

cualquiera. Aparecen así, en forma amplísima, las curiosas propiedades de esa transmisión sucesiva ó irradiación de flexiones, esfuerzos normales y tangenciales. Degeneración de último orden de esas propiedades, reflejadas por una serie de rectas focales, son las tan conocidas en las vigas rectas de muchos claros.

Mediante esas leyes de propagación obtenemos para cualquier arco un sistema de tres ecuaciones que con grandísima facilidad proporciona los valores de los momentos extremos y del empuje. De esas expresiones primordiales deducimos también con gran sencillez las ecuaciones de las líneas de influencia relativas á cualquier sección de la estructura y á cualquiera de las magnitudes de cálculo, momento flector y esfuerzos normal y tangencial.

Hecha así factible la investigación de los efectos de las más desfavorables combinaciones de sobrecargas móviles, logramos, también con el mismo grado de aproximación satisfactoria, evaluar los producidos por las causas permanentes, pesos muertos, variaciones térmicas, que á un tiempo afectan á toda la estructura. Establecemos primero con todo rigor una ecuación eliminante típica, que relaciona tres empujes consecutivos y los dos momentos de coronación de los pilares intermedios: cuando estos últimos son, como prácticamente sucede, insignificantes, resultan directamente determinados los empujes. Y conocidos éstos, se derivan todos los demás elementos de cálculo.

Además de esa forma típica de estructura estudiamos todas las degeneradas que corresponden á la introducción de rótulas entre pilares y arcos, ó dentro de éstos, sola ó combinada con la adición de tirantes. La mayor parte de esas formas tienen interesantes aplicaciones prácticas y la indeterminación primordial del orden $3n$ se reduce progresivamente hasta el cero en la cadena isostática de arcos articulados en sus zonas centrales.

Para que nuestro estudio sea completo no sólo en el orden especulativo, sino en el práctico, lo desarrollamos prolijamente para la forma muy usual de arcos parabólicos, de luces y flechas cualesquiera, sobre pilares también desiguales. Y para la más usual todavía, en la que se igualan las dimensiones de todos los elementos homólogos, reducimos el cálculo de las líneas de influencia al uso de unas Tablas que hemos formado, con las que el trabajo se limita á pocas y sencillísimas operaciones aritméticas.

Además de esta aplicación facilitamos la de otras formas, medio punto, arco quebrado en cubierta á dos aguas ó abuhardillada, que bien solas, bien combinadas con la degeneración viga recta, dan todos los tipos usuales de cubiertas metálicas ó de hormigón armado.

Permítasenos reivindicar la originalidad de nuestro trabajo. Los similares que conocemos, muy escasos en número y planteados, claro es, arrancando de igual base, el estudio de las deformaciones elásticas, pero desarrollados en formas muy distintas, son: métodos gráficos unos, sólo útiles en casos particulares y aun así de formidable complicación; analíticos otros, pero que no salen del terreno puramente especulativo, sin más solución que la de $3n$ ecuaciones. Ninguno alcanza ni la amplitud ni la factibilidad del nuestro que, sobre ofrecer la solución exacta, penosa aunque hacendera, proporciona la satisfactoriamente aproximada, de facilísima aplicación práctica. Si logramos ésto es gracias á la elección especial de incógnitas y de parámetros y á la orientación del cálculo en forma análoga á la que, tras varios años de tenaz estudio, nos permitió realizar el del pórtico múltiple, degeneración inmediata de la arcada y el de las estructuras trapeciales.

Madrid 10 de Octubre de 1915.

JUAN MANUEL DE ZAFRA.

Ingeniero Profesor de la Escuela de Caminos.

La mecánica aplicada y Castigliano

POR

DON PEDRO PÉREZ DE LOS COBOS

Ingeniero de Caminos, Canales y Puertos.

Con el elocuente discurso que copiamos á continuación ha inaugurado las sesiones de la Sección 8.^a, «Ciencias de aplicación» del Congreso de la Asociación española para el progreso de las ciencias celebrado en Valladolid, el ilustrado Ingeniero de Caminos, Canales y Puertos don Pedro Pérez de los Cobos, que la ha presidido. Tan notable disertación mereció unánimes aplausos de los oyentes; reciba también el nuestro más entusiasta y sincera felicitación. Nos hemos apresurado á publicarlo, seguros del agrado con que lo han de leer nuestros lectores.

