

REVISTA DE OBRAS PÚBLICAS

PUBLICACION TECNICA DEL CUERPO DE INGENIEROS DE CAMINOS, CANALES Y PUERTOS

DIRECTOR

D. MANUEL MALUQUER Y SALVADOR

COLABORADORES

LOS INGENIEROS DE CAMINOS, CANALES Y PUERTOS

SE PUBLICA LOS JUEVES

Dirección y Administración: Plaza de Oriente, 6, primero derecha.

ARCADA MÚLTIPLE

Esta interesante Memoria presentada al Congreso de la Asociación española para el progreso de las ciencias, celebrado en Valladolid, por el distinguido Ingeniero de Caminos, Canales y Puertos, profesor de la Escuela especial del Cuerpo, D. Juan Manuel de Zafra, es un extracto ó síntesis á grandes rasgos de un extenso trabajo que ocupa más de 150 páginas del segundo tomo, en prensa, de su magistral obra *Cálculo de estructuras*, cuyo primer tomo, que excede de 600 páginas acompañado de tres útiles y extensas tablas, se halla á la venta. Hemos de dar cumplida noticia bibliográfica cual se merece, pero como está relacionada con el libro dicha síntesis, no podemos por menos de anticipar á nuestro juicio crítico la felicitación más entusiasta á quien, como Zafra, se desvive por la Ciencia, á ella dedica su tiempo y sus afanes, siente especial satisfacción al ir resolviendo los problemas que se plantea dentro de su metódico plan, va construyendo su obra didáctica y costea íntegramente libro de edición tan costosa, la cual además dirige minuciosamente para que resplandezca una máxima claridad en figuras, signos y fórmulas y un gran esmero en la presentación. Es el fruto de largos años de estudio en libros y revistas y de detenida meditación; solución hay que persiguió varios años.

Tan hermoso trabajo, que permite resolver los más difíciles problemas de Mecánica con el mínimo esfuerzo personal, aplicando siempre el mismo principio y los mismos métodos de cálculo, nos recuerda otras síntesis grandiosas que la Ciencia conquistó para su progreso y la economía del pensamiento.

Y á esa síntesis ha contribuido Zafra con su labor personal, añadiendo mucho propio y genuinamente suyo á lo expuesto por otros Profesores que, seleccionado y adaptado á la Ciencia española, ha organizado con riguroso criterio y carácter ingenieril.

El primer tomo muchos lo conocen ya; del segundo, es un avance en forma de extracto la Memoria que á continuación copiamos.

Designamos así la estructura constituida por una serie de pilares verticales enlazados por arcos. Las formas de las fibras medias y las leyes de variación de momentos de inercia de los arcos, las longitudes y secciones variables de los pilares, así como los niveles de sus coronaciones, son cualesquiera.

El enlace de un pilar con los dos arcos que de él arrancan, es, en general, un mutuo empotramiento elástico debido á la continuidad del material ó al roblonado. Por degeneración puede el enlace entre dos de los tres ó entre todos los elementos convertirse en articulación. Los pilares, empotrados en sus cimientos, pueden también degenerar en articulados. Por último, el terreno en que esos cimientos se asientan puede tener una compresibilidad apreciable y ceder en sentidos vertical y giratorio.

Una arcada de n vanos ofrece una indeterminación hiperestática del orden $3n$, que las degeneraciones pueden reducir inclu-

so hasta el cero, haciéndola entonces isostática. En la forma general precisan $3n$ ecuaciones de Mecánica elástica que, con las 3 generales de la geometría, determinen las reacciones de la Tierra sobre la estructura, tres por cada uno de los $n + 1$ cimientos.

La aplicación directa del fecundísimo teorema del mínimo trabajo elástico resuelve directamente el problema. La derivada parcial de la función expresiva de dicho trabajo respecto á una cualquiera de las reacciones valora en magnitud y signo el recorrido correspondiente. La nulidad de éste, si el terreno es prácticamente incompresible ó su proporcionalidad á aquella misma reacción, permite establecer tantas ecuaciones como incógnitas. Mas, por desgracia, salvo contadísimos casos, resolver un sistema de $3n$ ecuaciones, cada una de las cuales contiene todas las incógnitas, es irrealizable.

