

REVISTA DE OBRAS PÚBLICAS

PUBLICACION TECNICA DEL CUERPO DE INGENIEROS DE CAMINOS, CANALES Y PUERTOS

DIRECTOR

D. MANUEL MALUQUER Y SALVADOR

COLABORADORES

LOS INGENIEROS DE CAMINOS, CANALES Y PUERTOS

SE PUBLICA LOS JUEVES

Dirección y Administración: Plaza de Oriente, 6, primero derecha.

Sobre la resistencia á la rotura

y al movimiento de los cuerpos comprimidos que se tocan
según un punto ó según una línea

POR

D. PEDRO M. GONZALEZ QUIJANO

Ingeniero de Caminos, Canales y Puertos (1).

Cuando un cuerpo natural se encuentra sometido á un sistema de fuerzas, se desarrollan en su superficie y en su interior reacciones moleculares que tienden á mantener la solidaridad entre sus distintas partes y á prevenir la rotura. Estas reacciones, que corresponden siempre á deformaciones más ó menos acentuadas del cuerpo, no pueden crecer por cima de determinado límite, y cuando éste es alcanzado por las fuerzas exteriores la rotura se produce al fin.

Enseña la experiencia que, cuando las dimensiones del cuerpo crecen, las fuerzas necesarias para romperle deben crecer también y que han de ser, en general, del mismo orden de magnitud que el cuadrado de aquellas dimensiones. Es, pues, natural, y así se hace en la práctica, referir á la unidad de superficie las fuerzas exteriores y las reacciones que originan.

Esto supuesto, si para una misma fuerza la superficie de aplicación disminuye indefinidamente, la intensidad de su acción crecerá sin límite y llegaría á ser infinita si la superficie se redujera rigurosamente á cero. Es lo que ocurriría en el contacto de dos cuerpos que se tocaran en un punto ó según una línea.

Ahora bien; una acción infinita no puede ser resistida por los cuerpos naturales: las superficies ceden, la materia se deforma y el punto ó la línea teóricos son de este modo sustituidos por una zona de contacto que irá creciendo, hasta que la acción quede reducida dentro de los límites que soporta la resistencia del material, ó hasta que la rotura sobrevenga, si tal fuera la intensidad de las fuerzas que hiciera imposible el equilibrio final.

Cuando los cuerpos son suficientemente duros estas zonas de contacto son, sin embargo, muy pequeñas y, aunque siempre se esté á infinita distancia de la concepción teórica, los problemas que en tales casos se plantean difieren bastante de los demás que

se presentan en la práctica, para que sea lógico concederles una atención especial.

Aumentan por otra parte el interés de estos problemas la frecuencia de sus aplicaciones, de gran importancia muchas de ellas en la construcción y en la maquinaria. Sirvan de ejemplo los cilindros de apoyo de los puentes metálicos para prevenir los efectos de las dilataciones y contracciones debidas á las diferencias de temperatura, las rótulas de los arcos de fábrica, los trenes de rodillos, ruedas de vehículos, juegos de bolas y demás mecanismos con los que se procura reducir á un mínimo los rozamientos.

Hácese uso en la mayor parte de estos casos de fórmulas empíricas, que suelen bastar en la práctica ordinaria, pero que no dan á conocer el mecanismo íntimo de los fenómenos, y son sólo una guía insuficiente é insegura cuando hayau de excederse los límites de lo ya experimentado.

Algunos ensayos, sin embargo, se han hecho en este sentido, y á dar cuenta del estado actual del asunto, de las deficiencias que aún se notan, y de la necesidad de recurrir para subsanarlas á nuevas investigaciones experimentales se dirige principalmente la presente nota, en la que estudiaremos separadamente tres puntos distintos, á saber:

- 1.º La repartición de las presiones en la zona de contacto.
- 2.º Su distribución en el interior de los cuerpos y las causas determinantes de la rotura; y
- 3.º Las resistencias que por razón de estos fenómenos se oponen al movimiento de los cuerpos en cuestión.

I

Respecto al primer punto, la teoría quizás más antigua es la de Grashof (1). Considera este autor el caso de un cilindro de sección recta circular, colocado sobre una placa plana, á la cual es tangente y contra la cual es comprimido por una cierta fuerza normal á ambas superficies, y uniformemente repartida á lo largo de la generatriz de contacto. Bajo la acción de esta fuerza, el cilindro y la placa se deforman y el contacto se establecerá finalmente según una superficie cilíndrica de generatrices paralelas á las del cilindro, y cuya directriz se supone ser una curva tal como $AM'B$, intermedia entre la cuerda AB , que prolonga la primitiva superficie plana de la placa, y el arco AMB , directriz del cilindro antes de la deformación.

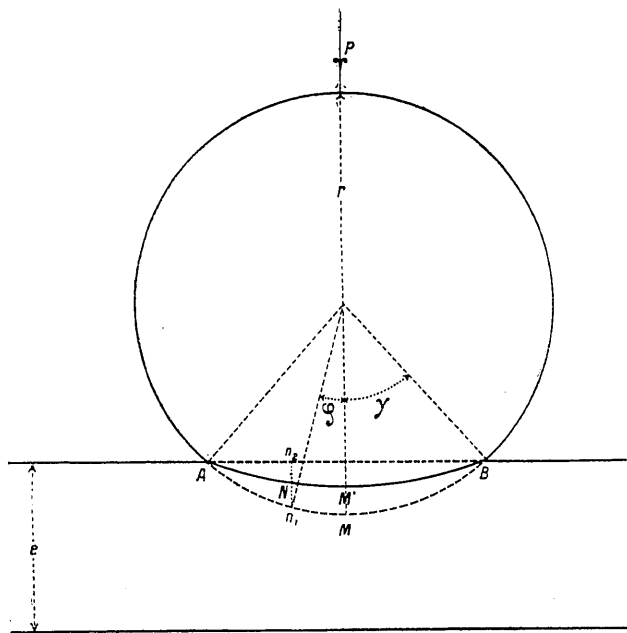
(1) Memoria leída en el Congreso de Valladolid de la Asociación española para el progreso de las ciencias.

(1) *Theorie der Elasticität und Festigkeit*. Berlin, 1878

Admitido esto, las deformaciones superficiales paralelamente a la dirección de la fuerza en un punto cualquiera N de la zona de contacto, serán respectivamente Nn_1 para el cilindro, y Nn_2 para la placa. Grashof admite que las reacciones moleculares correspondientes a estas deformaciones sean

$$\frac{E_1}{r} \propto Nn_1 \quad \text{y} \quad \frac{E_2}{e} \propto Nn_2$$

representando por r y e el radio del cilindro y el espesor de la placa y por E_1 y E_2 los módulos respectivos de elasticidad de las materias de que están constituidos ambos cuerpos; iguala en seguida ambos valores por razón de equilibrio, y como la suma de



ambas deformaciones, que son siempre muy pequeñas, depende sólo de la situación del punto y del ancho total de la zona de contacto, deduce de fáciles consideraciones geométricas, y despreciando infinitamente pequeños de orden superior, que la presión común en ese punto es

$$1) \quad f = \frac{r}{\frac{r}{E_1} + \frac{e}{E_2}} \cdot \frac{\psi^2 - \varphi^2}{2},$$

fórmula en la cual φ y ψ representan los ángulos en el centro correspondientes a los arcos Mn_1 y $MA = MB$. En ella sólo es desconocido el ángulo ψ , que puede determinarse igualando la fuerza total de compresión P a la integral de todas las reacciones moleculares.

