

	Metros.
El trozo 2.º comprende desde el origen hasta el segundo paso del río Bonaigua y su longitud es de.....	8.115,23
El trozo de la divisoria desde el río Bonaigua hasta el barranco Baquerías, más 130 metros, su longitud es de.....	4.183,03
El trozo 3.º, desde este punto hasta la Borda de Lobató, su longitud es de.....	6.520,47
TOTAL.....	18.818,73

El Sr. Bore en su Memoria (pág. 33) dice respecto á esto lo siguiente:-

Sistema administrativo.

«La altitud del terreno, la distancia y desnivel de la zona de trabajos á Tredós, que es el pueblo más inmediato, hace necesario que los obreros residan en las obras durante el tiempo relativamente corto en que se podrá trabajar allí, y, por tanto, habrá que construir de fábrica barracas para obreros, almacenes, etc.; la pérdida de tiempo y trabajo durante los temporales de verano; las grandes dificultades para el transporte (no sólo de los materiales para las obras, sino de los productos de las excavaciones para formar terraplenes) que presenta el terreno por ser su pendiente transversal tan grande, que apenas puede uno sostenerse; los perjuicios indicados anteriormente y otros imprevistos son elementos heterogéneos tan difícil de calcular y valorar que el presupuesto de contrata sería, ó excesivo con perjuicio de los intereses del Estado ó lo que es más probable que suceda, deficiente, y en este caso habría necesidad constantemente de reformarlos y lo más seguro de rescisiones de contrata; todo en perjuicio de las obras y de la localidad; por tanto, creemos más conveniente el sistema de administración, claro es que los mismos inconvenientes presentaría el terreno con este sistema, pero se evitarían las pérdidas de tiempo, etc., que lleva consigo el de contrata máxima si la consignación para estas obras fuera un crédito especial á justificar con la liquidación, encargando al personal exclusivamente de este servicio y remunerándole convenientemente.»

Estas justísimas observaciones se avaloran en el caso presente por entrar en el proyecto, obras tan aleatorias como los túneles en los que no puede predecirse nunca si el presupuesto calculado es justo ó dista mucho de la realidad, ya por defecto ó por exceso.

Pero como por otra parte la cantidad consignada anualmente en presupuesto para obras por administración es tan limitada, nosotros nos inclinamos á la contrata, ó mejor por el concurso de los tres trozos á la vez, por la razón de entrar una obra tan importante como es un túnel de 1.500 metros de longitud situado en un país que carece en absoluto de comunicaciones y que de no construir el túnel después que el tercer trozo, habrá que transportar todas las máquinas á lomo desde el extremo del trozo 4.º, que es el más próximo al ferrocarril.

Si una Empresa tomase á su cargo toda la línea, podría en el primer año abrir la explanación del trozo 3.º lo suficiente para llegar á las dos bocas del túnel y dejar montadas todas las máquinas para el año siguiente, en que podía comenzarse ya la perforación mecánica, y teniendo en cuenta estas ventajas, podría obtenerse en el concurso una gran economía, que de otro modo no puede esperarse; pero hay que contar siempre con su

transporte á lomo de 6 á 7 kilómetros, desde el origen del trozo 4.º, que ya estará terminado el año 1914, hasta las bocas del túnel.

Orden de preferencia en la construcción.

Por las razones ya dichas, deberían subastarse todas las obras de una vez; mas de no ser esto posible, deben comenzarse por el trozo 3.º para facilitar la construcción del túnel y del trozo 2.º, siguiendo después por el túnel y terminando en el trozo 2.º

JULIO MURUA.

(Continuará.)

MATEMÁTICAS PRÁCTICAS

DE

JOHN PERRY

TRADUCIDO DEL INGLÉS Y ANOTADO

POR

D. LUIS GAZTELU

Marqués de Echandía; Ingeniero Jefe de Caminos, Canales y Puertos;
Director de la Escuela especial del Cuerpo.

II

En el número anterior copiamos el prólogo con que encabeza el Sr. Gaztelu la traducción española de esta interesante y útil obra para presentarla al público, y que, por nuestra parte, recomendamos por su carácter eminentemente práctico.

A continuación del prólogo inserta nuestro ilustrado compañero el programa que presentó Perry al Congreso de Glasgow y que copiamos también, pero creemos útil reproducir antes el relato que del discurso pronunciado por el profesor inglés en defensa de dicho programa, hizo el Sr. Gaztelu en su libro *Principios de la moderna pedagogía matemática*, para recordar sus atinadas consideraciones.