Es un justo homenaje á Castigliano, cuyo fecundo principio ha revolucionado la ciencia de la ingeniería, arriponando antiguos y empíricos moldes. Muéstrase Pérez de los Cobos con su dominio de la materia un Ingeniero á la moderna, un apóstol de la nueva ciencia que Zafra ha aplicado y desarrollado en su libro, ciencia verdaderamente ingenieril, que da cumplida solución á todos sus problemas.

SEÑORES CONGRESISTAS:

Siempre pareció bien la modestia como distintivo que ser suele de varones bien nacidos y discretos. Mas es virtud que por su misma condición exige parquedad extrema y sumo tacto para alegada en favor propio, pues que peligra aparecer como falaz encubridora de la más refinada vanidad.

Por eso batalla mi ánimo perplejo; que si pequeño me siento al considerar el legítimo lustre que realza los nombres de los portavoces que en este Congreso capitanean las demás secciones, y fuera mi humano deseo manifestarlo así para disculpar anticipadamente la pobreza irremediable del discurso que comienzo; mi razón, impregnada de sincera modestia, me manda callarlo.

Otro motivo hay para ello: el honroso título profesional que ostento, causa única que acredita y justifica mi presencia aquí, impóneme por su dignidad, que estimo en tanto como mi vida, deberes que pugnan con toda extremada expresión de humildad. Nobleza obliga. Y vano sería todo intento de recabar mi personalidad individual para deslindar responsabilidades que realmente á mí solo incumben; mientras aquí permanezca, pese á toda protesta, seré el Ingeniero perteneciente á una Corporación que otros supieron hacer gloriosa.

Esos mismos deberes, quizá torpemente entendidos, indujéronme á ceder ante cariñosas instigaciones para ocupar este sitio. ¿Y cómo un técnico puede dignamente negarse á colaborar en la Sección de «Aplicaciones» de un Congreso que tiene por finalidad impulsar las Ciencias? ¿Cómo un profesional de la construcción, que á diario aplica principios de esas Ciencias, puede excusar su concurso? Inaudita audacia es en mí, sin duda, supuestas mis aptitudes y temperamento; mas con todo lo estimo un deber; razón suprema que tiene profundas raíces en el sentimiento, y lo cumpliré sin jactancia, pero también sin alardes de falsa modestia, cual corresponde al último de los Ingenieros que tiene el honor de dirigiros la palabra.

La Sección de «Aplicaciones», sabiamente dispuesta en el lugar postrero, compendia y complementa á las anteriores; sus hermanas en el Congreso. Aún es más. Decir «Aplicaciones de las Ciencias» es integrar en académico concepto la vida entera en toda la complejidad de sus múltiples aspectos: desde la manera industria del hogar hasta la colosal fábrica; desde la construcción rudimentaria hasta la más acabada obra de arte; desde la menuda operación comercial hasta el organismo económico

más complicado; la clínica, con cuánto encierran las prácticas de prevenir y curar; la moral y la política, procurando el perfeccionamiento del ciudadano y su buen Gobierno; todo, todo son aplicaciones de una Ciencia secular, diversificada, que en forma más ó menos explícita se transmite por herencia natural de padres á hijos, continuamente enriquecida de generación en generación merced al lógico estímulo que le proporciona su misma aplicación.

El hombre, utilizando sus propios medios y los exteriores con que la Naturaleza le brinda, *se ingenia* para dar satisfacción á sus necesidades, mayores cada vez, del modo más completo y más directo. Ese ingenio es facultad de combinar, ordenar, disponer los elementos que la Ciencia ya formada le ofrece, ó que el *genio* pueda sugerirle. ¿Y qué es el genio, sino el beso que en la frente del elegido deja la Ciencia ignota?

Si, pues, todo es Ciencia que la vida material utiliza acomodándola convenientemente á las necesidades, en nuestra Sección de «Aplicaciones» cabe cuanto es vida en sus exteriores manifestaciones. No tiene, sin embargo, tanto alcance. Examinando detenidamente el concedido á las restantes secciones, se advierte que parte de ese gran conjunto se halla en ellas, quedando la nuestra reducida, por exclusión, á casi únicamente lo que pudiérase llamar «Ciencia de la ingeniería».