Salta, sin embargo, a la vista que la fórmula 1) no puede ser de aplicación general, pues si se hiciera en ella $e = \infty$, f sería nula cualquiera que fuera ψ , y ocurriría, por consiguiente, que a la presión más débil, y aun bajo la acción de su propio peso, el cilindro se hundiría en su soporte, supuesto indefinido en espesor.

Síguese esta consecuencia del error fundamental de referir las deformaciones, principalmente superficiales, a las dimensiones totales de los cuerpos en contacto. En lo que a la placa se refiere, el error resulta patente, y sin duda huyendo de él, Culmann elude tomar en cuenta el espesor de aquella, y admitiendo una relación constante entre las deformaciones de ambos cuerpos, refiere al radio la del cilindro, como Grashof, y llega, por último, a representar la presión en el punto N por la fórmula

$$f = \lambda E \left(1 - \frac{\cos \psi}{\cos \varphi} \right)$$

la que, si se sustituyen $\cos \psi$ y $\cos \varphi$ por los primeros términos de sus desarrollos, prescindiendo de infinitamente pequeños de orden superior al segundo, se transformará en

$$2) \quad f = \lambda E \cdot \frac{\psi^2 - \varphi^2}{2},$$

que, en el caso de ser iguales los materiales del cilindro y de la placa, sólo diferirá de la 1) por el coeficiente λ , que debería ser igual a $\frac{r}{r+e}$ para que la identidad fuera completa.

A resultados análogos son conducidos por la misma vía Resal y Canevazzi, y Bach llega a prescindir por completo de la contracción de la placa, lo que equivaldría a hacer $\lambda = 1$ en la fórmula de Culmann.

En realidad, si nada justifica el referir la deformación de la placa a su espesor total, comparar la del cilindro con su radio y tomar esta relación por base para aplicar la ley de Hooke, no es más congruente. Tanto en un cuerpo como en otro las grandes presiones se encuentran concentradas en las inmediaciones de la zona de contacto, desde donde se propagan hacia el interior, debilitándose en intensidad lo que ganan en superficie de aplicación.

Si pues por un punto cualquiera de contacto se traza en el interior del cilindro una recta paralela a la fuerza, que suponemos vertical, las presiones a lo largo de esa línea irán disminuyendo desde la superficie hasta el plano diametral horizontal; las deformaciones elementales serán proporcionales a esas presiones, y la deformación total, igual a la integral de las deformaciones elementales, deberá ser referida a una longitud menor que el radio, y tanto menor cuanto más rápidamente la presión disminuya de la superficie al centro.

La verdadera medida de la presión en la superficie no la daría, pues, la deformación total, sino la derivada de esta deformación con relación al espesor comprimido. Esta derivada dependerá de la forma del contacto y en su expresión deberá entrar, por consiguiente, el radio del cilindro; pero en tanto en cuanto este radio define la curvatura de la superficie en el punto de tangencia y con independencia casi completa de las dimensiones del cuerpo, de tal suerte que la expresión hubiera de ser la misma para un cilindro de sección elíptica, por ejemplo.

Sin embargo, como las mayores presiones se localizan, como ya hemos tenido ocasión de notar, en las inmediaciones del contacto, puede admitirse, con las debidas reservas y a título de primera aproximación, que la derivada sea proporcional a la deformación misma, dejando a la experiencia el determinar cuál hubiera de ser el coeficiente de proporcionalidad. Podría así llegarse a la misma fórmula de Culmann, a la que no habría que hacer entonces otra observación que la ya apuntada sobre la significación del coeficiente.

En esta hipótesis se tendría haciendo $\varphi = 0$ en la expresión 2) que la presión máxima, sería

$$F = \frac{\lambda E \psi^2}{2}$$

y, si llamamos p a la presión por unidad de longitud sobre la generatriz de contacto, se tendrá

$$p = 2 \int_0^\psi f r d\varphi = \frac{2\lambda}{3} E r^3 \psi$$

de donde se deduce para valor de ψ

$$\psi = \sqrt[3]{\frac{3p}{2\lambda E r}}$$

lo que permite poner ya á F en función de la fuerza conocida y del radio del cilindro. Se llega así á la fórmula

$$F = \sqrt[3]{\frac{9 \lambda E}{32}} \sqrt[3]{\frac{p^2}{r^2}}$$

y para ancho de la zona de contacto á

$$a = 2 \psi r = \sqrt[3]{\frac{12}{\lambda E}} \sqrt[3]{p r^2}$$

Es fácil ver que la presión media sería igual en tal caso á los dos tercios de la presión máxima. En cuanto al coeficiente λ sería igual á $\frac{1}{2}$ según Culmann y á 1 según Bach; su valor con aproximación suficiente sólo podría darlo la experiencia.

La teoría que acabamos de exponer podría igualmente aplicarse al caso de dos cilindros tangentes á lo largo de una generatriz. Ya hemos dicho antes que la distribución de las presiones no debe depender del radio del cilindro, sino en cuanto éste define la curvatura de la superficie. Por la misma razón esa distribución de presiones deberá quedar definida en este otro caso más general por el ángulo de contingencia de las superficies en contacto, y, por consiguiente, si representamos por r_1 y r_2 los radios de los dos cilindros, la distribución de las presiones y el ancho de la zona de contacto serán los mismos que para un cilindro reposando sobre un plano y cuyo radio viniera dado por la expresión

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{r_1} \pm \frac{1}{r_2}$$

en la que el signo $+$ correspondería al caso de dos cilindros exteriores uno á otro y el signo $-$ al de un cilindro macizo reposando sobre la concavidad de otro hueco.

Con igual facilidad podría tratarse el caso de una esfera apoyada sobre un plano. La zona de contacto sería entonces un círculo, cuyo radio designaremos por ρ , y las líneas de igual presión circunferencias concéntricas. El valor de la presión vendría dado por la misma fórmula 2) en la que ϕ y ψ tendrían análoga significación, y si se representa por P la fuerza total de compresión se tendrá

$$P = 2 \pi r \int_0^\psi r \phi d\phi = \frac{\pi \lambda E r^2}{4} \psi^4$$

de donde

$$F = \frac{\lambda E \psi^2}{2} = \sqrt[3]{\frac{\lambda E P}{\pi r^2}} \quad \rho = \psi r = \sqrt[4]{\frac{4 P r^2}{\pi \lambda E}}$$

Si la esfera reposara sobre un casquete cóncavo ó se apoyara sobre otra esfera, las mismas consideraciones hechas anteriormente para el caso de dos cilindros, y aun la misma fórmula allí empleada, permitirían determinar el radio de la esfera única que en contacto con un plano daría lugar á las mismas reacciones.

Alguna mayor complicación, aunque no más dificultad, tendría el caso de dos superficies cualesquiera que se tocasen en un punto. Si tomamos este punto como origen de coordenadas y por plano de las xy el plano tangente común á las dos superficies, es sabido que los valores de z en las inmediaciones del punto de tangencia vendrán expresados en el caso más general, despreciando infinitamente pequeños de orden superior al segundo, por ecuaciones de la forma

$$\begin{aligned} z_1 &= A_1 x^2 + 2 B_1 xy + C_1 y^2 \\ z_2 &= A_2 x^2 + 2 B_2 xy + C_2 y^2 \end{aligned}$$

en la que z_1 y z_2 serán del mismo signo ó de signo contrario, según que las dos superficies se toquen interior ó exteriormente.

