender su estudio.

En las aplicaciones, en efecto, la continuidad se postula, aun á conciencia á veces de que es sólo aproximada y aun ficticia, y es preciso no olvidar nunca el punto de partida, para no dar valor excesivo á las conclusiones, y no considerar como leyes matemáticamente demostradas lo que es sólo consecuencia de hipótesis muy naturales, muy sugestivas, que casi se imponen á nuestros hábitos de pensar, pero que podrían fallar en la práctica, al desarrollarse en un doble proceso de descenso á lo infinitamente pequeño, para ascender después mediante la integración al plano de las cosas reales.

Y es la ilusión tanto más temible, cuanto que puede sugestionar, pasajera y al menos, hasta á los maestros. Poincaré mismo, que de modo tan admirable ha sabido precisar el alcance de las concepciones matemáticas aplicadas al mundo real, y que ha puesto de manifiesto cómo los principios fundamentales de la ciencia son más bien cómodos ó infecundos que verdaderos ó falsos, admite, sin embargo, en alguna ocasión que, cualesquiera que sean los futuros descubrimientos de fenómenos ignorados, será la Geometría euclídea *siempre* la más cómoda, que una Mecánica de cuatro dimensiones no puede ser *en ningún caso* objeto de estudios fecundos, que la continuidad de la función de probabilidad es hipótesis que se impone con tal fuerza al espíritu que parece imposible prescindir de ella, proposiciones todas que, aun siendo verdaderas, pugnarían evidentemente con las conclusiones con tanta brillantez por él sustentadas.

Son estas consideraciones las que principalmente me han decidido á dedicar á estos asuntos la siguiente nota, en la que he de presentar algunos ejemplos de funciones continuas con infinitas singularidades en el menor intervalo. El tema no es nuevo; numerosos ejemplos de esta especie se han dado con anterioridad y á algunos aludiremos en la continuación, pero los que he de señalar tienen la particularidad de ofrecerse naturalmente á la consideración del matemático, sin necesidad de recurrir á rebuscados artificios; alguno de ellos se refiere á líneas empleadas por el más rutinario empirismo, que no ha podido sospechar que tenía entre sus manos un objeto de estudio digno de las miradas de las Matemáticas superiores. Es un nuevo testimonio de la frecuencia con que pasamos al lado de curiosas verdades, sin que la atención se fije en ellas, por impedirlo hábitos arraigados ó el peso de la tradición; es también una prueba, aunque sea sólo indiciaria, de que no se está tan lejos de la realidad y de las aplicaciones al estudiar estas teorías, no por extrañas, menos interesantes.

I

Creyóse por mucho tiempo que toda función continua poseía, en general, para cada valor de la variable, una derivada determinada, finita y continua. La representación de las funciones por medio de curvas había ayudado, sin duda, á arraigar la creencia. Función sin derivada parecía equivaler á curva sin tangente, á móvil sin velocidad, á un absurdo, en fin, irrealizable.

La claridad de esta intuición no bastaba para declarar el enunciado del todo evidente. Se intentó demostrarlo y algunos de estos ensayos fueron autorizados con los nombres de Ampère, de Lamarle, de Gilbert. Duhamel, en su notable tratado de Cálculo, que tanta boga tuvo en su tiempo (1), admite el teorema, aunque con algunas limitaciones, y lo enuncia en esta forma:

«Teorema general.

»Sea y una función cualquiera de una variable x , sujeta tan sólo á las condiciones siguientes:

»1.^a Que cuando á partir de un valor cualquiera se da un incremento h á x , resulta un incremento único k de y , que tiende hacia cero, si se hace tender h hacia cero, y

»2.^a Que á partir de todo valor de x se pueda tomar otro que difiera de él en una cantidad finita determinada, tal que si x varía en el mismo sentido en todo el intervalo comprendido entre ellos, y varíe constantemente en un mismo sentido, es decir, siempre aumentando ó siempre disminuyendo.

»Esto supuesto, es fácil demostrar que, bajo estas condiciones,

para todo valor de x existe un límite finito para la relación de los incrementos infinitamente pequeños correspondientes h y k ; es decir, que no puede haber más que valores excepcionales de x para los cuales esta relación crezca ó decrezca indefinidamente.»