Una es siempre la verdad; pero considerada desde puntos de vista distantes por unos y por otros, ofrece modalidades diversas, aspectos distintos, que la presentan como múltiple y varia. El sabio, cediendo á nobles impulsos del alma humana, que tiende hacia lo desconocido, persigue la verdad por ella misma, único medio de conseguirla tal cual es, sin mácula interesada que la impurifique. El técnico la recibe de manos del sabio y la moldea con su experiencia, procurando aplicarla á cuanto pueda ser útil á la sociedad; así la humaniza y gana en realismo cuanto pierde en pureza. El sabio se eleva hasta el medio en que mora el fin á que aspira; parece desprenderse de su envoltura mortal; se diviniza y crea; el técnico, hombre positivo, esfuerzase en que la huella del barro que lo compone quede impresa en cuanto toca, único modo de conseguir la utilidad que persigue. La verdad del sabio es ideal, grande, pura, pero inútil por sí misma; la del técnico es real, práctica, utilizable en grado sumo, pero impura y, por tanto, menos verdad.

Y así, del ayuntamiento de la verdad con la experiencia, nace la Ciencia del Ingeniero. La sargre bastarda que de lo experimental recibe es, sin embargo, la razón de su fuerza. No hallaréis en ella la exactitud de que blasonan las matemáticas puras; pero esa falta, que el tiempo con su continua labor de perfeccionamiento tiende á redimir, es hoy la causa permisora de que el avión mecánico cruce los aires, el barco los mares, la locomotora los continentes, el automóvil los valles y montañas; de que pueda aprovecharse la energía del agua en las corrientes, en las mareas y en las olas; la del astro que nos ilumina; la del viento; la oculta en las entrañas de la tierra; la eléctrica diseminada en el ambiente, y, en una palabra, es el fundamento sólido del progreso material, hermano gemelo del espiritual, aunque menos bello, constituyendo ambos de consuno el hermoso espectáculo que ofrecería la civilización en el siglo XX, si la destructora mano de la actual guerra, sublime cual ninguna pasada en lógica relación, no impusiera un *rictus* doloroso que anubla momentáneamente su soberbia grandeza nunca igualada.

Existe una manifestación de vida, á la vez fuente de ella inagotable, que por su excepcional importancia merece mención especial. Me refiero á la Agricultura, madre de todas las industrias. Muéveme, además, á ello la circunstancia de celebrarse este Congreso en Valladolid, centro el más populoso de la región

castellana, que lucha denodadamente en la actualidad por forzar su producción agraria á despecho de la falta de primordiales condiciones: suelo y clima.

Acaso el camino que para conseguirlo han emprendido los castellanos sea erróneo; acaso la visión de un inmenso pinar salpicado de raras manchas de cereales en sitios bien elegidos, y con importantes regadíos en las vegas, marcando ricos oasis que rompan la monotonía del conjunto, sea el porvenir de esta meseta central de nuestra España. El tiempo lo dirá. Mientras tanto, el colosal esfuerzo no es perdido; crea vida, temple los caracteres, y enriquece con sus conclusiones esa gran ciencia de aplicación, general resumen de todas, que denominamos «Ciencia Agrícola», contribuyendo así al acervo común de la humanidad. Adelante, pues, y reciba Castilla entera, y en particular Valladolid, el testimonio de admiración y respeto que siente mi alma, por su varonil entereza de luchador que despierta, por su hidalga hospitalidad y por su nobleza jamás desmentida, virtudes todas que rememoran su grande historia.

Pero basta de generalidades. De algo concreto he de hablar para corresponder debidamente al alto honor que este sitio presta. De algo que encaje en la finalidad del Congreso dentro de los límites de la sección de «Aplicaciones», y que por virtud propia encubra á guisa de manto protector mi desnudez. Y discuriendo sobre ello, di en el tema «La mecánica aplicada y Castigliano», asunto fecundo, propio de la ingeniería constructora, que me permite á la par, colmando así mis deseos, glorificar la memoria del sabio Ingeniero italiano, y rendir pleitesía á un compatriota eminente, el General de Ingenieros D. José Marvá, autor de un tratado de Mecánica aplicada, notable por su claridad y extensión, y digno de lugar preferente en la biblioteca de todo constructor.

No miréis el tema dicho como anuncio de un profundo juicio crítico, fuente de luminosas conclusiones; tampoco como amplio campo de investigación en el cual sólo es lícito que espiguen las autoridades acreditadas; pretendo únicamente difundir en breve y clara disertación el método general de cálculo de estructuras que el genio de Alberto Castigliano concibió; proclamar sus excelencias y contribuir de este modo á la propaganda científica, que es uno de los fines de nuestra Asociación.