Si dos puntos de ambas superficies vienen al contacto, la deformación total, que según la hipótesis ha de repartirse en relación constante entre los dos cuerpos, será igual á $z_1 - z_2$ y las curvas de igual presión se proyectarán sobre el plano de la xy según curvas de segundo grado, que serán homotéticas con relación al origen, y elipses si se trata de superficies de curvatura positiva, como ocurrirá en casi todos los casos de la práctica.

Síguese de lo que acabamos de decir que las presiones y la extensión de la zona de contacto serán en este caso las mismas que si tratara de la superficie representada por

$$z = (A_1 - A_2) x^2 + 2 (B_1 - B_2) xy + (C_1 - C_2) y^2$$

comprimida contra un plano por la misma fuerza P . Bastará, pues, tratar este caso.

Tratándose de un paraboloides elíptico, un giro de los ejes coordenados alrededor del eje de las zz permitirá dar á la ecuación la forma

$$z = \frac{x^2}{2 r_1} + \frac{y^2}{2 r_2}$$

en la que r_1 y r_2 representan los dos radios de curvatura principales del paraboloides en el punto de contacto. Si los dos fueran iguales el paraboloides sería de revolución y el problema quedaría reducido al caso de la esfera. Siendo desiguales, como las elipses de igual presión son homotéticas, podrán considerarse como las proyecciones de las circunferencias de igual presión determinadas por la esfera de radio R dado por la expresión

$$R = \sqrt[3]{r_1 r_2}$$

Si las indicatrices de ambas superficies fueran de grado superior al segundo, los radios de curvatura serían infinitos y las fórmulas no serían ya aplicables. Sería preciso hacer directamente la integración de las presiones elementales para, después de igualada á la presión total, calcular la presión máxima y la forma y dimensiones de la zona de contacto, que dependerían ahora de los infinitamente pequeños despreciados en el cálculo anterior. El problema, sin embargo, sería quizá más teórico que práctico, pues mientras más íntimo fuera el contacto, mayor exactitud exigiría la labra de las superficies para que pudieran ser aplicadas las conclusiones del cálculo, y esta exactitud tiene un límite impuesto por las condiciones del material y del trabajo.

Las hipótesis que sirven de fundamento á la teoría general que acabamos de bosquejar son, como hemos visto, tan sólo aproximadas. La teoría de la elasticidad permite una aplicación más precisa y correcta de la ley de Hooke para la determinación de las deformaciones y de las reacciones correspondientes. Es lo que ha intentado Hertz integrando para este caso las ecuaciones fundamentales

$$\Delta^2 \xi + \frac{m}{m-2} \frac{de}{dx} = 0$$

$$\Delta^2 \eta + \frac{m}{m-2} \frac{de}{dy} = 0$$

$$\Delta^2 \zeta + \frac{m}{m-2} \frac{de}{dz} = 0$$

en las que ξ , η y ζ representan, como es sabido, las componentes de las deformaciones lineales, e la dilatación cúbica, m el coeficiente de Poisson y Δ^2 el símbolo de Lagrange.

Como resultado de sus investigaciones, llega Hertz á la conclusión de que la superficie de contacto es también en el caso ge-

neral una elipse cuyos ejes coinciden en dirección con los de la elipse más atrás considerada, pero que la relación de sus longitudes es distinta, salvo en el caso en que una y otra elipse degeneran en círculo. Esta relación es, sin embargo, función exclusiva de la que existe entre los ejes de la primera elipse, y Hertz ha calculado una tabla que da para cada caso los valores de los correspondientes coeficientes que designaremos por μ y ν .

Esto supuesto, los semiejes de la elipse de contacto vienen dados por las fórmulas

$$a = \mu \sqrt[3]{\frac{3P(\theta_1 + \theta_2)}{8\left(\frac{1}{r_{11}} + \frac{1}{r_{12}} + \frac{1}{r_{21}} + \frac{1}{r_{22}}\right)}}$$

$$b = \nu \sqrt[3]{\frac{3P(\theta_1 + \theta_2)}{8\left(\frac{1}{r_{11}} + \frac{1}{r_{12}} + \frac{1}{r_{21}} + \frac{1}{r_{22}}\right)}}$$

en las que θ_1 y θ_2 son coeficientes que dependen de las constantes elásticas de los dos cuerpos y que responden para cada uno á la fórmula

$$\theta = \frac{4}{E} \left(1 - \frac{1}{m^2}\right);$$

en cuanto á los r representan los radios de curvatura principales de ambas superficies.

La presión en un punto interior á la elipse de contacto viene dada por

$$f = \frac{3P}{2\pi ab} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}},$$

y será máxima para $x = y = 0$.

En el caso en que el contacto tuviera lugar entre dos puntos umbilicales de ambas superficies ó, más en particular, cuando se trate de dos superficies esféricas del mismo material el radio del círculo de contacto será

$$\rho = \sqrt[3]{\frac{3\left(1 - \frac{1}{m^2}\right)P}{E\left(\frac{1}{r_1} \pm \frac{1}{r_2}\right)}}$$

y la presión máxima

$$F = \frac{3}{2\pi} \sqrt[3]{\frac{PE^2}{9\left(1 - \frac{1}{m^2}\right)^2 \left(\frac{1}{r_1} \pm \frac{1}{r_2}\right)^2}}$$

correspondiendo en estas fórmulas el signo $+$ á los contactos exteriores y el $-$ á los interiores. En este último caso, y la observación es igualmente valedera para la teoría anterior, es claro que las fórmulas no podrían aplicarse si $r_1 = r_2$, ó si la diferencia entre ambos radios fuera muy pequeña con relación á P .

Si los cuerpos en contacto fueran dos cilindros tangentes á lo largo de una generatriz, la misma teoría conduce á las fórmulas siguientes:

$$a = 4 \sqrt{\frac{2\left(1 - \frac{1}{m^2}\right)P}{\pi E\left(\frac{1}{r_1} \pm \frac{1}{r_2}\right)}}$$

$$F = \sqrt{\frac{Ep\left(\frac{1}{r_1} \pm \frac{1}{r_2}\right)}{2\pi\left(1 - \frac{1}{m^2}\right)}}$$

en las que las letras tienen la misma significación que en la teoría anterior.

Si se comparan estas fórmulas con las allí obtenidas se observa, desde luego, que, prescindiendo de coeficientes numéricos,

sometidos siempre á la comprobación experimental, el orden de magnitud de los valores dados para las presiones y para las superficies de contacto no es el mismo: el ancho de la impresión que según las primeras obtenidas debía ser proporcional á la raíz cúbica de p , habría de serlo según las segundas á la raíz cuadrada, el radio del contacto en el caso de esferas habría de ser según unas proporcional á la raíz cuarta, y según otras á la raíz cúbica de la compresión total. La influencia del radio del cilindro ó de la esfera tampoco sería la misma: su exponente en las fórmulas pasaría en el primer caso de $\frac{2}{3}$ á $\frac{1}{2}$ y de $\frac{1}{2}$ á $\frac{1}{3}$ en el segundo. En cuanto al módulo de elasticidad, entra siempre en sentido inverso de la fuerza de compresión y la acompaña en sus variaciones.

