

REVISTA DE OBRAS PÚBLICAS

PUBLICACION TECNICA DEL CUERPO DE INGENIEROS DE CAMINOS. CANALES Y PUERTOS

DIRECTOR

D. MANUEL MALUQUER Y SALVADOR

COLABORADORES

LOS INGENIEROS DE CAMINOS, CANALES Y PUERTOS

SE PUBLICA LOS JUEVES

Dirección y Administración: Plaza de Oriente, 6, primero derecha.

MÉTODO

PARA

resolver de una manera sencilla algunos problemas de sistemas constructivos estáticamente indeterminados.

I

El hasta hace poco excelente alumno de la Escuela de Caminos y hoy nuestro compañero, Sr. Serret, publica, con el título que precede, un interesante artículo en el núm. 2.050 de la REVISTA.

Dignos de toda alabanza son los jóvenes Ingenieros que así demuestran su amor al estudio. No hace mucho publicó también la REVISTA un trabajo muy notable del Sr. Valentí. Sabemos además de algunos otros que tienen entre manos estudios difíciles, de verdadero empeño. A todos ellos enviamos nuestro entusiasta aplauso.

El método que el Sr. Serret trata de divulgar, traduciéndolo de *Engineering News*, es de tal interés que merece ser puntualizado con rigor, de modo que puedan utilizarlo con seguridad y confianza quienes hasta ahora no lo conozcan. Tal como está expuesto es un arma cuyo manejo puede resultar peligroso.

Aunque, según dicha Revista americana, aparezca como ideado por Mr. G. A. Mancy el método fundado en la evaluación de los recorridos angulares y lineales por los momentos estáticos de las áreas limitadas por la curva representativa de las magnitudes $\frac{M}{EI}$, para nosotros es familiar desde hace bastantes

años. En obras y revistas alemanas se encuentra usado con harta frecuencia y en ellas lo hemos aprendido. El trabajo que con el título «Las estructuras trapeciales» presentamos, en extracto, en el Congreso de 1913 de la Asociación española para el progreso de las Ciencias (*) está, en gran parte, basado en ese método.

No dudamos, sin embargo, de que Mr. Mancy haya ideado su método sin conocer los trabajos tudescos y de la mejor buena fe, como lo indica la afirmación de que «su gran fecundidad..... se ha ignorado hasta ahora».

Lo hace más verosímil la poca seguridad con que lo maneja y algún error de concepto, además del siguiente.

La línea de $\frac{M}{EI}$ aparece como representativa de la ley de variación de las fuerzas elásticas longitudinales. Prescindiendo de la

significación de $\frac{M}{EI}$, basta recordar que sus dimensiones son las de una (línea)⁻¹ para comprender lo absurdo de tal designación.

La demostración de las propiedades de los momentos estáticos deja mucho que desear. Se prescinde sistemáticamente del importantísimo detalle de los signos, ó sentidos, de las magnitudes que se han de manejar. La demostración debe hacerse de modo más sencillo y riguroso, como sigue.

$\frac{M}{EI}$ mide en magnitud y signo la curvatura del elemento de fibra media, de longitud ds , curvatura expresada, aproximadamente, por $(\mp) \frac{d^2 z}{dx^2}$.

El signo — ó + aplicado á $\frac{d^2 z}{dx^2}$ depende de los sentidos que se convengan como positivos para los momentos, las curvaturas y las ordenadas de la elástica. En general, se suponen positivos: M cuando tiende á hacer girar en el sentido de un reloj la sección que lo sufre; $\frac{1}{\rho}$ cuando el centro de curvatura está por encima de la fibra media, recorriendo ésta el observador de izquierda á derecha; z cuando es descendente. Los tres sentidos corresponden simultáneamente al caso más habitual, pieza isostática sometida á pesos, y en la que M , $\frac{1}{\rho}$ y z , todos positivos, dan:

$$+ \frac{M}{EI} = - \frac{d^2 z}{dx^2} = + \frac{1}{\rho}. \quad (1)$$

En cualquier otra posición que tenga la fibra media basta definir el sentido en que se supone recorrida, es decir, en el que se cuentan las abscisas, para que lo estén todos los signos positivos.

Puntualizado esto, $\frac{M}{EI} ds$, que en piezas rectas, por la exigüidad de las deformaciones, se confunde con $\frac{M}{EI} dx$, mide el ángulo de contingencia del elemento de elástica ó, lo que es igual, la rotación, el recorrido angular, que la normal ó la tangente en un punto (x), sufren al pasar al inmediato ($x + dx$) (fig. 1.^a). Como esta rotación se efectúa en sentido contrario de la correspondiente á M , si atribuimos el signo + á los ángulos descritos en el sentido del reloj, podremos decir que $-\frac{M}{EI} dx$ mide en magnitud y dirección dicho recorrido angular.

(*) REVISTA DE OBRAS PÚBLICAS de 10 de Julio de 1913.