Fraccionemos esa estructura, que por continuidad del material constituye una sola pieza de complicadísima forma, en una serie de estructuras elementales y establezcamos las condiciones de equilibrio estático y elástico de cada una por separado y de correlación entre las contiguas. Aunque así hemos de considerar por fuerza un número de incógnitas superior á $3n$, dichas condiciones han de formar, desde luego se ve, grupos escalonados de un modo sucesivo y de manejo relativamente fácil.

Aislemos un pilar del resto de la estructura, sustituyendo la acción total que ésta ejerce por tres componentes, dos fuerzas y un par, en los sentidos vertical, horizontal y giratorio. Está empotrado ó articulado en su basa el pilar, sea ó no compresible el terreno, fácil es calcular los recorridos de esas componentes: son las proyecciones vertical y horizontal de los movimientos elásticos y el ángulo girado por la coronación del pilar al deformarse la estructura. Esas proyecciones y ángulo han de ser idénticos en magnitudes y sentidos á los correlativos de los extremos izquierdo y derecho de los arcos que el pilar sustenta.

Sustituyamos ahora los dos empotramientos elásticos de un arco por una articulación y una deslizadera en las que actúen como causas exteriores las reacciones complementarias, fuerzas y pares, que, juntamente con los recorridos verticales y horizontales de esas sustentaciones ficticias, hagan idénticas las deformaciones del arco real y verdadero y del virtual así convertido en isostático. Resulta igualmente sencillo expresar en éste los recorridos angulares absolutos en ambos extremos y el lineal relativo de uno respecto del otro.

Tenemos así por cada pilar tres expresiones que valoran los recorridos v , h , α , en función de las reacciones y por cada arco otros tres valores, los giros δ izquierdo y δ , derecho y la varia-

ción Δl , de luz según la cuerda, funciones de los recorridos v , h , de los pilares que sustentan el arco y de las reacciones complementarias de éste, que son los dos pares extremos y la fuerza ó empuje dirigida según la cuerda. Esos seis valores v , h , α , ι , δ y Δl dependen, además, de las causas exteriores de todo género que pilares y arcos sufren.

En cualquier nudo intermedio la forzosa igualdad de los giros del arco á la derecha, ι y del á la izquierda, δ , proporciona una primera ecuación fundamental. Si los recorridos verticales, v , figuran como datos, por ser nulos ó corresponder á asientos accidentalmente producidos, intervienen en esa ecuación los cuatro momentos extremos y los dos empujes de los arcos que se consideran. Pero si en general son dichos recorridos v desconocidos, asientos proporcionales á las acciones desarrolladas sobre el terreno, entran entonces; al eliminar los valores de éstas, no ya cuatro, sino ocho momentos y no dos, sino cuatro empujes, correspondientes unos y otros á los dos arcos que anteceden y á los dos que siguen al nudo en estudio.

En esta ecuación para nada intervienen las dimensiones de los tres pilares á que afectan esos cuatro arcos, pero sí las de sus cadenas. Influye poderosamente la manera de enlazarse esos pilares con los arcos: si en todos degenera en rótula el empotramiento de la coronación, se igualan los momentos extremos derecho de un arco é izquierdo del siguiente y los ocho de la ecuación se reducen á cinco. El vulgar teorema de los tres momentos no es sino la última de todas las sucesivas degeneraciones del de los ocho, al reducirse los arcos á una pieza recta, los momentos de inercia variables á uno sólo y los empotramientos elásticos á simples apoyos.

En el caso verdaderamente típico en que pilares y arcos se empotran mutuamente, no es esa ecuación $\iota = \delta$ la que interesa, sino otras dos de las que es consecuencia: las que por expresar la igualdad de giros de la coronación del pilar y de los extremos de los arcos designamos por ecuaciones izquierda y derecha, $\alpha = \iota$ y $\alpha = \delta$. En cada una entran, en general, los cuatro momentos de los arcos sustentados por el pilar, más los dos que corresponden al adyacente, pero del lado opuesto al nombre de la ecuación. Si los recorridos v son datos, intervienen solamente los dos momentos del arco, á cuyo extremo se refiere, más el de la coronación del pilar. Y claro es que acompañan á los momentos los empujes de los arcos que entran en juego.