«En la Asamblea celebrada en Glasgow en 1901 para discutir sobre la enseñanza de las matemáticas, presentó el profesor Perry un programa de matemáticas elementales con destino á los colegios de niños, y aun de señoritas, que está inspirado en las ideas del autor, tomadas en toda su amplitud y llevadas á sus últimas consecuencias. El discurso que pronunció en defensa de dicho programa contiene, en principio, todo lo esencial de su método, y antes de dar á conocer íntegro el programa que propuso, extractaré algunos párrafos del discurso, no sin recomendar al lector á quien interesen estos estudios que lea el original (1). Su autor desarrolló este programa en seis conferencias para obreros, que pronunció en el Museo de Geología práctica, proponiendo un gran número de ejercicios que debían ser resueltos por los oyentes en el intervalo de tiempo entre dos conferencias, y han sido publicadas ó reeditadas recientemente (2). El examen del programa y del folleto mencionado, que no pasa de 172 páginas, hacen ver, con sorpresa inevitable, el camino que se puede recorrer en poco tiempo en el estudio de las matemáticas, cuando este estudio se limita á las nociones de aplicación

(1) *British Association Meeting at Glasgow, 1901.—Discussion on the Teaching of Mathematics*: London, 1902.

(2) *Practical Mathematics*. Summary of six lectures delivered to working men by prof. Jhon Perry. Board of education, 1910.

inmediata, prescindiendo de todos los desarrollos teóricos que no tienen este carácter.

Cuando Perry pronunció el discurso á que me refiero, ya estaba muy adelantada la labor de transformación de la enseñanza en las escuelas técnicas, y en muchas de las más importantes se habían organizado los estudios con arreglo á los nuevos principios. Ante la grave responsabilidad que le correspondía en esta obra, empezó su discurso invitando á sus contradictores á que manifestaran claramente su pensamiento, para que la Asamblea decidiera si era procedente continuarla ó debía ser suspendida, antes de que los daños, caso de haberlos, llegaran á ser irremediables.

«No es ésta, dijo, una discusión académica. Quien quiera que piense que estoy cometiendo un error, ó vea cómo se puede mejorar mi método y se calle, está haciendo un daño real y positivo al país. Dentro de pocos años este nuevo sistema se habrá generalizado y no será tan fácil como ahora, sino muy difícil, por el contrario, deshacer esta obra. He dicho que reconozco mi enorme responsabilidad, y espero que os convenceréis de que tenéis que cumplir un deber manifestando vuestra opinión.

Al presentar este programa, quiero que se entienda claramente que recomiendo este método para toda clase de alumnos; no sólo para los alumnos Ingenieros, no sólo para la juventud de los colegios, no sólo para el niño inglés de inteligencia media, sino también para los niños de inteligencia privilegiada, que son menos del uno por ciento de la clase más elevada, como también para los jóvenes—uno por cada diez millones—capaces de llegar á ser grandes matemáticos.»

Se extiende luego en consideraciones para probar que la utilidad inmediata debe determinar la elección de las materias que se deben enseñar al principiante, contestando á muchos contradictores que le han censurado por esta afirmación, y hace la siguiente enumeración de los resultados útiles del estudio de las matemáticas, llamando la atención sobre el abandono de la enseñanza clásica en todo lo tocante á este punto de vista:

1.º Producir las más elevadas emociones y proporcionar placer mental, descuidado hasta ahora en la enseñanza de casi todos los jóvenes.

2.º a. Desarrollo intelectual. b. Enseñar caminos lógicos para discurrir, descuidado hasta ahora en la enseñanza de la mayor parte de los jóvenes.

3.º Proporcionar instrumentos matemáticos para el estudio de la ciencia física, descuidado hasta ahora en la enseñanza de casi todos los jóvenes.

4.º Conseguir la aprobación en los exámenes. Este es el único punto de vista en que no ha habido descuido, el único reconocido, en realidad, por los profesores.

5.º Proporcionar al hombre instrumentos mentales que pueda usar con la misma facilidad que sus piernas y sus brazos, habilitándolo para continuar su obra de educación durante toda su vida (mediante el desarrollo de sus facultades mentales), y utilizando á este fin toda la propia experiencia. Esto es enteramente análogo y la aptitud para la propia educación mediante la afición á la lectura.

6.º Quizás incluido en el precedente: enseñar al hombre la importancia de pensar las cosas por sí mismo, librándole del espantoso yugo de autoridad que hoy padece, y convenciéndole de que, ya mande á otros, ya obedezca, es uno de los seres más elevados. Esto, generalmente, se deja á otros estudios que no son los matemáticos.

7.º Hacer sentir á los hombres que se dedican á cualquier profesión que exija la aplicación de las ciencias, que conocen los

principios en que aquélla se funda, y con arreglo á los cuales se debe obrar.

8.º Dar á las inteligencias agudas y filosóficas un consejo lógico de perfección, que á la vez encanta y satisface, evitándoles así que traten ningún asunto filosófico desde un punto de vista exclusivamente abstracto, porque lo absurdo de tal empeño ha sido claramente demostrado.

A todas estas altas aspiraciones pretende satisfacer el profesor Perry con su nuevo sistema.

No le seguiré en esas lucubraciones filosóficas. Creo que más que estas sutilezas dicen en favor de su sistema el examen de sus procedimientos y programas y, sobre todo, los resultados de la experiencia, que han sido ya juzgados suficientes para que se haya adoptado en todas las escuelas inglesas y muchas norteamericanas y en algunos de sus puntos más importantes, en Francia, Alemania y otras naciones europeas.