Los resultados no pueden, pues, ser concordantes ni la diferencia acusarse siempre en el mismo sentido. Para grandes valores de la fuerza de compresión, las fórmulas de Hertz darían un contacto más extenso que las de Grashof y Culmann, pero en la práctica, antes de que la fuerza alcance esos valores, el material en la mayoría de los casos cederá bajo la carga. Serán, pues, estas últimas fórmulas las que de ordinario den valores mayores para la superficie de contacto y menores, por consiguiente, para la presión máxima.

Los grandes valores de la compresión harían además inaplicables las fórmulas de Hertz, porque éstas suponen la exactitud rigurosa de la ley de Hooke y que las deformaciones son perfectamente elásticas y suficientemente pequeñas para que puedan considerarse infinitesimales en comparación con los radios de curvatura.

Y es sobre todo de observar que estos límites de aplicación son mucho más restringidos en la práctica de lo que pudiera pensarse. Si se aceptan, en efecto, las fórmulas de Hertz y se toma en ellas para el coeficiente de Poisson el valor $m = \frac{10}{3}$, aplicable con aproximación suficiente á los metales usuales, sería preciso, para no exceder con la presión máxima el límite de elasticidad del material, reducir la carga de los rodillos de dilatación de los puentes metálicos á la quinta parte, por lo menos, de las que se admiten sin dificultad en la práctica, y en algunos casos á la octava.

De aquí que, á poco que aumenten las cargas, aparezcan ya las deformaciones permanentes, como pudo comprobar Deslándres en sus importantes experimentos resumidos por él en una nota publicada en 1893 en los *Anales de Puentes y Calzadas*. Estas deformaciones permanentes parecían crecer proporcionalmente á las cargas, hasta un cierto valor crítico de éstas para el que se producía un rápido aumento, que pronto cesaba, para crecer de nuevo con más lentitud.

Ahora bien, traspasado el límite de elasticidad, las deformaciones crecen con más rapidez que las fuerzas y, por otra parte, las deformaciones permanentes han de contribuir á igualar las presiones en la zona á que alcancen, de aquí que los contactos efectivos han de ser mayores y menores las presiones de lo que acusarían las fórmulas de Hertz, y que podrán tal vez, por consiguiente, á pesar de su menor rigor teórico, dar en los intervalos de la práctica valores más próximos á la verdad las de Grashof y Culmann, sobre todo si se determinan convenientemente sus coeficientes.

No sabemos que se hayan hecho investigaciones suficientemente precisas para decidir experimentalmente la cuestión. El profesor Greco, en un notable trabajo no hace mucho publicado en el *Giornale del Genio Civile*, y del que más adelante nos ocuparemos, se inclina, sin embargo, á la fórmula de Hertz, fundado

en determinadas experiencias de Bach, que parecen confirmarla. Efectuáronse éstas sobre cilindros de granito comprimidos contra prismas del mismo material. Una vez desaparecidas las cargas y observando las superficies de contacto de ambas probetas, se notaban huellas discontinuas y más ó menos irregulares, cuya superficie total, dividida por la longitud de la generatriz, se ha tomado por ancho de la zona. Comparando estos resultados con los deducidos de la fórmula de Hertz, la concordancia es bastante grande, y aun son con frecuencia menores los observados que los calculados.

Pero esta comprobación parece un poco fortuita, porque las huellas observadas *después de descargado el cilindro* responden á deformaciones permanentes y han de quedar, por consiguiente, limitadas á una superficie menor que la del contacto.

Es, sin embargo, notable, que en los experimentos de Bach la deformación permanente crezca aproximadamente con la raíz cuadrada de la carga y no con la carga misma, que es lo que parece ocurrir con los materiales metálicos, como se deduce del trabajo de Deslandres y de las observaciones sobre la dureza de estos cuerpos que han dado origen al cada vez más acreditado y extendido método de prueba de la bola de Brinell (1). Todo ello parece indicar la necesidad de nuevas investigaciones experimentales que den á conocer mejor el fenómeno real y que sirvan, en su caso, de base á una clasificación racional de los materiales.

Entretanto parece lo más probable, dentro de nuestros actuales conocimientos, que las deformaciones y las presiones empiecen á producirse bajo cargas mínimas obedeciendo á las fórmulas de Hertz, que al crecer las cargas crezcan también aquéllas acercándose cada vez más á los valores indicados por las teorías de Grashof, Culmann y similares y que, si las deformaciones permanentes se acentúan, pueden aún ser traspasados estos límites en un período plástico, si la naturaleza del material lo consiente antes de que se produzca la rotura.

Las condiciones que determinan ésta es otro de los puntos de la mayor importancia práctica y del cual pasamos á ocuparnos.

II

En las aplicaciones suele ser, en efecto, más interesante el límite de rotura que la entidad de las deformaciones, y si se procura que éstas no crezcan excesivamente, es principalmente porque revelan la proximidad de aquélla; pero respecto á las causas que la producen la unanimidad no es completa.

Es un hecho experimental que, cuando las fuerzas crecen, la rotura acaba por producirse y, según como las fuerzas obran, tres clases de roturas suelen de ordinario considerarse: rotura por compresión, rotura por tracción y rotura por deslizamiento; las demás suelen reducirse á ellas mediante la aplicación de teorías más ó menos justificadas. Para cada una de estas tres clases de rotura la experiencia da un límite á las fuerzas cuando las pruebas se efectúan en condiciones comparables.

Esto supuesto, la primera idea que ocurre es limitar las compresiones en la zona de contacto, que es donde alcanzan su máxima intensidad, para alejarse del esfuerzo que determina la rotura por compresión. Es lo primero que se ha pensado, y de aquí la importancia concedida á la distribución de las presiones de que acabamos de ocuparnos.

Pero la rotura por compresión es una idea que repugna á muchos. Cuesta trabajo, en efecto, admitir que sólo fuerzas que tienden á aproximar las moléculas puedan destruir los enlaces que mantienen la solidaridad de un cuerpo y, de todos modos, cualquiera que sea el efecto que pudieran producir fuerzas colosales de las que no disponemos dentro de nuestros actuales medios de acción, parece que, cuando la rotura por compresión se produce en la práctica, son esfuerzos secundarios de dilatación ó de deslizamiento los que en la realidad destruyen la solidaridad de los elementos materiales.

Esta observación no resta, sin embargo, todo valor á la indicación que puedan dar en nuestro caso las presiones de contacto, porque si el cilindro ó la esfera se rompieren por dilatación ó por deslizamiento, también se rompen de este modo las probetas que sirven para fijar el límite de compresión, y las causas que en un caso producen efectos secundarios suficientes bien podrían producirlos también en el que ahora nos interesa.

Sólo la experiencia puede, pues, dar una contestación segura; pero para interpretarla debidamente convendrá estudiar cómo se reparten las presiones en el interior de los cuerpos en contacto. Boussinesq ha aplicado la teoría de la elasticidad al caso de una fuerza aislada aplicada normalmente á la superficie plana de un medio elástico indefinido; sus conclusiones podrían aplicarse á una placa horizontal sustentadora de una esfera que la comprime.

Las presiones, concentradas en la superficie, van extendiéndose al repartirse sobre los planos paralelos á la misma y cada vez más distantes de ella. Según la línea de acción de la fuerza, las presiones unitarias decrecen proporcionalmente al cuadrado de la profundidad.