En estas ecuaciones aparecen, por la forma que les damos, coeficientes numéricos de trascendental importancia: son las *flexibilidades relativas*. Valoran, en efecto, la relación entre las caracterizadas por el coeficiente de elasticidad, el momento típico de inercia (el tomado como unidad para medir los variables) y la longitud del pilar por una parte y de cada uno de los arcos por otra. Decir que la flexibilidad izquierda de un pilar es nula, equivale á sentar que el arco de esa situación está perfectamente empotrado en él; hacerla infinita significa, por lo contrario, que entre los dos elementos existe una rótula perfecta sin rozamiento.

Esa perfección del enlace se refiere únicamente á la capacidad de éste para sufrir deformaciones giratorias, nula ó indefinida en esos casos extremos; nada prejuzga respecto á la deformabilidad en sentidos vertical ni horizontal.

Al igualar de una parte las variaciones de longitud de la cuerda de cada arco y de otra las de distancia entre las coronaciones de los pilares que lo sustentan, obtenemos para cada uno la ecuación de la cuerda. Comprende, en su forma general, los momentos y empujes del mismo arco y de los inmediatos á izquierda y derecha; si los recorridos v son datos, sólo entran en juego los de aquél.

La variabilidad de momentos de inercia de pilares y arcos

se traduce por ciertos coeficientes numéricos. Unos son independientes de la forma del arco y no difieren mucho de los valores 1 y 2, por exceso ó por defecto, degenerando en ellos cuando el momento de inercia se hace constante. Otros involucran á un tiempo la forma de la fibra media y la de variación de ese elemento. Igual carácter presentan tres parámetros, de la dimensión línea, que son los multiplicadores de los empujes y que se anulan al degenerar el arco en viga recta.

La influencia de las causas exteriores se valora en nuestras ecuaciones por una serie de magnitudes, todas de las dimensiones fuerza $\times$ línea, que llamamos momentos de causas. Tenemos en cuenta fuerzas ó momentos actuantes en arcos y pilares, aislados ó distribuidos según leyes cualesquiera; asientos ó alteraciones de distancia accidentalmente producidos; variaciones térmicas en unos y otros elementos, ya uniformes dentro de cada sección, ya variables de un modo lineal desde una fibra extrema hasta la otra. Todos esos momentos de causas son funciones bastante sencillas. Los relativos á las acciones exteriores resultan, cualquiera que sea la distribución, de los valores típicos correspondientes á una fuerza de valor unidad, en sentido normal ó paralelo á la cuerda del arco ó al eje del pilar y actuante en un punto cualquiera. Establecidas esas expresiones, que no son sino las de las líneas de influencia del momento de que se trate, resultan fácilmente por suma ó por integración los valores correspondientes á acciones finitas aisladas ó á las distribuidas dentro de una zona con arreglo á cualquier ley analítica ó gráfica.

Efecto de la subdivisión de la estructura hemos introducido incógnitas auxiliares que harían insuficientes las $3n$ ecuaciones elásticas si no aparecieran por aquella misma causa las condiciones de equilibrio estático de las secciones imaginadas. Así, cada nudo proporciona 3 ecuaciones y disponemos finalmente de $6n + 3$. Las incógnitas elegidas como independientes son los dos momentos extremos y el empuje de cada arco, en junto $3n$, más los recorridos vertical y horizontal y el momento flector en la coronación de cada pilar, ó sean $3n + 3$.

El problema, que parece haberse complicado al doblar y algo más el número de condiciones resolutorias, ofrece, sin embargo, relativa sencillez, dentro siempre de la dificultad inherente á su absoluta generalidad. Logramos eliminar, gracias á cierto artificio, un gran número de incógnitas, y en lugar de un sistema de $3n$ ecuaciones, sólo tenemos que resolver dos escalonados, uno con $n + 1$ y otro con n .