Es lo mismo que resulta de su valor algebraico según (1). Ese ángulo es el incremento

$$\frac{d\left(\frac{dz}{dx}\right)}{dx} dx = \frac{d^2z}{dx^2} dx = -\frac{M}{EI} dx$$

de la inclinación $\frac{dz}{dx}$, contada positivamente como hemos convenido y como á las x dirigidas según los descensos corresponde.

Prolongadas las dos tangentes interceptan en la normal á la elástica ó, dentro del orden de aproximación admitido en Mecánica, en la ordenada de un punto de abscisa $A > x$, un segmento $-\frac{M}{EI} dx (A - x)$, dirigido, como su signo indica, hacia el centro de curvatura, ó en sentido ascendente. Si efectuamos la suma de los segmentos sucesivamente recortados por las tangen-

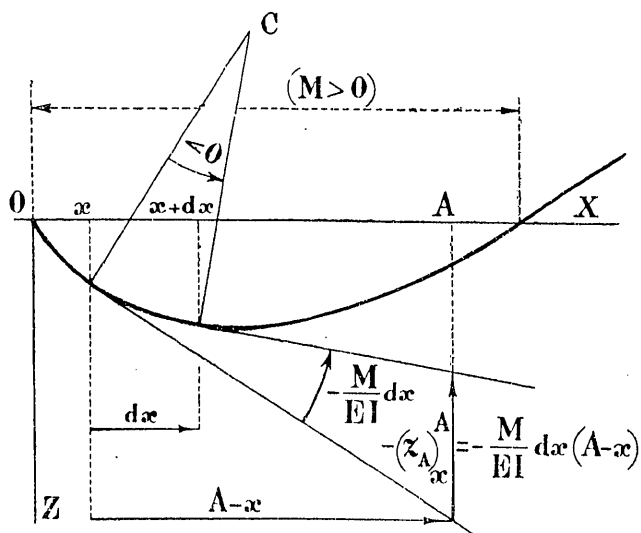


Fig. 1.a

tes desde la del punto (a) hasta la del (A), resulta, indicando con $(z_A)_a^A$ la parte de ordenada de (A) comprendida entre aquéllas:

$$-\int_a^A \frac{M}{EI} dx \times (A - x) = -(z_A)_a^A. \quad (2)$$

Si representamos las curvaturas $\frac{M}{EI}$ por ordenadas, en una escala convencional:

un centímetro lineal $< > n$ (centímetros)⁻¹

$\frac{M}{EI} dx$ es el área elemental de la superficie limitada por la línea representativa de aquéllas; $\frac{M}{EI} dx \times (A - x)$ el momento estático respecto al punto (A) y la integral valúa el *momento estático derecho* (respecto al extremo del mismo nombre) (*) del trozo comprendido entre las ordenadas de (a) y (A). Si g es la abscisa del centro de gravedad de ese trozo,

$$\int_a^A \frac{M}{EI} dx (A - x) = (A - g) \int_a^A \frac{M}{EI} dx \quad (3)$$

$(A - g)$, abscisa del extremo derecho respecto al centro de gravedad, es esencialmente positiva; $\int_a^A \frac{M}{EI} dx$, área del trozo, puede tener cualquier signo, ó resultar nula, según los diversos valores que entre (a) y (A) tengan las ordenadas. Pero siempre se verifica la ecuación (2) y el momento estático *derecho*

(*) Müller Breslau designa los momentos estáticos por las letras $\mathcal{L}$, $\mathcal{R}$, iniciales de *link* (izquierdo) y *recht* (derecho).

$\int_a^A \frac{M}{EI} (A - x) dx$, con su signo propio, valora en *magnitud y dirección* el trozo de ordenada $(z_A)_a^A$, con su sentido propio también.

Si a y A son dos abscisas cualesquiera, $(z_A)_a^A$ no mide, como erróneamente afirma Mr. Mancy, la desviación lineal de (A) respecto á la fibra media antes de la flexión (fig. 2.a, a). Sólo es verdad esto en algún caso particular como el que toma por base.

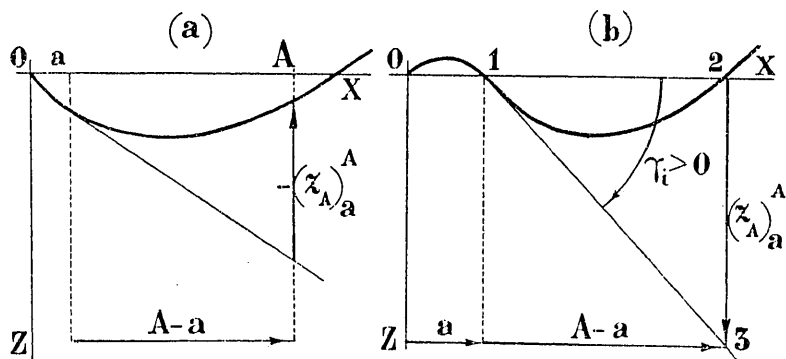


Fig. 2.a

Cuando los puntos de abscisas a y A conservan, verificada la flexión, sus posiciones iniciales en la fibra media (fig. 2, b) (*), dicho segmento, ó su igual el momento estático, ofrece una propiedad preciosa. Si dividimos $(z_A)_a^A$ por la distancia $(A - a)$, la tangente trigonométrica que, dentro del orden de aproximación general de la Mecánica, se confunde con el ángulo pequeñísimo á que se refiere,