Y es, por cierto, bien necesaria al objeto que persigo. Inexplicable parece que habiendo publicado el Ingeniero italiano en 1879 su *Teoría del equilibrio de los sistemas elásticos*, detallada exposición de su procedimiento, que redactó en francés, sea hoy conocido solamente por una exigua minoría de los técnicos españoles. Para muchos el célebre teorema del menor trabajo es prurito de mera erudición. Cúlpese á nuestra dependencia de Francia en lo científico, y más á la natural resistencia que todo molde nuevo encuentra para imponerse; razón ésta de extraordinario peso en el caso, si se considera que los métodos clásicos á derrocar cuentan más de un siglo de brillante historia sancionada por numerosas obras maestras, orgullo del progreso mundial. En Alemania, muy en boga actualmente merced al empleo científico del hormigón armado, no adquirió auge hasta entrado este siglo, á pesar de que un prestigio, tan notorio como Muller-Breslau, se puso á la cabeza del movimiento.

Entre nosotros es paladín de la idea el eximio Ingeniero don Juan Manuel de Zafra, actual profesor de la Escuela de Caminos, quien, en una serie de artículos publicados en 1913 en la *Revista de Obras Públicas*, expuso magistralmente cuánto es necesario y suficiente para el manejo de los principios del trabajo elástico. Que estas pobres palabras mías, que á menudo glosarán ese notable estudio, sean la esquila que convoca al creyente é invita al incrédulo.

Añeja murmuración es entre Ingenieros que la Mecánica clásica es deficiente; y si por tal Mecánica se entiende la estática que D'Alembert, con su inmortal principio, generalizó al caso dinámico, ella no lo negará, que no se oculta al buscar en las deformaciones elásticas las ecuaciones que en sí no halla cuando le son necesarias para fijar las indeterminadas. Mas motéjasela por acudir á sofisterías de *feliz idea*, y por contestar con frecuencia á lo que honradamente se le demanda, imponiendo condiciones no siempre admisibles, ó dificultando el problema en tales términos que más valiera callara. Y en verdad que no es calumnia. Contados serán los Ingenieros que ante la obligación de proyectar una obra importante no se han visto perplejos al tratar de establecer el concepto mecánico de la futura construcción; y no ciertamente porque á su inteligencia faltase claridad para ver el caso, sino porque en el catalogado casillero de la Ciencia clásica suele no existir casilla en donde encaje con precisión. Y vienen las claudicaciones, las analogías rebuscadas, y llega al fin á establecerse aquel concepto, porque la obra ha de ejecutarse, en forma que sólo es un grosero remedo de lo que debiera ser. Consecuencias: una desacertada distribución de material; una ciega reducción, que se titula prudente, de los coeficientes de trabajo, ocasionando sobrecoste importante; y con todo, un posible fracaso técnico.

Ejemplo práctico: Puente de un solo tramo de mucha luz, para un ferrocarril de cremallera de fuerte pendiente. Las condiciones locales recomiendan el empleo del hormigón armado. Se impone el estudio de un arco empotrado, disimétrico, y con sección variable según una ley complicada, puesto que es lógico aprovechar los tímpanos como elemento resistente á trueque de no perder las ventajas que ofrece la clase de fábrica adoptada. Brindo el problema al más aguerrido defensor del clasicismo. Ya está planteado, se dirá, é inmediatamente consultará cuantas mecánicas se han escrito, las de Bresse, Resal, Koeclin, Marvá y Granda entre ellas, y cuantos estudios especiales sobre arcos se han publicado en las revistas técnicas, por Collignon, Belliard, Pigeaud y otros; hallará ecuaciones complicadas, integrales imposibles, tablas facilitadoras para casos más sencillos; y tras impropia labor, habrá de confesarse que el problema es prácticamente insoluble. Procura entonces asimilarlo al arco simétrico, á la viga empotrada de altura variable ó constante, y no sería extraño que, llevado de su natural desconcierto, termine por estimarlo como viga recta simplemente apoyada. A este extremo llegó la Casa Hermebique para determinar el esfuerzo cortante y el momento flector en el cálculo del puente de Soissons, compuesto de arcos de 24 metros de luz rebajados al décimo.

Pero el problema del arco, se objetará, debe considerarse como excepcional en la Mecánica. Descendiendo de tan complicadas elevaciones á lo corriente, á lo que pudiérase llamar de uso diario, se hallan también deficiencias que no pueden satisfacer á un espíritu escrupuloso. Una viga metálica compuesta, tipo Warren ú Howe, ó en general, una viga en celosía de líneas superfluas, se calcula suponiéndola formada por yuxtaposición de otras varias estrictamente indeformables desde el punto de vista geométrico, entre las cuales se distribuyen las cargas de manera más ó menos ingeniosa. ¿Hay quien afirme que la construcción ha de comportarse, en todos y cada uno de sus elementos, con arreglo al supuesto en que fué calculada?