La demostración se reducía á lo siguiente:

«En efecto, sean x_0, X dos valores de x que satisfacen á las condiciones arriba indicadas; y_0, Y los valores correspondientes de y ; dividamos el intervalo $X - x_0$ en n partes iguales, que designaremos por h y sean $k_1, k_2, k_3, \dots, k_n$ los valores correspondientes de los incrementos positivos de y ; se tendrá

$$X - x_0 = nh \quad Y - y_0 = k_1 + k_2 + \dots + k_n$$

de donde resulta

$$\frac{Y - y_0}{X - x_0} = \frac{\frac{k_1}{h} + \frac{k_2}{h} + \dots + \frac{k_n}{h}}{n}$$

es decir, que la relación invariable de los incrementos finitos de x y de y , cuando se pasa de x_0 á X , es la media aritmética de las relaciones $\frac{k_1}{h}, \frac{k_2}{h}, \dots, \frac{k_n}{h}$, cualquiera que sea el número entero n .

»Si ahora se hace crecer á n indefinidamente, los términos de estas relaciones tenderán hacia cero, y siendo su media aritmética siempre igual á la cantidad finita $\frac{Y - y_0}{X - x_0}$, es imposible que tiendan *todos* hacia cero ó que crezcan *todos* indefinidamente.

»Como esta conclusión, relativa al intervalo $X - x_0$, puede ser aplicada á cualquier parte de este intervalo, se sigue que es imposible que, en ningún intervalo finito, el valor de $\frac{k}{h}$ tienda hacia cero ó crezca indefinidamente para *todos* los valores de x . Sólo, pues, para valores excepcionales, y *en número limitado*, podrá $\frac{k}{h}$ dejar de tener un valor finito, y eso es lo que queríamos establecer.»

Lo que primero salta á la vista en esta pretendida demostración es que se presupone la existencia del límite y que la única preocupación es probar que este límite no puede ser ni cero ni infinito. Parece no sospecharse que el límite puede quedar indeterminado. Es lo que en realidad ocurre en la función de Weierstrass:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} b^n \cos \pi a^n x$$

en la que b es una constante positiva menor que la unidad y a un número entero impar con la condición

$$ab > 1 + \frac{3\pi}{2}$$

Tal función, sin embargo, queda en realidad excluida del enunciado de Duhamel. Si se quisiera representarla geométricamente, se vería en efecto que su ordenada es la suma finita de las de una infinidad de sinusoides, las cuales, aunque tienden á confundirse con el eje de las x , introducen una creciente variabilidad en la dirección de la tangente. Dedúcese de aquí que la función llega á ser creciente y decreciente en el menor intervalo y deja de cumplir, por consiguiente, la segunda de las condiciones por Duhamel impuestas; pero aun cumpliendo esta condición, el límite podría no existir, y, en todo caso, nada se intenta para asegurarse de su existencia.

En segundo lugar, es excesivo concluir de que todos los valores de la relación no pueden ser ni nulos ni infinitos el que hayan de ser en número limitado los que alcancen alguno de estos extre-

(1) *Elements de Calcul infinitesimal*, Paris, 1856, tomo I, pág. 94.

mos. No es extraño, pues, que pocos años más tarde, en 1873, Schwarz presentara un ejemplo de función continua y creciente cuya derivada se hacía infinita para todo valor racional de la variable (1).

Un ejemplo análogo es el primero de que vamos á ocuparnos con algún detalle (2). Me lo inspiró el estudio de las series de Brocot. Fué éste un relojero francés, que publicó en París en 1862 un folleto titulado: *Calcul des rouages par approximation*, en el que empleaba las fracciones de que vamos á hacer uso, por ser las que con términos más sencillos podían con mayor aproximación representar una relación dada, y deberían ser, por lo tanto, las que determinaran el número de dientes de un tren de engranajes que hubiera de realizar lo mejor posible una determinada relación de velocidades. Surgen, pues, como se ve, de un problema eminentemente práctico. Estas series, cuyo estudio sumario puede verse en la teoría de los números de Lucas (3), donde se las considera tan sólo desde el punto de vista aritmético, pueden definirse del siguiente modo. Sean en primer término las dos fracciones.