En cada plano horizontal las presiones verticales son inversamente proporcionales á la quinta potencia de la distancia al punto de aplicación. Los esfuerzos tangenciales van dirigidos en estos planos hacia el punto de paso de la fuerza, son máximos en este punto y varían á lo largo de la línea de acción de la fuerza en sentido inverso del cuadrado de la profundidad, y en cada plano en el de la cuarta potencia de la distancia al punto de aplicación. Esto origina otros esfuerzos que se desarrollan en cada punto sobre los planos verticales normales al plano radial que pasa por el punto y la fuerza. Finalmente, sobre estos planos radiales el deslizamiento es nulo.

Como consecuencia de esta repartición, los esfuerzos se atenúan á medida que penetran en la placa, y bastará un espesor no muy grande para que lleguen de tal modo reducidos á la cara opuesta, que desaparezca todo peligro de rotura fuera de la zona misma de contacto. Claro es, sin embargo, que si ésta cede, la repartición se altera y la rotura iniciada podrá propagarse.

En la esfera la repartición de los esfuerzos sería mucho más compleja. Se atenuarían, indudablemente, los esfuerzos de compresión al retirarse de la zona de contacto; pero esta atenuación tendría un límite, porque habrían de concentrarse de nuevo en los puntos de aplicación de las fuerzas que mantienen el contacto. Si acción y reacción actúan, por ejemplo, sobre los extremos de un diámetro, la simetría exigirá que sea la sección diametral normal á la fuerza la que sufra los esfuerzos mínimos. Pero al atenuarse las compresiones nacen de una parte esfuerzos tangenciales y de otra dilataciones que se propagan hasta la superficie donde nada las contrarresta. La estabilidad, como se ve, es más dudosa.

Consideraciones análogas podrían aplicarse al cilindro sostenido por un plano, pero habrá que recordar de nuevo que las hipótesis fundamentales de la teoría de la elasticidad dejan de verificarse en nuestro problema, no sólo para el caso de la rotu-

(1) A la misma conclusión han llegado Föppl y su discípulo Schwerd, operando sobre probetas semicilíndricas de hierro ó de acero, que colocadas con las generatrices en cruz se comprimían fuertemente. Desde que el diámetro de la huella excedía de 1,5 ó 2 milímetros, el área de la superficie de contacto era sensiblemente proporcional á las fuerzas de compresión correspondientes.

ra, que si es el que hay que prevenir, debe quedar siempre alejado en la práctica por amplio margen, sino hasta cuando las condiciones del trabajo son las usuales.

Cierto es que esta extralimitación no tiene lugar en todos los puntos del cuerpo, pero para aplicar correctamente la teoría, aun en las regiones donde los esfuerzos se mantienen dentro del intervalo elástico, sería preciso poder trazar la superficie divisoria y conocer sobre ella la repartición de los esfuerzos que determinara las condiciones en los límites de la integración de las ecuaciones fundamentales.

Por otra parte, las leyes aproximadas de que suele hacerse uso en el estudio de la resistencia de los materiales no podrían tener tampoco aplicación adecuada. La ley de repartición plana, tan usada en muchos casos, sólo puede justificarse entre ciertos límites cuando las secciones por donde las fuerzas se transmiten no varían sino de un modo gradual. A falta de comprobación experimental, cualquiera otra teoría dejaría siempre amplia entrada á lo arbitrario; alguna, adelantada, sin embargo, por persona competente, sería, francamente, inadmisibles. Bach, por ejemplo, en el caso de cilindro contra placa, supone que la presión se reparte siempre sobre el primero á todo lo largo del diámetro vertical sobre una superficie igual á la del contacto. Greco, que hace la cita, rechaza la hipótesis con razón y aun hace notar que quedaría desmentida por experimentos hechos por el propio Bach sobre un cilindro de plomo comprimido entre placas del mismo material.

No cabe, pues, dentro de nuestros conocimientos actuales, un análisis elemental completo del problema y si sólo comparar los esfuerzos medios que se desarrollan en las distintas secciones, y que pueden ser conocidos por la sola aplicación de las leyes de la Mecánica, con los que provocan la rotura en las pruebas ordinarias ó los que suelen ser resistidos en las obras.

Ahora bien, si se estudia en estas condiciones un cilindro ó una esfera en equilibrio bajo la acción de dos fuerzas iguales y opuestas, aplicadas á las generatrices ó puntos extremos de un mismo plano diametral, toda sección plana que pase entre los puntos de aplicación cortará á las fuerzas y estará sometida á un esfuerzo cortante total igual á la proyección sobre su plano de la resultante. Si llamamos, pues, α al ángulo de la sección con la horizontal, el esfuerzo cortante será, pues, $P \sin \alpha$ ó $p \sin \alpha$, total en el primer caso y referido en el segundo á la unidad de longitud de la generatriz. De todos los planos que correspondan al mismo α los que darán mayor esfuerzo medio serán, por consiguiente, los que presenten sección más reducida, que serán, precisamente, los que pasen por uno de los puntos ó generatrices de contacto.

Síguese de aquí que para los cilindros el máximo esfuerzo cortante medio será para todos los planos igual á $\frac{p}{2r}$, mientras que en la esfera tendrá por expresión $\frac{P}{\pi r^2 \sin \alpha}$, y sería máximo en el contacto mismo aunque no llegaría á ser infinito, como indica la fórmula, gracias, precisamente, á la deformación.

El esfuerzo cortante, tal como acaba de ser valorado, no es, sin embargo, el que provoca la rotura, pues suele considerársele contrarrestado en parte por una fuerza proporcional á la compresión que obraría á la manera del rozamiento, á la que se da de ordinario este mismo nombre y se evalúa haciendo uso del mismo coeficiente. Conviendría, sin embargo, hacer la debida distinción y buscar en la experiencia directa la justificación de los valores numéricos adoptados, porque no puede llamarse con todo rigor rozamiento sino á las fuerzas desarrolladas en las superficies de contacto de dos cuerpos diferentes. Es á estas fuerzas á las que se refieren las mediciones efectuadas, que sólo por

analogía pueden extenderse á fuerzas desarrolladas *antes de la rotura* y que se supone han de añadirse á las resistencias moleculares puramente tangenciales.

Conformándonos, sin embargo, con el uso, después de hechas las precedentes reservas, admitiremos la existencia de esa fuerza que parece probable que se desarrolle, aunque quede incierta su evaluación, y representaremos por R el coeficiente que interviene en su medida. El esfuerzo tangencial que hubiera de provocar la rotura sería, según esto,

$$p (\sin \alpha - R \cos \alpha) \quad \text{ó} \quad P (\sin \alpha - R \cos \alpha)$$

y referido á la unidad de superficie

$$\frac{p}{2r} (1 - R \cotang \alpha) \quad \text{ó} \quad \frac{P}{\pi r^2} \left(\frac{1}{\sin \alpha} - \frac{R \cotang \alpha}{\sin \alpha} \right)$$

debiendo tener presente que estas expresiones deberán ser siempre nulas ó positivas por lo que R tomará valores crecientes con α , hasta un cierto límite que corresponderá al ángulo cuya tangente sea igual al valor de R que consideramos.

Si se toman valores de α mayores que ese límite, se ve inmediatamente que el esfuerzo cortante medio aumenta en el cilindro hasta alcanzar su valor máximo en el plano diametral vertical. En la esfera la fórmula daría para el aumento un límite, si R tiene valor adecuado. Derivando con relación á α correspondería, en efecto, un máximo para los valores que satisficieran á la ecuación

$$3R + R \cos 2\alpha - \sin 2\alpha = 0$$

que haciendo

$$\cos 2\alpha = x$$

correspondería á

$$(1 + R^2)x^2 + 6R^2x + 9R^2 - 1 = 0,$$

ecuación que sólo tendrá raíces reales cuando se tenga

$$R < \frac{\sqrt{2}}{4} = 0,3714.$$

Ahora bien, si R tiene un valor mayor como de ordinario se supone en la práctica, el crecimiento del esfuerzo medio no se detendrá tampoco, sino cuando el plano sección llegue á ser vertical. La sección vertical será, pues, en ambos casos la más peligrosa desde el punto de vista del esfuerzo cortante.