Aun así, justo es decirlo, la solución no pasa de ser teórica en el caso de absoluta generalidad. En la práctica, sin embargo, las estructuras son casi siempre simétricas y entonces fácilmente se reduce cada uno de esos sistemas á dos independientes, de grado alrededor de la mitad. Una arcada de cinco vanos exige, en suma, resolver por una parte dos sistemas triples y por otra uno triple y uno doble, cosa pesada, pero perfectamente hacederá. La simetría que procura tal simplificación se refiere únicamente á las dimensiones geométricas y elásticas; nada implica respecto á las causas, que pueden ser cualesquiera. Si también hay en éstas simetría, como sucede con los pesos muertos y variaciones de temperatura, la solución se facilita muchísimo más todavía.

Prácticamente también, las proporciones de los diversos elementos de la estructura son tales que con aproximación satisfactoria se pueden suponer nulos ciertos recorridos, á reserva de estudiar, como lo hacemos, los límites de los errores que eso implica. La solución del problema es entonces verdaderamente ingenieril, de fácil é inmediata aplicabilidad.

Sobre tal base aproximada y ya sin necesidad de que exista simetría, estudiamos la propagación por toda la estructura del trabajo elástico debido á una sola causa actuante en un punto

cualquiera. Aparecen así, en forma amplísima, las curiosas propiedades de esa transmisión sucesiva ó irradiación de flexiones, esfuerzos normales y tangenciales. Degeneración de último orden de esas propiedades, reflejadas por una serie de rectas focales, son las tan conocidas en las vigas rectas de muchos claros.

Mediante esas leyes de propagación obtenemos para cualquier arco un sistema de tres ecuaciones que con grandísima facilidad proporciona los valores de los momentos extremos y del empuje. De esas expresiones primordiales deducimos también con gran sencillez las ecuaciones de las líneas de influencia relativas á cualquier sección de la estructura y á cualquiera de las magnitudes de cálculo, momento flector y esfuerzos normal y tangencial.

Hecha así factible la investigación de los efectos de las más desfavorables combinaciones de sobrecargas móviles, logramos, también con el mismo grado de aproximación satisfactoria, evaluar los producidos por las causas permanentes, pesos muertos, variaciones térmicas, que á un tiempo afectan á toda la estructura. Establecemos primero con todo rigor una ecuación eliminante típica, que relaciona tres empujes consecutivos y los dos momentos de coronación de los pilares intermedios: cuando estos últimos son, como prácticamente sucede, insignificantes, resultan directamente determinados los empujes. Y conocidos éstos, se derivan todos los demás elementos de cálculo.

Además de esa forma típica de estructura estudiamos todas las degeneradas que corresponden á la introducción de rótulas entre pilares y arcos, ó dentro de éstos, sola ó combinada con la adición de tirantes. La mayor parte de esas formas tienen interesantes aplicaciones prácticas y la indeterminación primordial del orden $3n$ se reduce progresivamente hasta el cero en la cadena isostática de arcos articulados en sus zonas centrales.

Para que nuestro estudio sea completo no sólo en el orden especulativo, sino en el práctico, lo desarrollamos prolijamente para la forma muy usual de arcos parabólicos, de luces y flechas cualesquiera, sobre pilares también desiguales. Y para la más usual todavía, en la que se igualan las dimensiones de todos los elementos homólogos, reducimos el cálculo de las líneas de influencia al uso de unas Tablas que hemos formado, con las que el trabajo se limita á pocas y sencillísimas operaciones aritméticas.

Además de esta aplicación facilitamos la de otras formas, medio punto, arco quebrado en cubierta á dos aguas ó abuhardillada, que bien solas, bien combinadas con la degeneración viga recta, dan todos los tipos usuales de cubiertas metálicas ó de hormigón armado.

Permítasenos reivindicar la originalidad de nuestro trabajo. Los similares que conocemos, muy escasos en número y planteados, claro es, arrancando de igual base, el estudio de las deformaciones elásticas, pero desarrollados en formas muy distintas, son: métodos gráficos unos, sólo útiles en casos particulares y aun así de formidable complicación; analíticos otros, pero que no salen del terreno puramente especulativo, sin más solución que la de $3n$ ecuaciones. Ninguno alcanza ni la amplitud ni la factibilidad del nuestro que, sobre ofrecer la solución exacta, penosa aunque hacedera, proporciona la satisfactoriamente aproximada, de facilísima aplicación práctica. Si logramos esto es gracias á la elección especial de incógnitas y de parámetros y á la orientación del cálculo en forma análoga á la que, tras varios años de tenaz estudio, nos permitió realizar el del pórtico múltiple, degeneración inmediata de la arcada y el de las estructuras trapeziales.