$$\gamma_i = \dots \text{tang } \gamma_i = \frac{1}{A - a} \int_a^A \frac{M}{EI} (A - x) dx \quad (4)$$

mide, siempre en *magnitud y sentido*, la rotación de la *tangente izquierda* á la fibra media, desde su posición inicial, 12, á la final 13 (**).

Si repetimos iguales consideraciones respecto á los segmentos

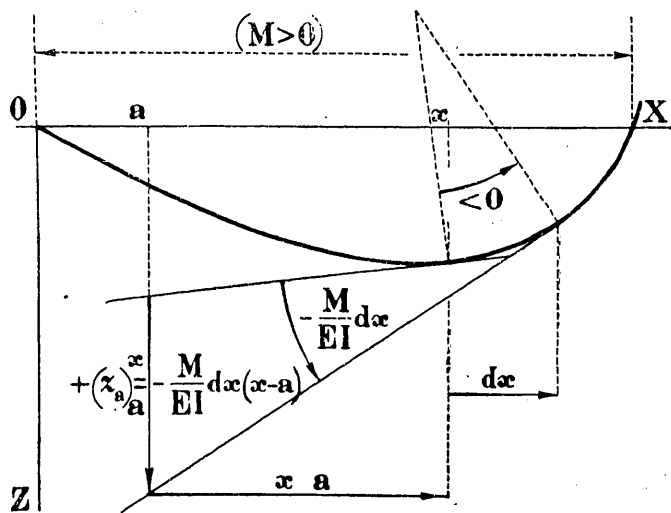


Fig. 3.a

interceptados en la ordenada extrema izquierda, de abscisa a (fig. 3.a), vemos que

$$-\int_a^A \frac{M}{EI} dx \times (x - a) = +(z_A)_a^A, \quad (5)$$

(*) Estos puntos, de *flecha nula*, en los que las deformaciones lineales cambian de sentido, nada tienen que ver con los de inflexión, ó *curvatura nula*, en los que se invierte el signo de ésta.

(**) Las figuras ofrecen una enorme exageración de las ordenadas, en beneficio de la claridad.

es decir, que el momento estático izquierdo es igual en valor absoluto, pero de sentido opuesto, al trozo de ordenada $(z_a)_a^A$.

Y como antes, si a y A son las abscisas de dos puntos que se mantienen en la fibra media inicial (fig. 4.^a),

$$\gamma_d \dots = \text{tang } \gamma_d = - \frac{1}{A-a} \int_a^A \frac{M}{EI} (x-a) dx, \quad (6)$$

también mide en *magnitud y sentido* la rotación de la tangente derecha á la fibra media, desde su posición inicial, $\overline{24}$, á la final, $\overline{26}$, ó tomando *ambas* á la inversa, de $\overline{21}$ á $\overline{23}$.

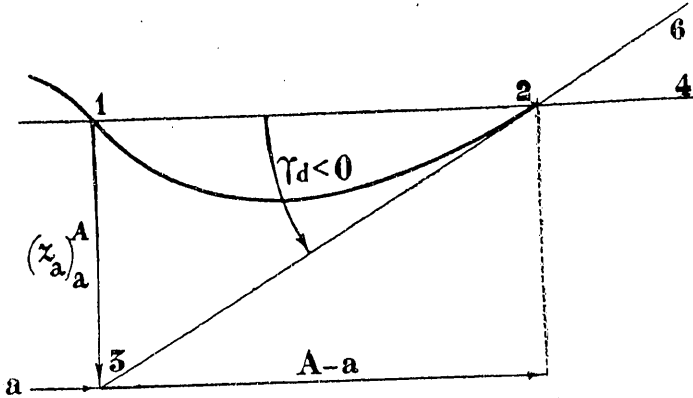


Fig. 4.^a

Los valores de los giros izquierdo y derecho, γ_i , γ_d , no son verdaderos, téngase muy presente, más que cuando se cumple la condición esencial ya señalada.

En el cálculo de estructuras compuestas por elementos rectos, ó curvos, elásticamente empotrados unos en otros, se admite, en general, despreciando los cambios de longitud debidos á los esfuerzos normales, que los nudos de enlace permanecen inmóviles. Entonces son aplicables á cada elemento las ecuaciones (4) y (6); las abscisas a , contándolas en cada uno desde su extremo izquierdo como origen, son cero; las A iguales á la longitud entre nudos, l , y para cada trozo resulta:

$$\left. \begin{aligned} \gamma_i &= + \frac{1}{l} \int_0^l \frac{M}{EI} (l-x) dx \\ \gamma_d &= - \frac{1}{l} \int_0^l \frac{M}{EI} x dx \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Los signos $+$ y $-$ indican que γ_i tiene el mismo sentido, sea el que fuere, del momento estático derecho y que γ_d , por lo contrario, tiene el opuesto al del momento estático izquierdo.