En cuanto á las dilataciones más intensas, deberán ser normales á la dirección de las presiones dominantes que las provocan, y que deben estar con ellas en la relación indicada por el coeficiente de Poisson, cuya constancia será probablemente alterada, una vez excedido el límite de elasticidad. Estas dilataciones, equivalentes á tensiones, deberán, por consiguiente, también tender á romper el cuerpo según un plano diametral vertical.

Vemos, pues, que las dos acciones de tensión y de esfuerzo cortante deben conducir al mismo resultado: á la rotura del cuerpo por una de las secciones que vendrían indicadas por la simetría y por aquella precisamente por la que en la práctica se produce.

Así resulta, en efecto, de los interesantes experimentos efectuados por el profesor Greco en el laboratorio de ensayo de materiales de la Real Escuela de Aplicación de Palermo y de los cuales da cuenta en un interesante trabajo al que más atrás hemos ya aludido (1). Efectuáronse las pruebas sobre cilindros y placas de cemento y de mortero que, ó bien se comprimían entre sí, ó bien los cilindros solos, ya en contacto directo con los platillos de acero de la prensa ó con interposición de hojas de cartón ó de plomo.

(1) *Giornale del Genio Civile*, 30 de Septiembre de 1914.

Los resultados no han variado gran cosa con el modo operativo: las cargas medias de rotura para cilindros de igual material y diámetro no eran muy diferentes de uno á otro caso, y en casi todos ellos son los cilindros los que se han roto en la dirección indicada por la teoría.

En cuanto á las cargas totales de rotura fueron, próximamente, proporcionales á las secciones diametrales correspondientes y casi iguales á vez y media las que corresponderían á la misma superficie rompiéndose por tracción. De aquí cree poder deducir el experimentador, que es la tensión, en efecto, la que actúa en la rotura, y confirma su opinión por el hecho de que, calculadas las presiones máximas que resultan para la zona de contacto, ya sea por la fórmula de Grashof-Culmann ya por la de Hertz, los números á que se llega son muy superiores á las cargas de rotura que se obtienen rompiendo á la compresión cubos de ensayo del mismo material.

La conclusión es verosímil, pero su fundamento nos parece insuficiente. Es verosímil porque las tensiones, aunque desigualmente repartidas sobre la sección diametral, deben ser menores que las compresiones, y por eso no debe extrañar que el límite de rotura se aleje cuando se toman como cargas las fuerzas actuantes, tanto más cuanto que es sabido que los valores encontrados para la resistencia á la tracción de los cementos y morteros son inferiores á los verdaderos, y muy próximamente la mitad, si hubiéramos de considerar como exactos los que resultan de los ensayos á la flexión.

No nos parecen suficientes las indicaciones que se deducen de las fórmulas de Hertz y de Culmann, porque habría que demostrar previamente que estas fórmulas eran aplicables al momento de la rotura. Ya hemos indicado más atrás que, para ese caso, aun la última de estas fórmulas podría ser deficiente, y esto no sólo porque el ancho del contacto podrá ser excedido en la realidad, sino porque al producirse deformaciones permanentes se altera la distribución de las presiones, tendiendo á una uniformidad cada vez mayor. El mismo Greco confiesa que, al tratar alguna vez en sus experimentos de determinar la anchura de la zona de contacto, ha llegado á valores que se aproximaban mucho á los indicados por la fórmula de Grashof-Culmann, aunque no se cree autorizado para sacar partido de esta concordancia, por crear que la deformación local se hubiera exagerado por el hecho mismo de la rotura.

Ahora bien, los resultados obtenidos con la fórmula de Grashof-Culmann que Greco presenta en uno de sus cuadros son, para una serie de cilindros de pasta pura de cemento y de diámetros diferentes, los que se copian á continuación:

Diámetro en centímetros.....	2,5	5,0	7,5	10,0
Presión máxima.....	867,6	718,9	695,3	713,4

de donde resulta un valor medio para la presión de rotura de 748,8 kilogramos por centímetro cuadrado. Pero esta presión máxima, calculada admitiendo la proporcionalidad entre las reacciones moleculares y las deformaciones correspondientes, supondría una presión media de 499,2, mientras que la carga de rotura á la compresión fué para el mismo cemento de 504,5.

La casi igualdad de las cifras no es tampoco prueba plena de que la rotura haya tenido lugar por compresión, dada la inseguridad del cálculo y dado, sobre todo, que la misma rotura á la compresión de las probetas de ensayo puede ser debida, y parece lo más probable, á efectos secundarios; pero siempre cabría la duda de si la rotura de los cilindros pudiera haber tenido lugar por esfuerzo cortante, como suele creerse que ocurre con las probetas mencionadas, y entonces, la asimilación á éstas sería la más lógica, y el límite de compresión el que debería ser to-

mado para los cálculos de resistencia como término de comparación.

El mismo Greco cita también otro hecho que viene á confirmar la idea de que la rotura del cilindro depende muy poco de las condiciones del contacto, y mucho de las dimensiones generales del cuerpo. Son las experiencias de Bach efectuadas sobre probetas de granito, á las que más atrás hemos aludido. En ellas el cilindro no es completo, sino que queda limitado por dos generatrices distantes entre sí 350 milímetros, terminándose el bloque por planos que con el de las dos generatrices vendrían á formar un paralelepípedo recto rectangular. La carga de rotura, aunque creciente con el radio, tiende cuando éste aumenta hacia un límite al que rápidamente se aproxima. Parece deducirse de aquí que, aunque la rotura llegara á iniciarse en la zona de contacto, sería preciso para que se propagara al resto del cuerpo que las dimensiones de éste fueran suficientemente débiles para ceder ante los esfuerzos secundarios, únicos que romperían definitivamente la solidaridad entre las distintas partes del bloque. Por otra parte, el beneficio de un gran radio, que según las fórmulas habría de reducir sin límite la presión máxima, no podría aprovechar en la experiencia desde que la anchura teórica de la zona de contacto excediera de la distancia entre las generatrices extremas.

Pero si este nuevo argumento contribuye indudablemente á restar importancia á la compresión como tal en el fenómeno de la rotura, todavía quedaría indecisa la cuestión de si es la dilatación ó el deslizamiento el efecto predominante. Aun pudiera ocurrir que el predominio fuera de uno ú otro, según la naturaleza del material, y quizás en esta vía hubiera que buscar la explicación de una circunstancia interesante observada por Greco en sus experiencias. Es el caso que, mientras los cilindros fabricados con mortero parece que han presentado siempre una línea de rotura única en la dirección teórica, con pequeños aplastamientos en los puntos de contacto con las placas, los de pasta de cemento puro, además de romperse según el plano diametral, presentaban otras dos superficies de fractura simétricas con relación á la principal, y hacia la cual volvían la convexidad en la zona central y la concavidad en las extremas, con presencia menos marcada de los aplastamientos terminales, ó más bien apareciendo en estos puntos el material más astillado que aplastado.