$$\frac{0}{1} \quad \text{y} \quad \frac{1}{1}$$

Si se suman separadamente sus numeradores y sus denominadores y se forma con estas sumas la nueva fracción $\frac{1}{2}$, se tendrá ya la serie de tres términos:

$$\frac{0}{1} \quad , \quad \frac{1}{2} \quad , \quad \frac{1}{1}$$

Si entre los dos primeros términos, y lo mismo entre los dos últimos, se intercalan por el mismo procedimiento otros dos nuevos términos, se tendría la serie siguiente de cinco términos:

$$\frac{0}{1} \quad , \quad \frac{1}{3} \quad , \quad \frac{1}{2} \quad , \quad \frac{2}{3} \quad , \quad \frac{1}{1}$$

y por intercalaciones sucesivas, aplicando siempre la misma regla, se obtendrían, sucesivamente, series de 9, de 17, y, en general, de $2^k + 1$ términos, cada una de las cuales contiene á la anterior y todas ellas las fracciones $\frac{0}{1}$ y $\frac{1}{1}$, que son la primera y la última de cada una de las series.

Si ahora hacemos corresponder con 0 la fracción $\frac{0}{1}$ y con 1 la fracción $\frac{1}{1}$, podremos dividir el intervalo (0,1) en 2^k partes iguales y hacer corresponder con los puntos de división las $2^k - 1$, fracciones restantes de la serie de Brocot de $2^k + 1$ términos. Si se hace crecer á k indefinidamente, á todo valor x comprendido

(1) Haciendo

$$\varphi(x) = E(x) + \sqrt{x - E(x)}$$

y representando por $a_1, a_2, \dots$ constantes positivas cuya suma sea convergente, la función de Schwarz puede representarse por

$$f(x) = \sum a_n \varphi(nx)$$

(2) En el número de Septiembre de 1908, pág. 194, presenté este ejemplo en *L'Intermédiaire des Mathématiciens*, preguntando si había sido antes estudiado ó examinado, desde el punto de vista de la teoría de las funciones. No tuve más respuesta que una del Sr. Escott, publicada en Septiembre de 1909 (pág. 12), en la que, sin dar indicaciones de trabajos sobre el particular anteriores á los míos, se exponían dos propiedades de la función, una de ellas precisamente la que yo había utilizado para la demostración de las propiedades que en mi pregunta anunciaba.

(3) *Theorie des nombres*, París, 1891, pág. 469. Para las aplicaciones de las series y tablas de Brocot, además del folleto original, pueden verse los apuntes atografiados de Mecanismos de la Escuela de Caminos para el curso de 1892-93, redactados por el entonces Profesor de la asignatura D. Recaredo Uhagón (páginas 53 á 56).

en el intervalo, acabará por corresponder una cierta fracción, si x es de la forma $\frac{h}{2^k}$, ó un cierto valor límite en caso contrario.

En el primer caso, la demostración se deduce fácilmente del hecho de que cada serie de Brocot contiene todas las anteriores y que lo mismo ocurre con las divisiones correspondientes del intervalo (0,1). La existencia del límite en el segundo caso no es más difícil de demostrar. Por la ley misma de su formación, en toda serie de Brocot cada fracción es una mediana entre las dos inmediatas, y la serie es, por consiguiente, creciente. Además, entre dos fracciones consecutivas, la diferencia es un quebrado cuyo numerador es la unidad y el denominador el producto de los denominadores; es propiedad que se comprueba inmediatamente en las primeras fracciones y se generaliza con facilidad en seguida por vía de recurrencia.

Resulta, pues, que cuando k crece, el valor de x quedará siempre comprendido entre dos valores de la forma

$$\frac{h}{2^k} \quad \text{y} \quad \frac{h+1}{2^k}$$

á los cuales corresponderán fracciones cuya diferencia decrecerá indefinidamente, tendiendo, por consiguiente, á un límite común. Este límite es el valor que se hará corresponder con x . Tendremos así definida en el intervalo (0,1) una cierta función continua y creciente que representaremos por $f(x)$.