Las bóvedas de fábrica circulares y simétricas estúdiense por medio del polígono de presiones, que se determina de ordinario recurriendo á la regla empírica de Méry. Su sencillez, y el ser aplicable, en general, á los puentes que se construyen para carreteras, por ser las sobrecargas pequeñas relativamente á la carga permanente, explica la universal aceptación que tiene

entre los Ingenieros esta regla verdaderamente notable, si se tiene en cuenta que en ella interpretó su autor cuidadosas experiencias de Boistard, cuando la resistencia de materiales era casi desconocida como ciencia. Pero siempre es un empirismo que armoniza mal con la corrección matemática del resto del cálculo. Así piensa la técnica, y prueba elocuente es la tendencia á fijar, mediante articulaciones, los puntos de paso de las reacciones.

Otros muchos casos semejantes podrían hallarse registrando la usual compilación teórico-práctica del constructor, verdadero recetario que pone de manifiesto la escasa generalidad de sus procedimientos científicos.

Cada problema conocido tiene allí su solución sancionada por la experiencia. Si la receta falta, como acontece frecuentemente, habrá de suplirla el ingenio, eludiendo maliciosamente la dificultad ó abordándola con los medios teóricos de que dispone, no tan propicios como deseara y parecen brindársele.

El técnico véase así empujado á prescindir repetidas veces del cálculo, y puesto en tan cómodo camino, que fáciles éxitos le allanan, tiende á formarse un criterio personal basado en prácticas rutinarias, muy distinto del legítimo que su ciencia, en relación con su experiencia, debieran proporcionarle. Este peligro no es el mayor daño que el descrédito del cálculo lleva consigo, si lógicamente se circunscribe á una parte de los Ingenieros de espíritu analista que llegan por sí mismos á formarse aquel criterio más ó menos erróneo; es de mayor importancia el hecho de que dicho descrédito sea pregonado por los menos y aceptado por los más sin el detenido examen previo que tan primordial y delicada cuestión requiere.

Así se explica lo muy extendido que se halla el inconcebible radicalismo en favor de la práctica y en mengua de la teoría, como si contrapuestos fuesen por esencia dos conceptos complementarios que podrán aisladamente engendrar rutinarios constructores y sabios investigadores, pero que forzosamente juntos y en justa ponderación han de contribuir á la formación de un Ingeniero.

Precisa, para evitar este mal, robustecer los métodos de cálculo, dotándolos del prestigio de que hoy carecen. Y esto es posible merced á Castigliano.

Es falso el criterio fundamental que informa la Mecánica clásica. El equilibrio que establece entre unas fuerzas que amenazan y una estructura de figura geométrica supuesta rígida, dista del que la realidad nos presenta como final de un proceso entre unas causas que actúan y una construcción por ellas deformada. Se considera el problema como estático, siendo esencialmente dinámico. Se manejan fuerzas, entes de razón intangibles, y se prescinde de los recorridos que con ellas originan la energía, único agente real, activo, capaz de producir efectos materiales.

Esta es la característica de la escuela estática, de la Mecánica antigua.

La escuela dinámica, basada en la teoría de Castigliano y preconizada por el modernismo, en lugar de fuerzas dadas y de las que aviva la deformación, iguala trabajos que unas y otras producen. Las acciones exteriores, fuerzas y reacciones, al moverse trabajan y dan lugar á que se deforme la construcción, despertando su energía interna, producto de fuerzas interiores por recorridos, que ella almacena en forma potencial para devolverla íntegra en virtud de universal principio mecánico al cesar las causas.

Éstas, rompiendo un equilibrio inicial, imponen otro necesario mientras actúan, y al desaparecer, la construcción recupera el primitivo, siempre que las deformaciones se realicen dentro

del período de elasticidad perfecta, supuesto que subsistirá en cuanto he de decir.

Indicaré en pocas palabras la teoría de Castigliano y el método general de cálculo correspondiente, siguiendo con preferencia los ya citados artículos del Sr. Zafra, que, más modernos, suponen un progreso.