Mr. Mancy, y, justo es decirlo, la casi totalidad de los alemanes, sólo estiman los valores absolutos, ó bien toman implícitamente para γ_i , γ_d , distintos sentidos positivos. En problemas sencillos puede pasar, pero es siempre muy expuesto á equivocaciones fundamentales al plantear el problema, cosa que se reduce á expresar que todas las elásticas que confluyen en un nudo giran lo mismo y en el mismo sentido. Como en unas es el extremo izquierdo, en otras el derecho, el que converge en el nudo, con las expresiones (7) no cabe vacilación; de otro modo sí.

II

Rehagamos el cálculo del sencillísimo caso presentado como ejemplo y resultará bien patente la seguridad y sencillez que así se logran. Para facilitar la comparación reproduciremos la figu-

ra con las mismas notaciones (3.^a en el artículo citado, 5.^a en éste).

Sin necesidad de *prejuizar* que en la línea representativa de $\frac{M}{EI}$, ó de M , cuando E , I , son constantes, ciertas ordenadas sean positivas y otras negativas, basta decir:

1.^o Que en los tramos laterales y en los pilares M varía *linealmente*, puesto que en las longitudes L_2 y L_1 no actúan causas exteriores.

2.^o Que en el vano central M es la suma algebraica de una flexión *lineal*, correspondiente á los empotramientos elásticos y de otra *parabólica*, correlativa al peso unitario uniforme w .

Todos los momentos: M_F , M_E , en el tramo lateral; M_D , M_C , en el pilar; y M_B , M_A , en el vano central se suponen positivos (el cálculo dará sus verdaderos signos), y medidos á la izquierda de las secciones respectivas, recorriendo el pilar de abajo arriba, los vanos de izquierda á derecha.

El momento estático derecho, ó respecto á E , del área trapezoidal de ordenadas M_F y M_E , vale:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} L_2 \left\{ M_F \times \frac{2}{3} L_2 + M_E \times \frac{1}{3} L_2 \right\} &= \\ = \frac{1}{6} L_2^2 (2 M_F + M_E) \end{aligned} \quad (1)$$

que, según los sentidos y valores que realmente alcancen M_F y M_E , será positivo, negativo ó nulo.

La rotación de la elástica en F es nula si el empotramiento se supone perfecto. Puesto que EI_2 es constante:

$$2 M_F + M_E = 0; \quad M_F = - \frac{1}{2} M_E. \quad (I)$$

De igual modo resulta para el pilar perfectamente empotrado en D :

$$2 M_D + M_C = 0; \quad M_D = - \frac{1}{2} M_C. \quad (II)$$

El momento estático izquierdo, ó respecto á F , del vano L_2 es, sin más que permutar en (1) los subíndices

$$\frac{1}{6} L_2^2 (M_F + 2 M_E). \quad (2)$$

Análogamente en el pilar, vale el respecto á C :

$$\frac{1}{6} L_1^2 (M_D + 2 M_C). \quad (3)$$

Y como las dos elásticas que confluyen por sus extremos derechos en el nudo (EC), giran lo mismo en magnitud y dirección:

$$- \frac{M_F + 2 M_E}{6 EI_2} L_2 = - \frac{M_D + 2 M_C}{6 EI_1} L_1, \quad (4)$$

y según (I) y (II):

$$I_2 L_1 \times M_C = I_1 L_2 \times M_E. \quad (III)$$

El momento estático izquierdo del área de ordenada M_B , constante en virtud de la simetría, es:

$$L M_B \times \frac{1}{2} L = \frac{1}{2} M_B L^2, \quad (5)$$

y el de la parabólica, de ordenada máxima M_A :

$$\frac{2}{3} L \times \frac{1}{8} w L^2 \times \frac{1}{2} L = \frac{1}{24} w L^4. \quad (6)$$

La igualdad de rotación de las elásticas en C (derecha) y en B y, según (VIII), abreviando con Δ el denominador: (izquierda) exige:

$$-\frac{M_D + 2M_C}{6EI_1} L_1 = +\frac{wL^3}{24EI} + \frac{M_B}{2EI} L \quad (7)$$

ó bien, en virtud de (II) y (III) y sustituyendo

$$M_B = M_C + M_E; \quad M_E = \frac{I_2}{I_1} \frac{L_1}{L_2} M_C$$

resulta una ecuación con una sola incógnita, que da:

$$M_C = -\frac{2I_1 L_2 L}{IL_1 L_2 + 2I_1 L_2 L + 2I_2 L L_1} \frac{wL^2}{12} \quad (IV)$$