Se demuestra fácilmente que esta función tiene una derivada infinita para todo valor de x de la forma $\frac{h}{2^k}$.

En efecto, sea $\frac{m}{n}$ la fracción correspondiente, y $\frac{p}{q}$ la que corresponda á $\frac{h+1}{2^k}$. Aplicando la ley de determinación de la

función, se tendrá

$$f\left(\frac{2^i \cdot h + 1}{2^{k+i}}\right) = f\left(x + \frac{1}{2^{k+i}}\right) = \frac{im + p}{in + q},$$

de donde

$$f\left(x + \frac{1}{2^{k+i}}\right) - f(x) = \frac{im + p}{in + q} - \frac{m}{n} = \frac{1}{n(in + q)}$$

y por consiguiente

$$\frac{f\left(x + \frac{1}{2^{k+i}}\right) - f(x)}{\frac{1}{2^{k+i}}} = \frac{2^{k+i}}{n(in + q)}$$

ó pasando al límite ($i = \infty$),

$$f'(x + 0) = \infty$$

De una manera análoga se demostraría que $f'(x - 0)$ es también infinita.

La misma demostración no es ya aplicable si x es de forma distinta que la indicada. Sean en este caso $\frac{m}{n}$ y $\frac{p}{q}$ los valores de la función para los valores de la variable

$$a = \frac{h}{2^k} \quad \text{y} \quad b = \frac{h+1}{2^k}$$

que supondremos comprenden al valor de x en una primera aproximación.

Dividiendo este intervalo en dos partes iguales, para obtener una aproximación creciente, x deberá quedar forzosamente dentro de uno de los dos intervalos parciales. Supongamos, para fijar las ideas, que es en el primero. Dividiendo ahora este in-

tervalo en otros dos, α podrá quedar comprendido en el primero ó en el segundo de ellos; pero si estuviera todavía en el primero, no siendo igual á α , se podrá al cabo de r_1 divisiones dejarlo contenido en un segundo intervalo.

Dentro de este segundo intervalo α quedará también más cerca de un extremo que del otro y pertenecerá, por consiguiente, al primero ó al segundo de los intervalos que se formen á la primera nueva división. En las divisiones sucesivas α podrá seguir ocupando intervalo del mismo nombre, pero sólo durante un número r_2 , finito, de divisiones.

Si la aproximación se prolonga indefinidamente, repitiendo las mismas consideraciones, llegaremos á obtener una serie infinita de valores enteros.

$$r_1, r_2, r_3, \dots, r_n, \dots$$

divisible en dos clases, según que correspondieran á casos en los que α permaneciera en primeros intervalos ó á los casos contrarios. La serie clasificada de los r y los valores iniciales α y b determinarían por completo al número α .

PEDRO M. GONZÁLEZ QUIJANO.

(Continuará.)

LA LÁMPARA DE PENTANO ⁽¹⁾

II. *Comprobación de lámparas.*—2. Gabinete fotométrico. Ventilación. Aparatos.—3. Preparación de las lámparas.

(CONTINUACIÓN)

2. GABINETE FOTOMÉTRICO.—VENTILACIÓN.—APARATOS.

El gabinete fotométrico utilizado hasta ahora tiene 7,90 metros de longitud por 3,70 metros de ancho, y se ventila artificialmente con aire templado que conducen unas tuberías. La ventilación ordinaria no conservaría el aire suficientemente puro si los gases procedentes de la combustión del pentano se esparcieran libremente en el gabinete, razón por la cual se coloca sobre la lámpara una chimenea de 0,60 metros de diámetro en comunicación directa con uno de los tubos de la ventilación; el resultado que se obtiene es completamente satisfactorio, tanto que no se ofrecía variación alguna en la potencia luminosa de las lámparas después de haber funcionado algunas horas, por efecto de la alteración de la composición del aire. En circunstancias ordinarias se ventila el gabinete por completo una vez cada hora por lo menos.