«Hace cincuenta años, dice en otra parte de su discurso, se creía acertado enseñar del mismo modo la física y la química á todos los hombres, como si todos se propusiesen ser físicos ó químicos. El enorme desarrollo de estas ciencias hizo necesaria una reforma, y la novedad de estos estudios facilitó el cambio de sistema. Por la misma razón creo que se deben enseñar las matemáticas, incluso las altas matemáticas, de muy diferente modo á los distintos estudiantes. En todo caso, estoy cierto de que nuestro sistema de enseñar á los niños las matemáticas elementales, como si todos hubiesen de cultivar las matemáticas puras, debe reformarse. Quizás me perdonen los matemáticos mi impertinencia al decir que, aun para el joven que reúne condiciones para llegar á ser un gran matemático, se deben recomendar los nuevos métodos de enseñanza.

Ahora enseñamos á todos los niños lo que se llama filosofía matemática, y por respeto á algún futuro matemático que puede haber entre ellos, arruinamos á todos los demás. Es lo que sucede en la naturaleza con los peces; de cada 10.000 arenques que se procrean sobrevive uno; de 10.000 huevos de salmón resulta que sólo un ejemplar llega al mercado; 10.000 Tomis, Dicks ó Harrys destruidos para producir un hombre capaz de enseñar las matemáticas en una escuela de segunda enseñanza; 10 millones sacrificados á la producción de un gran matemático.»

Aquí aboga por la vulgarización de las matemáticas, que es otra de las grandes aspiraciones de este Profesor; no sólo quiere hacerlas asequibles, en su parte elemental (ya sabemos cómo entiende él esta palabra), y de inmediata utilidad á todas las clases sociales, sino á todos los ingleses, como dice en otra parte.

No quiero pasar á exponer el programa anunciado, sin transcribir el siguiente párrafo sustancioso y muy característico de este original autor:

«El carácter nada práctico de la enseñanza matemática es causa de que los matemáticos prescindan del sentido común en toda la enseñanza. Buenos ejemplos de ello vienen de Alemania, Francia y Suiza. El Ingeniero necesita conocer la estática gráfica.

Un curso de pocas semanas, bien combinado, le puede proporcionar un conocimiento tan completo de los principios generales, que es suficiente para que (contando con su sentido común) pueda resolver casi todos los problemas que necesite. Pues es muy frecuente, en algunas escuelas politécnicas, dar un curso muy científico de varios meses, á veces de un año; todo problema que haya sido estudiado alguna vez por alguien, debe ser resuelto por cada uno de los alumnos. Cada una de las soluciones de casi todos los problemas va unida al nombre del profesor que

la propuso. Lo mismo sucede con la Geometría descriptiva y otras ramas de las matemáticas gráficas. El alumno de disposición común, bien dirigido, con un estudio de pocas semanas es realmente un maestro en cualquiera de esas materias, mientras que el que ha estudiado un curso largo y muy científico carece de iniciativa y no es capaz de resolver un problema nuevo. Si dispusiera de tiempo, podría citar algún ejemplo divertido.»

(Aquí copia el Sr. Gaztelu el programa de matemáticas elementales propuesto por Perry á la aprobación de la Asamblea de Glasgow.)

La discusión que siguió á la lectura del discurso y programa de Perry no ofrece bastante interés para que sea oportuno resumirlo, y lo omitiré por brevedad.

A pesar de figurar en la Asamblea gran número de matemáticos y profesores adictos á la enseñanza clásica, *ortodoxa*, como dice Perry, ninguno se señaló como opuesto á lo sustancial del nuevo método, el cual continuó generalizándose hasta adquirir el gran desarrollo que hoy posee.

En obsequio á la autoridad inmensa de su esclarecido autor, transcribiré la siguiente carta, que fue leída en la Asamblea. Es de Lord Kelvin, y dice así:

«Muchas gracias por su carta de anteayer y por el ejemplar de su discurso de Glasgow, que he leído con interés. Me encuentro agobiado de trabajo, que no puedo aplazar, y ello me impide escribir sobre ese asunto. Creo, en verdad, que su programa es muy bueno. Es muy semejante á la enseñanza que recibí de mi padre.»

Programa de Matemáticas elementales, presentado al Congreso de Glasgow, por el Profesor J. Perry.

PRIMERA PARTE

CURSO ELEMENTAL

Aritmética.—Los números decimales, que deben ser usados desde el principio; el engaño de conservar más cifras que las que se pueden justificar, en los cálculos que contienen números observados ó procedentes de medidas. Métodos aproximados para multiplicar y dividir números, omitiendo todas las cifras innecesarias. Uso de aproximaciones groseras en el cálculo aritmético, especialmente para fijar la posición de la coma.