é inmediatamente, abreviando con Δ el denominador:

$$\begin{aligned} M_E &= -\frac{2I_2 L_1 L}{\Delta} \frac{wL^2}{12} \\ M_B &= -\frac{2(I_1 L_2 + I_2 L_1) L}{\Delta} \frac{wL^2}{12} \\ M_F &= -\frac{1}{2} M_E; \quad M_D = -\frac{1}{2} M_C \end{aligned} \quad (V)$$

Por último, M_A vale, correctamente expresado:

$$M_A = \frac{wL^2}{8} + M_B = \frac{3IL_1 L_2 + 2I_1 L_2 L + 2I_2 L L_1}{\Delta} \frac{wL^2}{24} \quad (VI)$$

Obsérvese que Mr. Mancy establece desde luego que los empotramientos perfectos M_F y M_D tienen signos opuestos al del elástico M_B . En casos sencillísimos, como el presente, se puede prever el *aire* general de las deformaciones y saber *a priori* detalles análogos á ese; pero fuera de ellos es muy expuesto hacerlo así.

Supóngase, por ejemplo, que se añade en los tramos laterales otra sobrecarga uniforme, w_2 . Procediendo racionalmente, no hay dificultad alguna; todo se reduce á sumar al momento estático derecho (1) $\frac{1}{24} w_2 L_2^4$, con lo que resulta:

$$\begin{aligned} 2M_F + M_E + \frac{1}{4} w_2 L_2^2 &= 0; \\ M_F &= -\frac{1}{8} w_2 L_2^2 - \frac{1}{2} M_E. \end{aligned} \quad (VII)$$

El momento estático izquierdo es ahora, en lugar de (2),

$$\frac{1}{6} L_2^2 (M_F + 2M_E) + \frac{1}{24} w_2 L_2^4$$

ó bien, en función de M_E :

$$\frac{1}{4} M_E L_2^2 + \frac{1}{48} w_2 L_2^4. \quad (8)$$

La igualdad de rotaciones en C y E (derecha en ambos), da ahora:

$$-\frac{12M_E + w_2 L_2^2}{48EI_2} L_2 = -\frac{M_D + 2M_C}{6EI_1} L_1$$

y como subsiste (II) relativa al pilar:

$$M_E = \frac{I_2}{I_1} \frac{L_1}{L_2} M_C - \frac{1}{12} w_2 L_2^2. \quad (VIII)$$

De la condición relativa á los giros en C y B , idéntica á la de antes (7), resulta por el nuevo valor de M_E :

$$M_C = \frac{2I_1 L_2 L}{IL_1 L_2 + 2I_1 L_2 L + 2I_2 L L_1} \left\{ \frac{w_2}{12} L_2^2 - \frac{w}{12} L^2 \right\} \quad (IX)$$

$$\begin{aligned} M_E &= -\frac{2I_2 L_1 L}{\Delta} \frac{wL^2}{12} - \frac{IL_1 L_2 + 2I_2 L L_1}{\Delta} \frac{w_2 L_2^2}{12} \\ M_B &= -\frac{2(I_1 L_2 + I_2 L_1) L}{\Delta} \frac{wL^2}{12} + \\ &+ \frac{2(I_1 L_2 - I_2 L_1) L - IL_1 L_2}{\Delta} \frac{w_2 L_2^2}{12} \end{aligned} \quad (X)$$

M_C , momento flector en el extremo superior del pilar puede ser de uno ú otro signo, ó nulo: igual sucede con M_B , par de empotramiento elástico del vano central. En cambio, su homólogo en el tramo lateral, M_E , resulta siempre negativo.

Y el de empotramiento perfecto, que según (VII), vale

$$M_F = +\frac{I_2 L_1 L_2}{\Delta} \frac{wL^2}{12} - \frac{IL_1 L_2 + 2I_2 L L_1 + 3I_1 L_2 L}{\Delta} \frac{w_2 L_2^2}{12} \quad (XI)$$

puede tener cualquier sentido, ó ser nulo. ¿Cómo saber *a priori* si M_F concuerda, ó discuerda, con M_E ?

Y si se trata de una obra más seria, disimétrica, de forma algo complicada, sujeta á sobrecargas aisladas, para cuyo estudio se requieren las líneas de influencia de todos, ó algunos de esos momentos flectores, proceder del modo criticado es caminar completamente á ciegas.

III

En tales problemas, por otra parte, el conocimiento de los giros γ_1 , γ_2 , expresados por (7) en el pár. I, es necesario, pero no suficiente. Aun prescindiendo de que esos valores no son *exactos*, como cree Mr. Mancy, sino *aproximados*, precisa hacer entrar en el cálculo otros elementos, de trascendental influencia á veces: las variaciones de temperatura y la movilidad, accidental ó sistemática, de los nudos, que en el cálculo expuesto se suponen, por simplificar, inmóviles. Nos llevaría muy lejos bosquejar, aun á grandes rasgos, el problema de la viga de muchos tramos, elásticamente empotrados sobre pilares elásticamente deformables. El planteo, aun en el caso más complicado (luces é inclinaciones de los tramos, distintas; momentos de inercia variables dentro de cada tramo, ó pilar, de una sección á otra), es siempre el mismo: expresar que dos puntos experimentan idénticos recorridos lineales, ó que dos tangentes á las elásticas tienen los mismos recorridos angulares. Los valores algebraicos de esos recorridos constan de una porción de términos, de los que sólo uno figura en el estudio de Mr. Mancy.