Mi objetivo no es precisar un procedimiento imposible de encerrar en los límites de un discurso, tanto por su extensión, habida cuenta de los distinguos y aclaraciones que necesita, cuanto por su forma, que requiere adecuados medios de expresión tan sólo compatibles con la pizarra y la tiza, compañeras inseparables del estudiante de Matemáticas; intento únicamente marcar solícito la orientación, destellar claridad suficiente para que vislumbre luz quien se crea ciego por hallarse á oscuras, acuciando sus sentidos á fin de conseguir un inmediato estudio que perfeccione el conocimiento entrevisto y le permita utilizarlo con fruto después en la práctica profesional.

Operando sobre los sistemas articulares, establece Castigliano las relaciones fundamentales que ligan el trabajo elástico desarrollado por la deformación con las fuerzas exteriores, y las extiende luego á los cuerpos sólidos en general, por virtud del concepto molecular físico-mecánico admitido para la composición interna de éstos, que los hace asimilables á los primeros.

Considerando un sistema elástico sometido á fuerzas gradualmente crecientes, demuestra que el trabajo de deformación es independiente de la ley de variación de aquéllas, é igual á la semisuma de los productos que se obtienen multiplicando los valores finales de cada fuerza exterior por su recorrido respectivo, proyectado en la dirección de la fuerza.

Supongamos una pieza prismática sometida á una serie de fuerzas, acciones y reacciones, representadas por sus valores finales, único aspecto que en la práctica corriente se aprecia, aunque para llegar al equilibrio la construcción las haya soportado como si fueran crecientes desde cero hasta la definitiva magnitud. Según su manera de obrar, definida por su dirección y la posición relativa del punto de aplicación, los trabajos desarrollados por ellas durante ese crecimiento han producido efectos diversos en la pieza sobre la cual actúan, que pueden clasificarse en cuatro grupos: compresión ó extensión longitudinal, transversal ó cortante, flexión y torsión.

Lo más frecuente es que este último falte, por encontrarse las fuerzas todas en un plano principal de la construcción; pero en el caso más general cabe considerarlo. Los esfuerzos exteriores correspondientes á estos efectos pueden agruparse del mismo modo, y se hallan así condicionados por la forma del recorrido que originan, lineal en unos y angular en otros, recorridos que la teoría general de la elasticidad, de todos conocida, define en función de la acción, fuerza ó momento, y de ciertos elementos dependientes, ya de la naturaleza del material que compone la pieza supuesta, ya de su forma geométrica: coeficientes de elasticidad, longitud, sección y momentos de inercia. Si suponemos ahora á estos elementos variables con la longitud contada á partir de uno de los extremos de la pieza prismática, quedará ésta sustituida por una estructura cualquiera que generaliza el problema.

Sumando los semiproductos de las cuatro series de esfuerzos dichos, por los recorridos definidos por la teoría general de la elasticidad, se obtendrá la expresión general del trabajo elástico gradualmente desarrollado, en función de una variable fundamental, la longitud de los elementos característicos de la estructura dependientes á su vez de dicha variable y de las fuerzas exteriores, acciones ó reacciones, conocidas ó incógnitas.

Pues bien; si derivamos parcialmente tal expresión con res-

pecto á una acción cualquiera exterior de las que actúan en la construcción considerada, sea fuerza ó momento, conocida ó no, se obtiene el recorrido de su punto de aplicación. Esta verdad, que se siente discurriendo sobre el concepto de la derivada, que hasta se palpa á la vista de la expresión del trabajo elástico que la origina, constituye el primer teorema de Castigliano, que su autor llama *de las derivadas del trabajo*, fundamento sólido de toda la teoría y fuente directa y fecunda de las más importantes aplicaciones.

Consecuencia de él es otro de universal renombre, llamado *del menor trabajo*, que se enuncia así: Las fuerzas elásticas que se desarrollan en el interior de un sólido, al pasar de un estado de equilibrio á otro, son en cada punto tales, que hacen mínimo el trabajo total de deformación elástica dentro de las condiciones de sustentación.

No es, en realidad, otra cosa que la aplicación á la teoría elástica del principio natural de la mínima acción. Un cuerpo que cae sigue siempre la dirección de la línea recta que lo une al centro de la tierra, por ser el camino más corto; un hilo, una varilla sometida á tensión creciente, se rompe por el punto de menor sección; un fluido cualquiera, y el sonido, el calor, la electricidad, etc., se extienden ó propagan prefiriendo las líneas de menor resistencia, es decir, economizando trabajo. Pues del mismo modo lo economiza el sólido al deformarse por imposición de agentes exteriores.