Equivalencia de las expresiones tales como $5,204 \times 10^5$ y 520.400 y de $5,204 \times 10^{-3}$ y $0,005.204$. La significación de un logaritmo vulgar: empleo de los logaritmos en la multiplicación, división, elevación á potencias y extracción de raíces. Cálculo de los valores numéricos con fórmulas de todas clases, incluso complicadas.

Principio de la construcción y método de empleo de la regla logarítmica; su aplicación al cálculo numérico. Conversión de los logaritmos vulgares en neperianos. Cálculo de las raíces cuadradas por la regla ordinaria de la Aritmética. Uso de fórmulas algebraicas en cuestiones prácticas sobre la razón y la proporción. Simplificación de quebrados. Cálculo de los tantos por ciento. Expresar los chelines y peniques en decimales de la libra esterlina; los quarterones y libras como decimales del quintal ó de la tonelada, etc.; de este modo todos los problemas de interés, descuento y otros análogos se convierten en meras aplicaciones de sentido común de reglas muy sencillas.

Álgebra.—Entender cualquier fórmula de modo que se pueda aplicar cuando se den los valores numéricos de las diversas cantidades. Reglas de los exponentes.

Traducción en fórmula algebraica de una regla expresada aritméticamente. Todo esto ha sido ya incluido bajo el epígrafe

Aritmética. Problemas que conducen á ecuaciones fáciles de una ó dos incógnitas. Transformaciones fáciles y simplificaciones de fórmulas en casos sencillos, despejando cada una de las cantidades, cuando las demás sean dadas. Práctica de la manipulación algebraica en general.

La determinación de los valores numéricos de las constantes en ecuaciones de forma conocida, cuando se dan valores particulares á las variables. La significación de la expresión «A varía como B».

Factores de expresiones tales como $x^2 - a^2$, $x^2 + 11$, $x + 30$, $x^2 - 5$, $x - 66$.

Mensuración.—Comprobación experimental de la regla relativa á la longitud de la circunferencia, empleando hilos arrollados á cilindros, ó haciendo rodar un disco ó una esfera. Invencción de métodos para medir longitudes de curvas. Comprobación de las reglas de las áreas del triángulo, rectángulo, paralelogramo, círculo, elipse, cilindro, cono, etc., empleando escalas y papel cuadriculado. Proposiciones de Euclides relativas á las áreas, comprobadas por medio del papel cuadriculado y también por cálculo aritmético, midiendo las líneas y ángulos. La determinación de áreas de figuras planas irregulares por medio del planímetro; por medio de la fórmula de Simpson ú otras reglas conocidas para el caso en que se da un cierto número de ordenadas equidistantes; por medio del papel cuadriculado, cuando se dan ordenadas cualesquiera, no equidistantes; hallar las equidistantes; pesando una figura recortada en cartulina y comparando su peso con el de un cuadrado; contando los cuadrados en el papel cuadriculado para comprobar las reglas. Reglas relativas á las áreas de esferas y anillos. Reglas de los volúmenes de los prismas, cilindros, conos, esferas y anillos comprobadas experimentalmente; por ejemplo, por el agua que rebosa de vasos llenos, ó pesando objetos de esas formas hechas con un material de peso específico conocido, ó llenando de agua vasijas de capacidad conocida.

La determinación del volumen de un sólido irregular por cada uno de los tres métodos indicados para las áreas irregulares, debiendo consistir el primer procedimiento en obtener una figura plana irregular, en la cual, haciendo variar las coordenadas, se obtengan las secciones transversales variables del sólido. Determinación de pesos por medio de volúmenes, cuando se dan las densidades.

Traducción de las reglas de mensuración en fórmulas algebraicas. En tales fórmulas, cada una de las cantidades se puede considerar como incógnita, siendo dadas las demás. Ejercicios numéricos de mensuración.

El trabajo experimental en esta materia debe llevarse simultáneamente con la práctica de pesar y de medir en general; hallando pesos específicos, haciendo aplicaciones del principio de Arquímedes, determinando los volúmenes desalojados por los cuerpos flotantes y otros trabajos científicos elementales análogos. Un buen profesor no omitirá esta labor experimental; guardará el equilibrio oportuno entre el trabajo experimental, la enseñanza didáctica y los ejercicios numéricos.

Uso del papel cuadriculado.—Uso del papel cuadriculado por los comerciantes, físicos, etc., para conocer de una ojeada la elevación y baja de los precios, de la temperatura, de la marea, etc. El uso del papel cuadriculado debe comprender ejercicios de géneros muy variados, pero haciendo notar que todos obedecen á una idea común. Se pueden mencionar los siguientes ejercicios:

Gráficos de estadísticas de cualquier clase, de interés general ó especial. Lo que enseñan esas curvas. Noción de la derivada.