Podría ser la razón de la diferencia que el mortero se hubiera roto por esfuerzo cortante y el cemento por tracción, bien porque en cada material fueran esos límites de resistencia los primeros alcanzados, bien porque la repartición de los esfuerzos fuera distinta de uno á otro caso, lo que nada tendría tampoco de extraño, pues sin gran dificultad se comprende que las hipótesis de homogeneidad é isotropía habrían de admitirse siempre con menos reservas para el cemento que para el mortero.

Si estas consideraciones tuvieran algún valor, bien se podría pensar que las dilataciones transversales hubieran de encontrar en el cemento mayor facilidad para propagarse, dando lugar, por consiguiente, á esfuerzos de tensión mayores, mientras que en el mortero, debiendo transmitirse á través de materiales distintos y poseyendo tal vez distintos coeficientes de Poisson, podrían ser compensadas en parte ó distribuidas en suma de modo más uniforme ó con intensidades relativamente más reducidas. Los esfuerzos cortantes, más directamente ligados á las fuerzas de compresión, no admitirían reducciones semejantes y llegarían por eso á preponderar en el mortero, mientras que en el cemento quedarían por bajo de la resistencia del material.

A esta diferencia en la propagación de dilataciones y deslizamientos podría igualmente referirse tal vez la independencia relativa que parece existir entre las dos especies de resistencia,

como con gran copia de datos ha tratado de demostrar Feret.

Tan interesantes cuestiones están, como vemos, bastante lejos de quedar resueltas de un modo decisivo. El número de observaciones parece todavía pequeño, y no han sido aún suficientemente variadas las condiciones de experimentación, para que las conclusiones tengan suficiente peso. El ensayo de morteros de distinta riqueza, el de cilindros de directrices de formas diferentes ó apoyados sobre más de una generatriz, las discontinuidades ó el refuerzo de las secciones resistentes y otras análogas disposiciones experimentales podrían llegar, en efecto, á dar alguna idea de las causas determinantes de la rotura y aun de la distribución de los esfuerzos, revelada quizás con más ó menos precisión para las tensiones del cemento, si no fueran erróneas las ideas apuntadas, por las formas muy características de esas superficies de rotura que, según los experimentos de Greco, acompañan á la principal.

En espera de datos más precisos, fuerza será acomodarse todavía en la práctica á las dimensiones ya experimentadas y á las fórmulas empíricas usuales.

III

Un último punto habíamos anunciado al principio de esta Memoria, y es el del estudio de las resistencias que se oponen al movimiento relativo de los cuerpos sometidos á las condiciones ya definidas. No lo trataremos sino someramente.

Si los contactos han de mantenerse, y abstracción hecha de los trabajos de las fuerzas aplicadas fuera de los contactos ó normalmente á ellos, las resistencias habrán de reducirse á rozamientos que podrán ser de dos clases: rozamientos de deslizamiento y rozamientos de rodadura. Las leyes del rozamiento de deslizamiento son bastante conocidas, y no hemos de entrar en su discusión: si el deslizamiento del contacto tiene lugar á lo largo de una línea, como el rozamiento parece depender tan sólo de la presión total, el problema no diferirá del de los rozamientos ordinarios de superficies de dimensiones finitas, igualmente cargadas, que deslizan paralelamente á sí mismas siguiendo trayectorias de igual longitud.

Teóricamente al menos, no hay diferencia ninguna esencial, y en la práctica el problema carecería de importancia, pues cuando en las máquinas ó en las construcciones han de rozar cuerpos diferentes, se procura que las superficies de apoyo sean suficientes para que las deformaciones no hagan el movimiento más premioso.

Pero podrían presentarse deslizamientos sin desplazamiento del contacto. Es lo que ocurriría si uno de los cuerpos girara apoyado en el otro alrededor de la normal común. Supongamos que el contacto tenga lugar entre dos puntos umbilicales; su forma será la de un círculo y la distribución de las presiones alrededor del eje de giro se mantendrá constante durante el movimiento. Esta distribución ha sido ya estudiada en la primera parte de esta Memoria, y ya allí se ha señalado cuán imperfectos son actualmente nuestros conocimientos en la materia.

Para calcular el rozamiento en este caso, supuesta conocida la ley de distribución, habría que determinar la integral

$$2 \pi R \int_0^{\omega} f \omega \rho^2 d \rho,$$

en la que ω representa el ángulo de giro, R el coeficiente de rozamiento y f y ρ tienen la significación que se les dió anteriormente. Es de observar que como las mayores presiones corresponden al centro del contacto, estos rozamientos serán siempre débiles. Suponiendo, en efecto, las presiones uniformemente re-

partidas, lo que habría de dar evidentemente un máximo, se tendría para valor de la integral

$$\frac{2}{3} \pi R f \omega \rho^3 = \frac{2}{3} R P \omega \rho$$

cantidad del mismo orden de pequeñez que ρ .

Si en vez de una repartición uniforme se admitiera la que deriva de la teoría de Grashof y Culmann, la expresión sería la misma, con la sola diferencia del coeficiente numérico que se reduciría á $\frac{8}{15}$. De adoptar la de Hertz tampoco variaría más que el coeficiente, que sería entonces

$$3 \int_0^1 u^2 \sqrt{1-u^2} du = \frac{3\pi}{16}.$$

Los tres valores encontrados se encuentran comprendidos entre 0,53 y 0,67, lo que demuestra la poca influencia que ejercen los distintos modos de repartición.

Cuando los puntos de contacto no fueran umbilicales en ambas superficies, la zona común variaría de forma durante el movimiento y también, por consiguiente, la distribución de las presiones; los cálculos se complican, y además del rozamiento propiamente dicho, intervendría en el fenómeno el trabajo de deformación resultante de estos cambios. Es fácil demostrar que la resistencia es en estos casos del mismo orden de magnitud que la longitud de la elipse que limita el contacto. Admitiendo hipótesis análogas á las que sirven de base á las teorías de Grashof y Culmann, Leauté ha llegado, para representar el momento del rozamiento con relación al centro del contacto, á la expresión

$$0,085 RPl$$

siendo l la longitud de la elipse. De la teoría de Hertz se deduciría con las mismas notaciones

$$0,093 RPl.$$

En el caso límite de presiones uniformemente repartidas, se tendría:

$$0,106 RPl.$$

Si se hiciera $l = 2 \pi \rho$ se recaería en las fórmulas del caso anterior.

Pasemos ya á ocuparnos de la resistencia á la rodadura. Es esta una cuestión que, como afirma Lecornu (1), es de las más oscuras de la Mecánica aplicada. No hay acuerdo ni sobre su causa ni sobre sus leyes y De Mauni ha llegado á decir:

«No existe fuerza pasiva, específica, general, uniforme que pueda llamarse resistencia á la rodadura. En ausencia de una causa externa cualquiera, la resistencia á la rodadura no existe.»

La resistencia aparente provendría, según este autor, de adherencias accidentales, de la resistencia del aire y, sobre todo, de la rugosidad de las superficies que podrían ser causa ya de aplastamientos, ya de desplazamientos de las presiones con pérdida en uno ú otro caso de fuerza viva.

Ciertamente que todas estas circunstancias variables é imprecisas tienen su importancia, y aun podría admitirse que en los casos más ordinarios de la práctica sean ellas las dominantes en el fenómeno, quedando como oscurecida ó casi anulada la influencia de la naturaleza y de la forma de los cuerpos en contacto; porque si éstos fueran absolutamente rígidos y perfectamente lisos, ninguna resistencia parecería justificada; pero á la manera como tampoco existiría rozamiento de deslizamiento entre las superficies ideales de los sólidos invariables de la Mecánica racional.