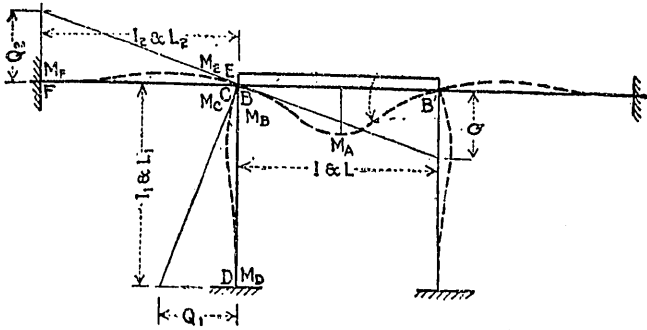
Naturalmente, desaparece la seductora sencillez que en el cálculo que hemos repetido campea. Todo se complica y baste decir que el tan conocido teorema de los tres momentos no es sino una degeneración del que en el trabajo presentado á la Asociación Española del progreso de las Ciencias llamamos de los *ocho momentos consecutivos*.

No podemos menos de vindicar de la imputación de pesadísimo, hecha en el artículo citado, al método de cálculo basado en el mínimo trabajo elástico (*). Verdad es que su aplicación al caso concreto de la figura 5.^a resulta algo más penosa que la sencillísima que hemos desarrollado, pero nada más que *algo*. De

(*) Permítanos nuestro querido discípulo, el Sr. Serret, lamentar que haya traducido *least work* por «menor trabajo», sin duda por recordar que habitual, pero viciosamente, se traduce «moindre action» por «menor acción». Lo mismo la acción á que se refiere el teorema de Dinámica, que el trabajo elástico, objeto del teorema de Castigliano, son *verdaderos mínimos*, con todos los caracteres esenciales: sus primeras derivadas parciales son nulas y las segundas positivas.

eso á que los «análisis detallados» requeridos sean diez veces mayores en número, media un abismo. Véase la prueba.

Sean v y V las reacciones verticales, ascendentes las positivas, en F y D (fig. 5.^a); h la horizontal en D , dirigida de derecha á izquierda, por esencia igual y opuesta á la reacción elástica en A , ejercida por la semiestructura de la derecha sobre la de la iz-

Fig. 5.^a

quierda. Por efecto de la simetría, la reacción elástica vertical en A es nula, y la giratoria, igual y contraria al momento flector, vale $(-M_A)$.

Según las condiciones generales de la Estática:

$$\left. \begin{aligned} v + V - \frac{1}{2} w L &= 0 \\ v L_2 + M_F + h L_1 + M_D + \frac{w L^2}{8} + (-M_A) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Los valores generales del momento flector son:

$$\left. \begin{aligned} M \Big|_F^E &= M_F + v x \\ M \Big|_D^C &= M_D + h z = M_A - M_F - v L_2 - \frac{w L^2}{8} - h (L_1 - z) (*) \\ M \Big|_B^A &= -M \Big|_A^B = +M_A - \frac{w X^2}{2} (**) \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

puestos en función de las cuatro reacciones independientes, M_F , M_A , h , v , cuyos recorridos angulares, ó lineales, son nulos por suponer perfectos los empotramientos y por la simetría.

Las cuatro ecuaciones que expresan esa nulidad son de la forma

$$\sum \int \frac{M}{EI} \frac{dM}{dR} dx = 0 \quad (3)$$

indicando R cualquiera de aquellas reacciones. Las integrales comprenden la longitud de cada trozo y la suma todos los trozos de la semiestructura.

En general, un sistema de cuatro ecuaciones constituye un enrevesado problema de Algebra. Pero muchas veces resulta sencillísimo, como ahora veremos.

Para la reacción-par M_F :

$$\frac{dM}{dM_F} = 1 \text{ en } \overline{FE}; \quad -1 \text{ en } \overline{DC}; \quad 0 \text{ en } \overline{BA};$$

(*) En virtud de la segunda ecuación (1).