Interpolación ó investigación de los valores intermedios pro-

ables. Errores probables de observación. Formación de listas completas de precios por los fabricantes. Cálculo de una tabla de logaritmos. Hallar el valor medio. Areas y volúmenes, como se ha explicado más arriba. El medio de fijar la posición de un punto en un plano; la x y la y , y también la r y la θ como coordenadas de un punto. Dibujo de las curvas que representan funciones tales como $y = ax^m$, $y = ae^{bx}$, en que a , b , m pueden recibir toda clase de valores. La línea recta. Significación de la *pendiente*; pendiente de una curva en cualquiera de sus puntos (derivada ó coeficiente angular de la tangente). Derivada, con el ejemplo de la velocidad de un cuerpo. Ejercicios fáciles sobre los incrementos simultáneos de x y de y , y la derivada en el caso de la función $y = ax^n$, con ejemplos tomados de la Mecánica y de la Física.

Determinación de los máximos y mínimos. La resolución de ecuaciones: se pueden dar ideas muy claras sobre la noción de raíces de las ecuaciones, valiéndose del papel cuadriculado. Determinación de las leyes lineales. Correcciones de los errores de observación, cuando las coordenadas son resultado de mediciones experimentales.

En todos estos ejercicios con papel cuadriculado se debe exigir al alumno que determine con exactitud las escalas é inscriba los nombres de las cantidades que figuran en el gráfico. Deben evitarse las escalas claramente inconvenientes. Finalmente, se debe escoger la escala de modo que el dibujo ocupe la mayor parte de la hoja de papel; de ningún modo debe admitirse un dibujo que ocupe sólo el borde ó uno de los ángulos.

Geometría.—División de la recta en partes proporcionales á otras dadas y otros ejemplos experimentales relativos al libro sexto de Euclides. Medida de los ángulos en grados y en radianes. Las definiciones del seno, coseno y tangente de un ángulo; determinación de sus valores por métodos gráficos; construcción de ángulos por medio del transportador, cuando se dan en grados ó en radianes, y también cuando se da el valor del seno, del coseno ó de la tangente. Uso de las tablas de senos, cosenos y tangentes. Resolución de los triángulos rectángulos por el cálculo y gráficamente. La construcción de triángulos cualesquiera con datos numéricos ó gráficos; determinación del área del triángulo. Las proposiciones más importantes de Euclides pueden ser comprobadas gráficamente: si la proposición se refiere á ángulos, éstos pueden ser medidos con un transportador; si se refiere á igualdad de líneas, áreas ó razones, pueden medirse las longitudes con la escala, y los cálculos necesarios se ejecutarán numéricamente. Esta combinación del dibujo y del cálculo aritmético puede ser usada libremente para comprobar la verdad de una proposición. Un buen profesor no dejará de introducir ocasionalmente alguna demostración combinada con la comprobación por medición.

El medio de representar la posición de un punto en el espacio por sus distancias á tres planos coordenados. Cómo se miden los ángulos entre una recta y un plano; entre dos planos. El ángulo entre dos rectas tiene una significación, ya se corten ó no. Qué se significa por proyección de una recta ó de una figura plana sobre un plano. Proyecciones horizontal y vertical de una recta que forma ángulos dados con los planos coordenados. Significación de los términos «traza de una recta», «traza de un plano».

La distinción entre una magnitud escalar y una vectorial. Adición y sustracción de vectores. Ejemplos experimentales.

En la redacción del precedente programa se han agrupado los artículos con arreglo á los diversos asuntos.

Es claro que no debe entenderse que se han de estudiar precisamente en ese orden; el Profesor podrá ordenar el curso me-

clando las materias como mejor le parezca, según la clase de alumnos. Un buen Profesor debe entender que no hay posibilidad de idear un examen por otro que no sea él mismo, capaz de comprobar con verdad el resultado de su enseñanza. Debe tratar de comunicar conocimientos que lleguen á constituir la maquinaria mental de sus discípulos, de tal modo que aquéllos estén seguros de poderla aplicar á los problemas prácticos de todas clases, y convencidos de que no corren mayor peligro de enmohecerse é inutilizarse que sus facultades de leer, escribir ó andar.

SEGUNDA PARTE

CURSO AVANZADO

Este curso comprende una labor más completa en todas las materias incluidas en el curso elemental, es decir una práctica mucho mayor en el cálculo, aplicando fórmulas más complicadas. Geometría demostrada, con el texto de Euclides como base.

Uso de fórmulas aproximadas, tales como

$$(1 + a)^n = 1 + na$$

cundo a es pequeño respecto á la unidad.

Reglas de Aritmética (como la del interés compuesto, etc.) y de Mensuración, interpretadas como fórmulas algebraicas. Todas las cantidades contenidas en las fórmulas deben ser consideradas sucesivamente como incógnitas.

Práctica en la simplificación de expresiones algebraicas. Descomposición de una fracción en fracciones parciales.

Trigonometría.—Algún conocimiento de límites, tales como

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\text{sen } \theta}{\theta} = 1$$

$$\theta = 0.$$

Determinación de los valores del seno, coseno y tangente para ángulos mayores que 90° ; ángulos complementarios y suplementarios.