Este importante teorema fué ya presentido muchos años antes de que Castigliano lo demostrase. Monsieur Véne, Capitán de Ingenieros francés, enunció en 1818 un principio que, á pesar de ser erróneo, sirvió más tarde para descubrir el del menor trabajo.

Cournot, Pagani, Mossotti, Dorna, y principalmente Ménabréa, lo estudiaron, llegando el último á dar en 1868 una demostración que no satisfizo por falta de rigor. Cabe á Castigliano el honor de su descubrimiento.

En 1873, al revalidar en Turín su título de Ingeniero, lo demostró por vez primera con independencia del teorema de las derivadas del trabajo; y nuevamente después, en 1879, como consecuencia de él, en la obra titulada *Teoría del equilibrio de los sistemas elásticos*, fruto unificado de sus estudios.

Poco resta que decir. Establecidos los dos teoremas del trabajo de la deformación, se reduce en los demás la teoría á desarrollar en su vista la mayor parte de los problemas generales de que trata la resistencia de materiales, determinando las particularidades que ofrece en cada caso para facilitar las aplicaciones.

El procedimiento general de cálculo á seguir en la práctica puede sintetizarse en contadas palabras. Fórmese el trabajo total elástico gradualmente desarrollado en función de las acciones y reacciones que actúan sobre la estructura objeto del cálculo, y de los coeficientes y elementos que caracterizan su forma geométrica y la naturaleza de los materiales que la componen. Si, como es lo frecuente, se estiman las sustentaciones suficientemente rígidas y resistentes para que puedan suponerse prácticamente fijas, igualando separadamente á cero los recorridos de los puntos de aplicación de las reacciones correspondientes, que se obtienen derivando con respecto á ellas la expresión del trabajo total elástico, se tendrán tantas ecuaciones como reacciones incógnitas haya. Si no pudiera admitirse tal supuesto, como ocurre, por ejemplo, cuando un apoyo está constituido por una columna, ó pie derecho, de madera, el recorrido puede entonces expresarse, por un lado, en función de la reacción y de las características del soporte y, por otro, como derivada del trabajo de la estructura soportada, que igualadas proporcionan la desea-

da ecuación. Cuando los cambios de temperatura, en relación con la forma de sustentaciones, den origen á nuevas reacciones, introducidos sus valores incógnitos como variables en nueva fórmula del trabajo elástico consiguiente á nuevo equilibrio, se operará como en el caso general, condicionando los recorridos como las sustentaciones exijan.

Si por convenir al cálculo se estimasen como incógnitas algunas fuerzas interiores, normales, cortantes, ó momentos, expresado el trabajo elástico total en función de ellas, bastaría igualar á cero las derivadas parciales de tal expresión con relación á cada una de las incógnitas, puesto que los valores de éstas han de hacer mínimo aquel trabajo para obtener cuántas ecuaciones sean necesarias.

La generalidad del procedimiento es absoluta, trátase de estructuras isostáticas ó hiperestáticas; pero en la práctica conviene recurrir, en tanto como posible sea, á las ecuaciones de la estática, que son más sencillas.

Con las reacciones y las fuerzas dadas quedan conocidas todas las acciones exteriores, y entonces se pueden determinar las deformaciones en cada punto ó sección, utilizando el teorema de las derivadas del trabajo, siendo incógnitas los recorridos. Si en el punto ó sección considerados no actúa fuerza con respecto á la cual pueda efectuarse la derivación, se recurre á introducir la acción unidad, que permite en el equilibrio que produce determinar directamente los elementos de cálculo que entran en la derivada, según demuestra la teoría.

El procedimiento, además de general, ventaja que por sí sola lo justifica, es breve y sencillo en las aplicaciones prácticas. Pruébanlo la multitud de ejemplos en su mayoría considerados como complicados, que Castigliano y Zafra presentan, siendo el más notable para mí, quizá por el contraste favorable que ofrece con cuanto sobre él se ha escrito, el problema formidable del arco empotrado, disimétrico y con sección variable según una ley cualquiera, que el último de los dos citados Ingenieros resuelve por un método exclusivamente suyo, basado en la teoría del primero. Este caso, considerado prácticamente insoluble por la Mecánica clásica, si se acomete de frente es el reclamo más grande y legítimo que puede hacerse del nuevo sistema.