Madrid 10 de Octubre de 1915.

JUAN MANUEL DE ZAFRA.
Ingeniero Profesor de la Escuela de Caminos.

La mecánica aplicada y Castigliano

- POR

DON PEDRO PÉREZ DE LOS COBOS

Ingeniero de Caminos, Canales y Puertos.

Con el elocuente discurso que copiamos á continuación ha inaugurado las sesiones de la Sección 8.^a, «Ciencias de aplicación» del Congreso, de la Asociación española para el progreso de las ciencias celebrado en Valladolid, el ilustrado Ingeniero de Caminos, Canales y Puertos don Pedro Pérez de los Cobos, que la ha presidido. Tan notable disertación mereció unánimes aplausos de los oyentes; reciba también el nuestro más entusiasta y sincera felicitación. Nos hemos apresurado á publicarlo, seguros del agrado con que lo han de leer nuestros lectores.

Es un justo homenaje á Castigliano, cuyo fecundo principio ha revolucionado la ciencia de la ingeniería, arrinconando antiguos y empíricos moldes. Muéstrase Pérez de los Cobos con su dominio de la materia un Ingeniero á la moderna, un apóstol de la nueva ciencia que Zafra ha aplicado y desarrollado en su libro, ciencia verdaderamente ingenieril, que da cumplida solución á todos sus problemas.

SEÑORES CONGRESISTAS:

Siempre pareció bien la modestia como distintivo que ser suele de varones bien nacidos y discretos. Mas es virtud que por su misma condición exige parquedad extrema y sumo tacto para alegada en favor propio, pues que peligra aparecer como falaz encubridora de la más refinada vanidad.

Por eso batalla mi ánimo perplejo; que si pequeño me siento al considerar el legítimo lustre que realza los nombres de los portavoces que en este Congreso capitanean las demás secciones, y fuera mi humano deseo manifestarlo así para disculpar anticipadamente la pobreza irremediable del discurso que comienzo; mi razón, impregnada de sincera modestia, me manda callarlo.

Otro motivo hay para ello: el honroso título profesional que ostento, causa única que acredita y justifica mi presencia aquí, impóneme por su dignidad, que estimo en tanto como mi vida, deberes que pugnan con toda extremada expresión de humildad. Nobleza obliga. Y vano sería todo intento de recabar mi personalidad individual para deslindar responsabilidades que realmente á mi solo incumben; mientras aquí permanezca, pese á toda protesta, seré el Ingeniero perteneciente á una Corporación que otros supieron hacer gloriosa.

Esos mismos deberes, quizá torpemente entendidos, indujéronme á ceder ante cariñosas instigaciones para ocupar este sitio. ¿Y cómo un técnico puede dignamente negarse á colaborar en la Sección de «Aplicaciones» de un Congreso que tiene por finalidad impulsar las Ciencias? ¿Cómo un profesional de la construcción, que á diario aplica principios de esas Ciencias, puede excusar su concurso? Inaudita audacia es en mí, sin duda, supuestas mis aptitudes y temperamento; mas con todo lo estimo un deber; razón suprema que tiene profundas raíces en el sentimiento, y lo cumpliré sin jactancia, pero también sin alardes de falsa modestia, cual corresponde al último de los Ingenieros que tiene el honor de dirigiros la palabra.

La Sección de «Aplicaciones», sabiamente dispuesta en el lugar postrero, compendia y complementa á las anteriores, sus hermanas en el Congreso. Aún es más. Decir «Aplicaciones de las Ciencias» es integrar en académico concepto la vida entera en toda la complejidad de sus múltiples aspectos: desde la manera industria del hogar hasta la colosal fábrica; desde la construcción rudimentaria hasta la más acabada obra de arte; desde la menuda operación comercial hasta el organismo económico