Relaciones fundamentales, tales como $\text{sen}^2 \theta + \text{cos}^2 \theta = 1$. Cálculo de los valores de $\text{sen } x$, $\text{cos } x$, e^x y $\log x$, usando el desarrollo en serie.

Las fórmulas fundamentales del seno y coseno de la suma y diferencia de dos ángulos, es decir,

$$\text{sen}(a + b) = \text{sen } a \cos b + \cos a \text{sen } b$$

y las otras tres análogas. Fórmulas que se deducen de las anteriores, tales como las sumas y diferencias de dos senos ó de dos cosenos, y las que ligán las líneas trigonométricas de un arco con las del arco doble.

La regla de los senos $\frac{\text{sen } A}{\text{sen } B} = \frac{a}{b}$ en los triángulos. Y también la relación

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C.$$

La expresión del área de un triángulo, cuando se conocen dos lados y el ángulo comprendido:

$$A = \frac{1}{2} ab \text{sen } C.$$

La verdad de estas fórmulas debe comprobarse numérica y gráficamente, atribuyendo valores numéricos á las diversas cantidades.

Mensuración.—Teoremas de Guldin relativos á las áreas y vo-

lúmenes de las superficies y sólidos de revolución. Ejercicios sobre las áreas del segmento y sector de círculo, área de la esfera entre planos paralelos cualesquiera; reglas aproximadas para la rectificación de un arco de circunferencia.

Determinación de centros de gravedad, usando el papel cuadriculado.

Empleo del cálculo para determinar áreas y volúmenes.

Uso del papel cuadriculado.—Gráficos de funciones, tales como:

$$y = ax^n; \quad y = ae^{bx}; \quad y = a \sin (cx + d); \\ y = ae^{bx} \sin (cx + d).$$

Dando valores procedentes de la observación á dos variables ligadas por leyes tales como:

$$pv^n = c; \quad y = c + bx^2; \quad axy = bx + cy,$$

hallar los valores probables de las constantes.

Cuando se sabe que dos variables están ligadas por una ley conocida, pero algo complicada, determinar una ley más sencilla que, entre ciertos límites, dé valores aproximados á los verdaderos.

Resolución de ecuaciones, usando el papel cuadriculado.

Problemas de máximos y mínimos.

Límites de razones y sumas.—Razón de los incrementos de una variable respecto á otra; método aproximado para calcular la derivada, por ejemplo, en el caso en que se hayan observado experimentalmente varios pares de valores simultáneos de las variables, ó hallando gráficamente la *pendiente* (coeficiente angular de la tangente) de la curva dibujada con esos valores.

El término «Coeficiente diferencial» (ó derivada) aplicado al límite de la razón de los incrementos, y también el símbolo correspondiente $\frac{dy}{dx}$, en el que x é y representan las variables.

Reglas para hallar la derivada de y con relación á x cuando las funciones que ligan á estas variables son:

$$y = ax^n; \quad y = ae^{bx}; \quad y = \sin x; \quad y = \cos x; \quad y = a \sin (bx + c); \\ y = A \log (x + a).$$

Estudio de estas funciones.

Demostración y uso de las reglas de derivación de un producto de dos funciones y de una función de función. Diferenciación sucesiva y diferenciación parcial. Integración por partes, por sustitución y otros artificios sencillos.

Cálculos de máximos y mínimos.

La integración considerada como operación inversa de la diferenciación, y como límite de una suma; explicación de los símbolos.

$$\int y dx \quad \text{é} \quad \int_a^b y dx.$$

Métodos aproximados para el cálculo de $\int_a^b y dx$, cuando se conocen valores numéricos simultáneos de x y de y . Integración cuando se posee una tabla de valores de y correspondientes á otros de x en progresión aritmética.

Integración de las ecuaciones que siguen:

$$\int ax^n dx; \quad \int ae^{bx} dx; \quad \int \frac{A}{x+a} dx; \\ \int A \sin (ax + b) dx; \quad \int A \cos (ax + b) dx.$$

Resolución de ecuaciones diferenciales sencillas.

En todo lo que sigue, para interesar á los alumnos en su trabajo, se debe hacer uso constante de ejemplos tomados de la parte métrica de la Geometría, de la Mecánica y de la Física.

Geometría.—Cómo se define la posición de un punto en el espacio por sus coordenadas rectangulares x, y, z , ó por sus coordenadas polares r, θ, φ ; relaciones entre x, y, z y r, θ, φ .

Determinación de los ángulos α, β, γ de una recta con los ejes coordenados; relación

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1.$$

Determinación de los ángulos de una recta con cada uno de los planos coordenados.

Dado un plano por sus trazas, determinar sus ángulos con cada uno de los ejes y de los planos coordenados.

Este problema puede ser tratado gráfica ó analíticamente.

Representación por sus proyecciones sobre los tres planos coordenados de un segmento de recta, cuya posición y longitud son conocidas.