Sus más importantes ventajas para el técnico pueden resumirse diciendo que permite resolver todas las cuestiones sobre el equilibrio de las estructuras elásticas sin necesidad de recurrir á hipótesis enojosas y admitiendo, en cambio, todas las circunstancias que en cada caso puedan ocasionar variaciones en las fuerzas que actúan. Es consecuencia lógica de semejantes ventajas una mayor exactitud en el cálculo, que autoriza á forzar los coeficientes de trabajo, hasta hoy limitados en parte por la imperfección de los procedimientos empleados para valorar las fuerzas elásticas, abaratando así la construcción.

Yo me atrevo á recomendar á todos los Ingenieros que lo estudien con interés, á conciencia de que presto un señalado servicio á mi patria y á ellos. No cejen ante las dificultades que el saber de Castigliano, profundo matemático, les presente. La inteligencia del hombre es campo cultivado, en el cual el arado tiende á marchar siempre por los mismos surcos, oponiendo resistencia á todo intento de abrir otros nuevos ó ya abandonados. Acaso crea obedecer con ello al teorema del menor trabajo. ¡Lamentable error! Desgraciados de nosotros si no caminamos al compás que marca el progreso, aun á despecho de nuestras miserables fuerzas.

Y terminó. La amplitud del tema es tal, que su completo desarrollo llenaría las páginas de un voluminoso libro. Yo temo excederme, fatigando vuestra atención, hartando ya para

mí. Perdonad, y ayudadme á grabar en la Historia de la Ciencia, con indelebles letras de oro, el nombre inmortal de Alberto Castigliano.

He dicho.

LOS FERROCARRILES SUIZOS (1)

(A propósito de una obra de Mr. Placide Weissenbach, antiguo Presidente de la octava sesión del Congreso internacional de Ferrocarriles.)

POR EL

Dr. A. BONZÓN

Segundo Vicecanciller de la Confederación suiza.

(CONTINUACIÓN)

Habiendo creído descubrir el Gobierno italiano los inconvenientes ulteriores que podrían resultar al sustituir una administración de Estado á una Compañía particular, creyó oportuno se entablasen negociaciones. Una conferencia de delegados de ambos países, celebrada en Roma en Enero de 1903, no tuvo éxito. Finalmente, se llegó á un acuerdo por medio de correspondencia diplomática y ambos Estados firmaron la «convención de 16 de Mayo de 1903 referente á la transferencia á la Confederación de la concesión del Gobierno italiano á la Compañía del Jura-Simplón para la construcción y explotación del ferrocarril del Simplón». Según los términos de este Tratado, todos los derechos y obligaciones del Jura-Simplón dimanantes de los Tratados de 25 de Noviembre de 1896 y 2 de Diciembre de 1899, pasan á la Confederación (art. 1.º). Ésta ejercerá sobre los ferrocarriles federales que explotarán la línea la misma inspección que anteriormente efectuaba al Jura-Simplón (art. 2.º). Los litigios entre el nuevo concesionario y el Gobierno italiano se resolverán en la forma que se hacía precedentemente (art. 3.º). Cuando la Confederación construya el segundo túnel del Simplón, Italia estará obligada á establecer la doble vía entre Iselle y Domadossola (artículo 4.º). Los artículos 251, 252, 253 y 254 de la ley italiana relativa á Obras públicas, serán aplicables al nuevo concesionario (art. 5.º). Una serie de artículos (6.º al 10) reservan los derechos militares de Italia sobre la parte de la línea del Simplón situada en su territorio é indican el modo de ejercer los de acuerdo con los ferrocarriles federales y con el fin de no causar perjuicio ni á la seguridad ni á la regularidad de la explotación de la línea. Otra serie de artículos (11 al 14) crea una Delegación internacional para los asuntos del ferrocarril, compuesta de siete miembros suizos y siete italianos, que se reunirá periódicamente para presentar toda clase de proposiciones útiles al desarrollo del ferrocarril y para examinar las tarifas, horarios y las cuentas de explotación, construcción y balance de la línea. Si se presentan dificultades entre ambas representaciones, se recurrirá á la decisión de sus Gobiernos respectivos, lo que indica que la Delegación no tiene en medida alguna el carácter de Autoridad ejecutiva. Su papel está limitado á examinar é informar á ambos Gobiernos. El art. 15 dispone que Italia, quince años después de la inauguración del túnel á la explotación (1.º de Junio de 1906), tendrá derecho á recuperar la parte de túnel situada sobre su territorio. Por último (artículos 16 y 17), los subvencionantes italianos quedan exentos de la parte de subvenciones que no hayan hecho efectivas todavía.

(1) Véase el número anterior.