El gabinete fotométrico está situado en un ángulo del edificio, á cuya circunstancia se atribuyó la causa de algunas corrientes de aire que perturbaban el funcionamiento regular de la lámpara y cuyos efectos se han evitado posteriormente con la colocación de tres cortinas verticales perpendiculares entre sí, y á veces con cuatro colgadas de un bastidor de madera que tiene $0,90 \times 0,60$ metros de base por 0,90 metros de altura, las cortinas no llegan hasta el suelo, queda por debajo de su borde inferior un espacio libre de unos 15 centímetros, por el cual penetra el aire que rodea á la lámpara sin perturbar á la llama ni á la corriente de aire que la alimenta directamente. Esta disposición de cortinas se adoptó después de haber ensayado otras va-

rias, con las que se observó que los valores fotométricos obtenidos eran algo distintos, por regla general, de los correspondientes al caso en que se experimentaba sin cortinas, aun cuando la pureza del aire del recinto no sufriera la más pequeña alteración.

En algunos ensayos especiales se determinó la cantidad de CO_2 contenida en el aire con el refractómetro de Zeiss. La humedad atmosférica se medía periódicamente con dos psicrómetros Assmann y la presión con un barómetro de mercurio. Más adelante se exponen los cálculos detallados de la humedad y las correcciones correspondientes.

El banco fotométrico empleado es el corriente en el Bureau of Standards, con la disposición Lummer-Brodhum para observar los focos luminosos, y con el aparato registrador de lecturas (1). En todos los trabajos de precisión se ha empleado el método de sustitución con intensidad constante sobre el disco, que consiste en colocar una «lámpara de comparación» en el fotómetro á distancia invariable del carro, y al otro lado de éste los patrones eléctricos y las lámparas de pentano, alternativamente, para hacer las lecturas en la escala.

3. PREPARACIÓN DE LAS LÁMPARAS.

Antes de colocar la lámpara en el fotómetro se mira por la parte superior de la chimenea en dirección del mechero para asegurarse de que ocupa la posición debida, y antes de encenderla se colocará siempre el calibre que sirve para situar el borde inferior de la chimenea á 47 milímetros del mechero, cuando está fría; rara vez es necesario repetir esta operación, aunque algún movimiento se produce siempre por los enfriamientos y calentamientos inevitables que tiene que experimentar la lámpara.

La lámpara se ha de colocar sobre el banco de manera que su chimenea sea vertical, sin dar gran confianza á las indicaciones de la plomada á ella unida; es preferible pasar una plomada por la chimenea y comprobar con ella si el centro de su base superior y el del mechero están en la misma vertical. La situación de la lámpara será la necesaria para que el centro de la llama y el del disco del carro estén al mismo nivel. Las instrucciones de la Gas Referees prescriben que la base inferior de la chimenea y el centro de dicho disco se coloquen á la misma altura, porque así la iluminación del segundo sigue la ley de la inversa de los cuadrados con más aproximación que si la lámpara está más alta. La situación anterior es la que recomienda el American Gas Institute para la determinación de la potencia luminosa de los mecheros de gas, y ha sido adoptada por el Bureau of Standards para evitar confusiones.

El eje del fotómetro ha de pasar por el tubo de aire, por el centro del mechero y por el de la chimenea; algunas veces, sin embargo, y á petición de los interesados, se le da un giro de 90° , lo cual no influye de una manera sensible en los valores de las lámparas que se han estudiado; tanto en un caso como en otro se colocará la chimenea de manera que la luz procedente de la ventana cerrada con mica no llegue al disco del carro, ni á la lámpara patrón ni al tubo por el que desciende el pentano.

Las distancias de la lámpara se miden desde el centro del mechero. La que hay entre éste y el disco del carro es casi siempre un metro, y para que sea así efectivamente se ha adoptado el sistema seguido en Inglaterra, que consiste en apoyar los extremos de una varilla metálica en el mechero y en el frente de aquel ca-

(1) G. W. Middleknapff, *Bulletin*, 7, pág. 18, 1910.—*Electrical World*, 56, pág. 153, 21 Julio 1910.

(1) Véase el número anterior.