Determinación del ángulo de dos rectas dadas; ángulo de dos planos cuyas trazas son conocidas. Representación, por sus proyecciones, de la intersección de dos planos cuyas trazas se dan.

Vectores.—Producto escalar y producto vectorial de dos vectores dados, con ejemplos. Algebra vectorial fácil.

Por el índice de este interesante libro juzgarán de su utilidad nuestros lectores:

Prólogo del traductor.—Programa de Matemáticas elementales presentado por el autor al Congreso de Glasgow.

Conferencia primera: Observaciones preliminares sobre la educación.—Número de cifras decimales necesarias en los cálculos.—Multiplicación abreviada.—División abreviada.—Uso de fórmulas: Notaciones.—Logaritmos.—Uso de las tablas de logaritmos.—Regla logarítmica.—Ejercicios numéricos.—Ejercicios sobre fórmulas aproximadas.—Tablas de logaritmos.

Conferencia II: Algebra.—Ecuaciones.—Proporción simple y compuesta: Ejercicios.—Ejercicios sobre sistemas de ecuaciones de primer grado.—Progresiones aritmética y geométrica.—Interés compuesto.—Valor actual y descuento. Anualidades.

Conferencia III. *Uso del papel cuadriculado*: Uso del papel cuadriculado.—Gráficos y problemas que se resuelven con su auxilio.—Errores de observación.—Listas de precios.—Cálculo de una tabla de logaritmos.—Ejercicios de mensuración: Fórmulas y reglas para hallar áreas de figuras irregulares.—Volúmenes.—Centros de gravedad.

Conferencia IV. *Papel cuadriculado* (continuación): Gráficos de funciones algebraicas.—Gráficos de la función exponencial.—La posición de un punto.—Gráficos de la elipse y de la hipérbola.—La línea recta.—Pendiente de una recta.—Determinación de constantes en las fórmulas empíricas.—La ley lineal.—Leyes que se pueden convertir en lineales.—Ejercicios sobre cuestiones náuticas.—Velocidad.—Aceleración.

Conferencia V. *Papel cuadriculado* (continuación): Fórmulas simplificadas entre ciertos límites de la variable.—Resolución de ecuaciones.—Problemas de máximos y mínimos.—Pendiente de una recta.—Variación de una función derivada.—Cálculo aproximado de la derivada.—Derivada de la función algebraica y entera.—Integración.—Máximos y mínimos.—Interpretación geométrica de la integral definida.

Conferencia VI: Vectores.—Adición de vectores.—Ejercicios de adición de vectores.—Derivada de un vector.—Multiplicación de cantidades vectoriales.—Ejercicios.—Líneas trigonométricas. Coordenadas en el plano y en el espacio.—Ejercicios sobre productos escalares.—Definición del producto vectorial.—Medida de ángulos.—Velocidad y aceleración angular.—Ejercicios.—Proyecciones.—Vertical.—Superficie de nivel.—Curvatura.—Consideraciones sobre la enseñanza.—Mensuración y ejercicios.—Fórmulas empíricas.—Uso y abuso de fórmulas empíricas.

Apéndice: Ejercicios sobre la primera conferencia.—Cálculos numéricos y aplicaciones numéricas de fórmulas.—Interés

compuesto.—Deslizamiento de una correa sobre una polea fija.—Ejercicios trigonométricos.—Funciones diversas.—Desarrollos en serie.—Ejercicios de Física y de Mecánica.—Cálculos numéricos y trigonométricos.

Ejercicios sobre las conferencias II á IV.—Proporciones.—Interés compuesto, anualidades, etc.—Resolución de triángulos, mensuración.—Problemas de Algebra.

Ejercicios sobre las conferencias III á VI.—Problemas varios.—Problemas de Mecánica.—Anualidades.—Mensuración.—Dibujo de curvas.—Ecuaciones.

Ejercicios sobre las Conferencias IV á VI.—Derivadas.—Problemas varios.—Coordenadas.—Vectores.

He aquí las líneas con que encabeza Perry la conferencia primera:

CONFERENCIA PRIMERA

Observaciones preliminares sobre la educación.—Son necesarias grandes reformas en la educación primaria. Los hombres más eminentes de Inglaterra nada entienden de las ciencias que están transformando todas las condiciones de la civilización. Así como un niño de una escuela de primeras letras es hoy capaz de ejecutar trabajos aritméticos fuera enteramente del alcance de los filósofos de Alejandría, y nadie piensa en discurrir sobre los libros VII, VIII, IX y X de Euclides (1), por las mismas razones deben ser suprimidos en la enseñanza y reemplazados por otros todos los restantes de este autor. Porque mucho de lo que contiene el lib. V, por ejemplo, puede ser sustituido por media página de Algebra elemental muy fácil.