(1) *Dynamique appliquée*, Paris, 1908.

En la práctica, sin embargo, acabamos de ver que los cuerpos naturales están sujetos á deformaciones y, si éstas son muy pequeñas para fuerzas débiles, su importancia aumenta con las cargas y, cuando éstas sean considerables, como ocurre para los rodillos de las compuertas de los pantanos, la influencia de las deformaciones puede hacerse sentir con mayor intensidad, alcanzando valores que sean ya comparables y aun superen á las otras causas de resistencia. El punto sería entonces tanto más digno de estudio, cuanto que en tales casos la interposición de los rodillos, que siempre suponen una complicación, tiene precisamente por objeto el disminuir resistencias.

Si se reflexiona sobre el efecto que las deformaciones pueden producir, todavía no aparece muy claro como de ellas se deriva una resistencia al movimiento, por lo menos mientras se trate de deformaciones elásticas, pues si la deformación exige un esfuerzo y consume una cierta cantidad de energía, esta energía será devuelta cuando la materia recobre su forma primitiva. Esta devolución, sin embargo, no será completa, en primer lugar porque no es instantánea, y en segundo porque la deformación no consiste sólo en contracciones en el sentido de la normal á la superficie de contacto, sino que va acompañada de dilataciones transversales, y por una y otra causa las fuerzas de resorte, que van quedando libres durante el movimiento, no siempre encontrarán superficie á qué aplicarse, dando origen á vibraciones que se propagarán por el cuerpo ó se disiparán en el medio.

Se concibe, sin embargo, que estas pérdidas puedan ser muy pequeñas y, desde luego, considerablemente inferiores á las resistencias resultantes de causas accidentales; pero cuando su importancia es innegable es, cuando traspasado el período elástico, la deformación llega á ser permanente, pues entonces ninguna devolución puede esperarse de lo que podríamos llamar su componente plástica, y persistirían además las pérdidas inevitables procedentes de su componente elástica.

Existe, pues, una resistencia á la rodadura, pero sus verdaderas leyes son poco menos que desconocidas. Para darse cuenta de ella en la práctica se ha tratado de estudiar la fuerza que, aplicada tangencialmente á la sección recta de un cilindro cargado, inicia y conserva el movimiento. Un momento antes de romperse el equilibrio, la carga y la fuerza, que le supondremos paralela, tendrán una resultante vertical, cuya distancia al eje del cilindro recibe el nombre de *parámetro de rodadura*.

Parece haber sido Coulomb el que primero se ha ocupado en 1781 de la determinación de ese parámetro, llegando como resultado de sus experiencias, muy poco numerosas por cierto, á la conclusión, aunque en otra forma expresada, de que el parámetro en cuestión es independiente del diámetro. A igual resultado llegó el general Morin en experiencias posteriores, pero Dupuit más tarde creyó encontrar que era independiente de la velocidad y del ancho del contacto, pero proporcional á la raíz cuadrada del diámetro del cilindro, leyes que parecen confirmadas por las experiencias hechas hacia mediados del siglo pasado por Poirée en el ferrocarril de Lyon.

No parece, sin embargo, que unas y otras experiencias, por la escala reducida en que algunas de ellas se han realizado y por la falta de garantía de que hayan sido eliminadas todas las influencias accidentales, puedan ser fundamento suficiente para una teoría un poco segura. Faltaría en todo caso conocer la naturaleza precisa de la resistencia para ver hasta qué punto podrían extenderse las fórmulas empíricas encontradas más allá de los límites de la experimentación.

Según la ley de Dupuit, por ejemplo, el parámetro sería *independiente* del ancho del contacto, pero proporcional á la raíz

cuadrada del diámetro. Ahora bien, según las fórmulas de Hertz aplicadas al caso, el ancho del contacto es precisamente proporcional á esa raíz cuadrada. Es verdad que dicho ancho es, según las mismas fórmulas, proporcional también á la raíz cuadrada de la carga; pero si en las experiencias éstas hubieran variado menos que los radios, la influencia de esa raíz cuadrada de la carga, que hubiera podido parecer *a priori* muy poco probable, habría pasado inadvertida y habría quedado englobada en la divergencia siempre concedida á los errores experimentales.

Si en definitiva conviniéramos en llamar resistencia á la rodadura, á la que de la existencia de las deformaciones depende, ó si redujéramos al menos el problema á la parte de resistencia á ellas debidas, es claro que el ancho del contacto no podría ser despreciado. Es, en efecto, casi evidente que el parámetro de que se trata no puede ser mayor que la mitad de ese ancho, pues cuando así ocurriera, la resultante de la carga y de la fuerza motora caería fuera de la base de sustentación. No parece que deba ser ni aun igual, mientras se trate de deformaciones elásticas, pues algo habrá que esperar siempre en este caso de las fuerzas de resorte que se desarrollan en el contacto; pero por las razones apuntadas más atrás no podría admitirse tampoco que llegara á ser, ni aun en este caso, rigurosamente nulo.

Fuera ya del período rigurosamente elástico, un límite inferior perfectamente determinado parece probable, á saber: el semiancho de la deformación plástica, que obedecerá quizás también en su origen á la fórmula de Hertz, como parecían demostrarlo las experiencias de Bach; pero que acaba al fin por ser proporcional á las cargas, como se deduce de los ensayos de dureza.

Si estas inducciones fueran exactas, parece probable que el parámetro en estudio fuera igual al semiancho de contacto multiplicado por un factor variable y siempre creciente que, empezando por cero, acabara por ser igual á la unidad cuando las cargas excedieran de determinado límite. La resistencia que de aquí resultaría, y es un punto de la mayor importancia, crecería en tal caso mucho más deprisa que la carga, mientras el rozamiento de deslizamiento crece, como es sabido, con la carga misma, de suerte que, aun siendo para presiones débiles muy superior á aquélla, podría verse superado para las altas presiones, circunstancia muy de tener en cuenta cuando se trata precisamente de facilitar el movimiento.

Será, pues, siempre muy interesante en tales casos limitar las deformaciones, aunque, como se haya visto, puedan alcanzar valores de cierta importancia sin provocar la rotura; pero para quedar siempre dentro del intervalo elástico ó para no excederlo demasiado, sería preciso aumentar las dimensiones de los cuerpos, que habrían de alojarse en espacios reducidos que no sería posible aumentar tampoco sin aumentar al mismo tiempo las fuerzas actuantes, con los que se estaría encerrado entre condiciones contradictorias, de las que habría que procurar sacar el mejor partido posible.

Para proceder con seguridad en la elección, será preciso conocer á fondo el fenómeno, y éste, como acabamos de ver, se encuentra todavía envuelto en muchas nebulosidades. Por eso ha de ser también la conclusión de esta tercera parte, como de toda esta Memoria, la necesidad de una experimentación minuciosa y metódica que ponga en luz tantos extremos oscuros.

Ella siempre es la madre de todo conocimiento cierto, y á ella habrán de acudir siempre los que hayan de arrancar sus secretos á la Naturaleza, para establecer sobre el mundo aquel dominio del hombre que las más antiguas tradiciones señalan como ideal de la especie, condensado en aquellas palabras divinas: «Id y poblad el mundo y domadle».