(**) Contando la abscisa auxiliar, $X = \frac{L}{2} - x$, desde A hacia B . La sustitución de un momento flector de expresión complicada por su idéntico el momento antiflector cambiado de signo, simplifica extraordinariamente, como se ve.

lo que conduce, integrando en x desde cero hasta L_2 , en z de cero á L_1 , á la ecuación:

$$\frac{1}{I_2} (M_F L_2 + \frac{1}{2} v L_2^2) - \frac{1}{I_1} (M_A L_1 - M_F L_1 - v L_2 L_1 - \frac{w L^2}{8} L_1 - h L_1^2 + \frac{1}{2} h L_1^2) = 0. \quad (I)$$

Para la reacción-fuerza v :

$$\frac{dM}{dv} = x \text{ en } \overline{FE}; \quad -L_2 \text{ en } \overline{DC}; \quad 0 \text{ en } \overline{BA};$$

y observando que el término correspondiente á $\overline{DC}$ es el homólogo en (I) multiplicado por L_2 , podemos desde luego sustituirlo por su igual:

$$\frac{1}{I_2} \left(\frac{1}{2} M_F L_2^2 + \frac{1}{3} v L_2^3 \right) + \frac{1}{I_2} (M_F L_2 + \frac{1}{2} v L_2^2) L_2 = 0$$

y resulta ya, sencillamente:

$$M_F = -\frac{1}{3} v L_2 \quad \text{ó} \quad v L_2 = -3 M_F \quad (II)$$

Para el par M_A :

$$\frac{dM}{dM_A} = 0 \text{ en } \overline{FE}; \quad 1 \text{ en } \overline{DC}; \quad 1 \text{ en } \overline{BA};$$

y sustituyendo, según (II),

$$M_F + v L_2 = -2 M_F$$

é integrando respecto á X de cero á $\frac{1}{2} L$:

$$\frac{1}{I_1} (M_A L_1 + 2 M_F L_1 - \frac{w L^2}{8} L_1 - \frac{1}{2} h L_1^2) + \frac{1}{I_1} \left(\frac{1}{2} M_A L - \frac{1}{2} v \frac{L^2}{3 \times 8} \right) = 0 \quad (III)$$

Finalmente, para la reacción h :

$$\frac{dM}{dh} = 0 \text{ en } \overline{FE}; \quad (z - L_1) \text{ en } \overline{DC}; \quad 0 \text{ en } \overline{BA};$$

$$\frac{1}{I_1} \left\{ \left(M_A + 2 M_F - \frac{w L^2}{8} \right) \left(\frac{L_1^2}{2} - L_1^2 \right) + h \left(L_1^3 - 2 \frac{L_1^5}{2} + \frac{L_1^3}{3} \right) \right\} = 0$$

que se reduce simplemente á:

$$L_1 h - 3 M_F - \frac{3}{2} M_A + \frac{3}{16} w L^2 = 0. \quad (IV)$$

Tenemos en resumen, eliminando en (I) la reacción v , mediante (II):

$$(I_1 L_2 + 4 I_2 L_1) M_F - I_2 L_1^2 h + 2 I_2 L_1 M_A = \frac{1}{4} I_2 L_1 w L^2$$

que sumada con el producto de (IV) por $I_2 L_1$, da:

$$(I_1 L_2 + I_2 L_1) M_F + \frac{1}{2} I_2 L_1 M_A = \frac{1}{16} I_2 L_1 w L^2 \quad (I, IV)$$

Análogamente obtenemos:

$$I L_1 M_F + \left(\frac{1}{2} I L_1 + I_1 L \right) M_A = \frac{1}{8} \left(\frac{1}{2} I L_1 + \frac{1}{3} I_1 L \right) w L^2 \quad (III, IV)$$

y de ellas se deduce:

$$M_A = \frac{3 I_1 L_2 + 2 I_1 L_2 L + 2 I_2 L L_1}{I_1 L_1 L_2 + 2 I_1 L_2 L + 2 I_2 L L_1} \frac{w L^2}{24}$$

$$M_F = \frac{I_2 L_1 L}{\Delta} \frac{w L^2}{24}$$

é inmediatamente:

$$M_B = M_A - \frac{1}{8} w L^2 = - \frac{(I_1 L_2 + I_2 L_1) 4 L}{\Delta} \frac{w L^2}{24}$$

idénticos á los ya encontrados en el pár. II.

Además:

$$v = - \frac{3}{L_2} M_F = - \frac{I_2 L_1 L}{\Delta} \frac{L}{L_2} \frac{w L}{8}$$

y mediante la ecuación (IV):

$$h = \frac{3}{2 L_1} \left(M_A - \frac{w L^2}{8} \right) + \frac{3}{L_1} M_F =$$

$$= \frac{I_2 L L_1 - I_1 L_2 L}{\Delta} \frac{L}{L_1} \frac{w L}{16}$$

La reacción v es descendente; la del pilar, V , supera, por consecuencia, á $\frac{1}{2} w L$. h puede ser positiva, ó negativa, según que $I_2 L_1$ sea mayor, ó menor, que $I_1 L_2$. M_D se deduce inmediatamente de (1), M_E y M_C de los valores (?).

¿Resulta el cálculo anterior diez veces más largo que el de Mr. Mancy? Los lectores apreciarán hasta dónde llega la hipérbole (*).