El niño de condiciones medias no recibe en la escuela más educación que la que le proporcionan sus juegos. Debería adquirir el conocimiento de cosas concretas antes de exigirle que razona acerca de ellas. Sus juegos deberían consistir, desde muy niño, en llevar una tienda, por ejemplo, en medir, pesar y calcular. El principal negocio de un niño, en la escuela, consiste en continuar el estudio de la ciencia de observar y experimentar que comenzó el día mismo de su nacimiento. Se le enseñan muchas cosas separadamente, como en diversos compartimientos estancos, en vez de enseñárselas relacionándolas entre sí como si fueran una sola.

Cometemos, además, dos errores muy graves: sugerimos á un niño, á veces venciendo una resistencia para conseguirlo, la idea de que una cosa es difícil de entender, tratándose de algo que le es perfectamente familiar desde que tenía tres años, y suponemos, por otra parte, que un niño puede entender perfectamente una idea elevada que á nosotros nos parece sencilla. Así lo intimidamos, le inducimos á desconfiar de sí mismo, y el niño naufraga mentalmente; busca con ansia una tabla de salvación, y la tabla siempre dispuesta es una fórmula, una regla. Si los maestros estudiaran á sus discípulos como lo hacen los domesticadores con sus animales, verían que los niños de facultades mentales medias, son capaces de ejecutar trabajos intelectuales del género más elevado.

Actualmente, en los colegios técnicos, hay que invertir un año ó más en desarraigar vicios adquiridos en la escuela y en en

señar á los alumnos muchas cosas que ya debían saber. Y, generalmente, es demasiado tarde. Si se consiguiese fomentar en los niños la afición á la lectura, podrían luego continuar su educación durante toda su vida.

ESTACIONES CENTRALES

El cuadro de distribución.—S. W. Mauger.

(*Electrical Review y Western Electrician.*)

En estos últimos tiempos se han hecho grandes progresos en la construcción y en el modo de instalar los cuadros de distribución á alta y baja tensión, y se ha empezado á dar á esta parte de las instalaciones eléctricas toda la importancia que se merece, pues constituye, por decirlo así, el corazón del sistema de distribución.

M. Mauger precisa las condiciones á que deben satisfacer los cuadros á baja tensión en la siguiente forma:

1.º Cada tablero debe estar montado de modo que presente toda clase de garantías desde el punto de vista de la seguridad del funcionamiento, y no únicamente de modo que ofrezca un golpe de vista satisfactorio; así los interruptores deben instalarse de modo que ningún arco pueda alcanzar al operador ni á los otros aparatos;

2.º La cara posterior del cuadro debe ser fácilmente accesible para el manejo y reparaciones de aquellas partes que exigen una inspección periódica;

3.º Es preciso reducir al mínimo el número de juntas sujetas con pernos, que se emplean frecuentemente para facilitar la construcción, evitando curvar las barras;

4.º Iguales prescripciones son aplicables á todos los aparatos atravesados por la corriente, y especialmente á los interruptores; particularmente, las mandíbulas de los interruptores deben estar construidas por una sola pieza;

5.º En los casos de grandes capacidades, es preferible emplear en los aparatos, en vez de contactos redondeados, metal laminado; éste presenta, en efecto, grandes facilidades para la realización de juntas y de conexiones, y

6.º En la instalación de un cuadro es importante tener en cuenta la necesidad de unirle fácilmente á los cables de los generadores y de las salidas. La observancia de esta condición produce frecuentemente economías de consideración.

En el montaje de las conexiones sobre el cuadro, es á veces conveniente colocar la barra correspondiente á cierta polaridad en lo alto del cuadro, y la otra á 50 centímetros ó un metro del suelo; esta disposición permite el fácil acceso á las distintas partes de los aparatos, al mismo tiempo que reduce las probabilidades de corto circuito entre barras.

En el caso en que la potencia puesta en juego sea bastante elevada, desde el doble punto de vista de la economía y de las facilidades de explotación, es ventajoso emplear interruptores de manejo á distancia; en estas condiciones puede el cuadro disponerse cómodamente de distinta manera, pues reduciéndose sus dimensiones se constituye un tablero de inspección.

En las disposiciones que deben adoptarse y en el método de construcción de los aparatos es preciso tener en cuenta igualmente los efectos que pueden producirse por fenómenos de inducción, sea por consecuencia de los cortacircuitos ó de sobrecargas, sea también durante el funcionamiento normal. El empleo de aparatos de manejo á distancia obvia este inconveniente en los casos

(1) El autor se refiere aquí y en otros muchos puntos de este libro á los elementos de Euclides, adoptados generalmente como libro de texto para la enseñanza de la Geometría elemental en las escuelas inglesas.

La obra de Euclides comprende trece libros. Los libros I, II, III, IV y V contienen la Geometría plana. El V trata de las proporciones, y es una preparación para el VI que trata de las figuras semejantes. Los libros VII, VIII y IX tratan de las propiedades de los números; el X de las cantidades incommensurables; los XI y XII contienen la Geometría del espacio y el XIII es una miscelánea de Geometría plana y del espacio.

En las escuelas es muy común la omisión del estudio del lib. V, y general la de los libros VII, VIII, IX, X y XIII.—(N. del T.)