Fervientes admiradores de Castigliano, á cuya memoria dedicamos en esta Revista (**) una serie de artículos para divulgar sus teoremas y métodos, no por ello somos exclusivistas, ni mucho menos. En unos estudios abandonamos el método del trabajo elástico por el fundado en las expresiones de los recorridos angulares (á veces reducidas éstas al término en M , á veces completadas con los relativos á los demás elementos y á las variaciones de posición de los soportes); en otros casos preferimos el método clásico, la integración de las ecuaciones diferenciales fundamentales; en otros, por último, encontramos que la aplicación de los teoremas de Castigliano es la que resuelve el problema con arreglo al mismo principio fundamental de *requerir el mínimo trabajo*.

JUAN MANUEL DE ZAFRA,
Profesor de Hormigón armado
y de Puertos en la Escuela de Caminos.

EL PAVIMENTO

DE

GRANITO ARTIFICIAL SOLIDITIT

EN LAS VÍAS PÚBLICAS (1)

El pavimento ideal.—El pavimento ideal para caminos con intenso y pesado tráfico, debería estar formado por una inmensa laja de granito ó de pórfido con superficie lisa é impermeable, pero no resbaladiza, bastante dura para resistir al rozamiento y

(*) O el no saber manejar bien el trabajo elástico. Do poco sirve un arma de alta precisión en manos de un mal tirador.

(**) Noviembre y Diciembre de 1912; Enero de 1913.

(1) Publicamos con mucho gusto este artículo, inserto en los *Annali della Società degli Ingegneri e degli Architetti Italiani*, y que nos ha remitido traducido su autor, el distinguido Ingeniero italiano Sr. Luigi.

con desgaste uniforme bajo la acción del tránsito de vehículos y caballerías. Debería, además, poder ser arreglado fácilmente en caso de reparaciones por simple sustitución de nuevo material en los sitios deteriorados, con adherencia perfecta á las partes restantes; tampoco debería formar polvo, ni barro, ni ser muy sonoro; conviene también tenga aspecto agradable á la vista, y debería, en fin, ser de costo reducido.

A este ideal, en realidad muy difícil, por no decir imposible de conseguir por completo, se aproximan los pavimentos formados de materias aglomerantes depositadas en estado plástico y que después se endurecen, como son los de asfalto y los aún más recientes con mortero de cemento.

Los primeros están ya bastante empleados en Norte-América y en Europa; los segundos empiezan á ser comunes en América y también en Italia, donde los pavimentos de asfalto ó de tarugos de madera resultan demasiado caros, mientras que los de hormigón, ó sea con los de aglomerante de cemento son más baratos, por haber en Italia abundancia de materiales adecuados; y, en efecto, hay ya muchas aplicaciones de esta clase de pavimentos en las grandes ciudades y en las carreteras nacionales y provinciales italianas, todas las que han dado resultados muy satisfactorios.

Comparación entre las calzadas de asfalto y de hormigón.—Los pavimentos monolíticos con aglomerante asfáltico ó bituminoso, responden bien á muchos de los requisitos mencionados, pero presentan el inconveniente de ser resbaladizos en tiempo lluvioso, de resblandecerse en verano y de tener tendencia á agrietarse en invierno; además, su aspecto es algo sombrío, producen un poco de polvo de color negruzco, que se pega fácilmente, y dan un olor que resulta molesto á algunas personas, siendo, sobre todo, de un precio elevado, pues cuesta de 18 á 22 liras el metro cuadrado, por lo que se emplea, especialmente, en las vías de gran tráfico de las grandes ciudades para el transporte rápido á tracción mecánica.

Los pavimentos monolíticos con aglomerante de mezcla de cemento tendrían todas las ventajas de los de asfalto sin presentar sus inconvenientes, á condición de poder preparar un hormigón de cemento, arena y piedra machacada, en el cual estuviesen los elementos unidos por una verdadera reacción química, como sucede en los granitos naturales, y no por simple adherencia física, como ocurre en el hormigón ordinario de cementos portland. Sería, además, necesario que el mortero de cemento y arena tuviera resistencia igual á la de la piedra machacada para que el desgaste del piso fuese uniforme.

Estas condiciones, que desde hace tiempo constituyen el objeto de experimentos de muchos químicos en Francia, Alemania, Inglaterra é Italia, han sido realizadas por un cemento especial llamado Soliditit, que lo fabrica la Sociedad Portland Casalesi, de Casale Monferrato, el centro más importante de Italia para la producción de cemento.

Este nuevo tipo de cemento Soliditit parece ser un verdadero compuesto químico y contiene una proporción muy alta de sílice soluble y pequeña de cal, ó sea lo contrario de lo que se encuentra en los ordinarios cementos portland (1).

Los pavimentos hechos con este cemento especial y con pie-

(1) Análisis de este cemento:

	Por ciento.
Pérdida por el calor	1,62
Sílice soluble ó insoluble	56,38
Alúmina	5,50
Oxido de hierro	1,80
Cal	33,12
Magnesia	1,52
Acido sulfúrico	0,95
Alcalis	Indeterminado.